Sur les solutions presque-périodiques des équations différentielles du premier et du second ordre

par Z. OPIAL (Kraków)

1. B. P. Démidovitch [2] a démontré que si une fonction continue $g(t)$ est presque-périodique et telle que son intégrale

$$G(t) = \int_0^t g(u) du$$

soit bornée sur tout l'axe des t et si $f(x)$ est une fonction monotone de classe C^1 , toute solution bornée de l'équation différentielle

$$x' = f(x) + g(t)$$

est une fonction presque-périodique. Il a aussi remarqué que l'hypothèse relative à la fonction $G(t)$ peut bien être rejetée si l'on a

$$f'(x) \geq k > 0 \quad \text{ou} \quad f'(x) \leq k < 0.$$

En employant la méthode de B. P. Démidovitch N. Gheorghiu [5] a réussi à étendre une partie de ce résultat à l'équation générale du premier ordre

$$(1) \quad x' = f(t, x).$$

Il a notamment établi le théorème suivant: si 1° $f(t, x)$ est une fonction définie et continue pour $|x| \leq M$, $-\infty < t < +\infty$, 2° $f_x(t, x)$ est continue dans la même bande et $f_x(t, x) \geq k > 0$ ou $f_x(t, x) \leq k < 0$, 3° $f(t, x)$ est une fonction presque-périodique de t , uniformément par rapport à x , dans la bande considérée, alors toute solution bornée de l'équation (1) est presque-périodique.

Dans la présente note je généralise les théorèmes de Démidovitch et Gheorghiu en démontrant le théorème suivant:

THÉORÈME I. Si la fonction $f(t, x)$ définie et continue dans le plan (t, x) est une fonction presque-périodique de la variable t , uniformément par rapport à x , et monotone au sens large par rapport à la variable x , alors toute solution bornée de l'équation (1) est presque-périodique.

L'hypothèse de la presque-périodicité uniforme intervenant dans l'énoncé de ce théorème veut dire que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $M > 0$ on peut trouver un nombre $l(\varepsilon)$ tel que chaque intervalle de l'axe des t de longueur $l(\varepsilon)$ contienne au moins une presque-période τ , relative à ε c'est-à-dire telle que

$$|f(t + \tau, x) - f(t, x)| \leq \varepsilon \quad \text{pour} \quad |x| \leq M \quad \text{et} \quad -\infty < t < +\infty.$$

Dans la seconde partie de la note j'applique la méthode de la démonstration du théorème I aux équations différentielles du second ordre en obtenant ainsi une généralisation d'un théorème de C. Corduneanu [1].

2. Dans la démonstration du théorème formulé ci-dessus nous nous servons de la méthode de J. Favard [3]. Rappelons à cet effet quelques notions et propositions sur les fonctions presque-périodiques.

Nous appelons *fonction normale* toute fonction $f(t)$ définie et continue pour $-\infty < t < +\infty$ et telle que l'on puisse extraire de toute suite

$$f(t + h_1), f(t + h_2), f(t + h_3), \dots,$$

où les h sont des nombres réels arbitraires, une autre suite

$$f(t + k_1), f(t + k_2), f(t + k_3), \dots$$

qui converge uniformément pour $-\infty < t < +\infty$ vers une fonction limite.

THÉORÈME DE BOCHNER ([3], p. 38): Toute fonction presque-périodique est une fonction normale et réciproquement.

Pareillement, nous pouvons appeler *fonction normale* toute fonction $f(t, x)$ définie et continue dans le plan (t, x) et telle que l'on puisse extraire de toute suite

$$f(t + h_1, x), f(t + h_2, x), f(t + h_3, x), \dots$$

une autre suite

$$f(t + k_1, x), f(t + k_2, x), f(t + k_3, x), \dots$$

qui converge uniformément pour $-\infty < t < +\infty$, $|x| \leq M$ (M — fixe mais arbitraire) vers une fonction limite.

En répétant sans aucun changement la démonstration de J. Favard du théorème de Bochner ([3], p. 38-40) on établit sans peine:

THÉORÈME DE BOCHNER GÉNÉRALISÉ. Toute fonction $f(t, x)$ presque-périodique de la variable t , uniformément par rapport à la variable x , est une fonction normale.

3. Avant de passer à la démonstration du théorème I nous allons établir quelques lemmes.

Supposons que l'équation (1) admette au moins une solution bornée. Il existe donc un nombre M tel que la famille F de solutions $x(t)$ de l'équation (1) qui satisfont à l'inégalité

$$(2) \quad -M \leq x(t) \leq M \quad (-\infty < t < +\infty)$$

n'est pas vide. Toute fonction $x(t)$ de la famille F a des bornes supérieure et inférieure $G_{x(t)}$, $g_{x(t)}$ finies. Posons

$$h = \text{borne inférieure } (G_{x(t)} - g_{x(t)}).$$

Le second membre de l'équation (1) étant borné dans l'ensemble $|x| \leq M$, $-\infty < t < +\infty$, les fonctions de la famille F sont équicontinues. D'autre part, toute fonction limite d'une suite de fonctions de cette famille est une intégrale de l'équation (1) qui satisfait à l'inégalité (2). L'ensemble $F' \subset F$ des fonctions pour lesquelles $G_{x(t)} - g_{x(t)} = h$ contient donc au moins un élément. L'ensemble F' jouit des mêmes propriétés que l'ensemble F . Il existe dans F' au moins une solution $\varphi(t)$ de l'équation (1) pour laquelle la borne inférieure $g_{\varphi(t)}$ est la plus petite possible. Toute solution de ce type sera appelée dans la suite *solution à oscillation minimale* ou tout simplement *solution minimale* de l'équation (1).

LEMME I. Pour toute solution minimale $\varphi(t)$ de l'équation (1) on a

$$(3) \quad \limsup_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = G_{\varphi(t)} = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t),$$

$$(4) \quad \liminf_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = g_{\varphi(t)} = \liminf_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t).$$

Supposons en effet que l'on ait, par exemple,

$$(5) \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) < G_{\varphi(t)}.$$

Choisissons une suite $\{\tau_n\}$ de telle sorte que l'on ait $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = +\infty$ et que τ_n soit une presque-période de la fonction $f(t, x)$ relative à $1/n$. Par hypothèse la suite des fonctions $\{f(t + \tau_n, x)\}$ converge vers $f(t, x)$ uniformément dans l'ensemble $|x| \leq M$ et $-\infty < t < +\infty$. Par conséquent, on peut extraire de la suite $\{\varphi(t + \tau_n)\}$ une suite partielle convergente (uniformément dans tout intervalle fini) vers une solution $\psi(t)$ de l'équation (1). En vertu de l'inégalité (5) on aurait alors

$$g_{\varphi(t)} \leq g_{\psi(t)} \leq G_{\varphi(t)} \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) < G_{\varphi(t)},$$

ce qui est en contradiction avec la définition de la solution minimale. On a donc $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = G_{\varphi(t)}$. On démontre de même que toutes les autres relations (3) et (4) sont aussi vraies.

LEMME II. L'équation (1) admet une et une seule solution minimale.

En effet, la différence de deux telles solutions $\psi(t) - \varphi(t)$ doit être monotone puisque l'on a

$$\psi'(t) - \varphi'(t) = f(t, \psi(t)) - f(t, \varphi(t))$$

et, par hypothèse, la fonction $f(t, x)$ est monotone par rapport à la variable x . On a donc ou bien $\lim_{t \rightarrow -\infty} (\psi(t) - \varphi(t)) \neq 0$, ou bien $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\psi(t) - \varphi(t)) \neq 0$ ce qui est impossible en raison du lemme précédent.

4. A côté de l'équation (1) considérons toute une classe S d'équations

$$(1^*) \quad x' = f^*(t, x)$$

où $f^*(t, x)$ est une limite uniforme dans l'ensemble $|x| \leq M$, $-\infty < t < +\infty$ d'une suite arbitraire $\{f(t+h_n, x)\}$. On vérifie aisément que toute équation de cette classe satisfait aux hypothèses du théorème I. En particulier, toute fonction $f^*(t, x)$ est monotone par rapport à la variable x . Les lemmes I et II s'appliquent donc à toute équation (1^*) de la classe S . Cela veut dire que toute équation de la classe S admet une et une seule solution minimale qui satisfait en plus aux inégalités (2). Désignons-la par $\varphi^*(t)$. On peut facilement démontrer que

$$(6) \quad g_{\varphi^*(t)} = g_{\varphi(t)} \quad \text{et} \quad G_{\varphi^*(t)} = G_{\varphi(t)}.$$

En effet, soit $f^*(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t+h_n, x)$. De la suite $\{\varphi(t+h_n)\}$ on peut donc extraire une suite partielle convergente (uniformément dans tout intervalle fini) vers une solution $\alpha(t)$ de l'équation (1^*) . On a évidemment

$$(7) \quad g_{\varphi(t)} \leq g_{\alpha(t)} \quad \text{et} \quad G_{\alpha(t)} \leq G_{\varphi(t)}.$$

Nous allons montrer que les inégalités fortes dans les relations (7) ne sont pas possibles. Supposons en effet que l'on ait par exemple $G_{\alpha(t)} < G_{\varphi(t)}$. Remarquons que la suite $\{f^*(t-h_n, x)\}$ converge uniformément dans l'ensemble $|x| \leq M$, $-\infty < t < +\infty$ vers la fonction $f(t, x)$. De la suite $\{\alpha(t-h_n)\}$ on pourrait donc extraire une suite partielle convergente vers une solution $\beta(t)$ de l'équation (1). On aurait évidemment

$$g_{\varphi(t)} \leq g_{\alpha(t)} \leq g_{\beta(t)} \leq G_{\beta(t)} \leq G_{\alpha(t)} < G_{\varphi(t)}$$

ce qui est incompatible avec la définition de la solution minimale de l'équation (1). Or, on démontre facilement que la solution $\alpha(t)$ de l'équation (1^*) est identique à la solution minimale $\varphi^*(t)$ de la même équation. Par suite, des relations (7) on obtient immédiatement les égalités (6).

On peut même démontrer quelque chose de plus, notamment la relation

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t+h_n) = \varphi^*(t).$$

En effet, toute sous-suite convergente de la suite $\{\varphi(t+h_n)\}$ converge vers la solution minimale $\varphi^*(t)$ de l'équation (1^*) car c'est la seule solution de cette équation qui a les mêmes bornes que la fonction $\varphi(t)$ elle-même. Il en résulte que la relation (8) est vérifiée.

5. LEMME III. La solution minimale $\varphi(t)$ de l'équation (1) est une fonction presque-périodique.

D'après le théorème de Bochner il suffit de démontrer que $\varphi(t)$ est une fonction normale. Soit donc $\{h_n\}$ une suite arbitraire de nombres réels. De la suite $\{f(t+h_n, x)\}$ on peut extraire une suite partielle $\{f(t+k_n, x)\}$ qui converge uniformément dans l'ensemble $|x| \leq M$, $-\infty < t < +\infty$ vers une fonction $f^*(t, x)$. La suite $\{\varphi(t+k_n)\}$ converge alors vers la solution minimale $\varphi^*(t)$ de l'équation (1^*) . Pour démontrer notre lemme il suffit de montrer que cette convergence est uniforme sur tout l'axe des t . Pour la démonstration par l'absurde supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Il existe donc un nombre $\varepsilon > 0$ et deux suites de nombres $\{t_p\}, \{l_p\}$ telles que

$$(9) \quad |\varphi(t_p + l_p) - \varphi^*(t_p)| \geq \varepsilon \quad (p = 1, 2, \dots).$$

De la suite de fonctions $\{f(t+t_p+l_p, x)\}$ on peut extraire une suite qui converge uniformément dans l'ensemble $|x| \leq M$, $-\infty < t < +\infty$ vers une fonction $f^{**}(t, x)$. Pour ne pas compliquer les notations supposons que ce soit la suite $\{f(t+t_p+l_p, x)\}$ elle-même qui jouisse de cette propriété. On a donc

$$f^{**}(t, x) = \lim_{p \rightarrow \infty} f(t+t_p+l_p, x) = \lim_{p \rightarrow \infty} f^*(t+t_p, x).$$

D'après ce que nous avons dit au n° précédent, on a aussi

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \varphi(t+t_p+l_p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \varphi^*(t+t_p) = \varphi^{**}(t)$$

où $\varphi^{**}(t)$ est solution minimale de l'équation $x' = f^{**}(t, x)$. On a donc, en particulier

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \varphi(t_p+l_p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \varphi^*(t_p) = \varphi^{**}(0)$$

ce qui est en contradiction avec l'inégalité (9).

6. Démonstration du théorème I. D'après le lemme III la solution minimale $\varphi(t)$ est une fonction presque-périodique. Nous allons

montrer que toute autre solution bornée de l'équation (1) doit être forcément de la forme $\psi(t) = \varphi(t) + \text{const.}$ Supposons, pour fixer les idées, que la fonction $f(t, x)$ soit non décroissante. Parmi plusieurs cas qui peuvent se présenter envisageons, à titre d'exemple, le suivant: dans un intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$ ($\alpha < \beta$) on a

$$\psi'(t) - \varphi'(t) \geq 2k > 0, \quad \psi(\beta) = \varphi(\beta) + \eta \quad (\eta > 0).$$

On a évidemment dans l'intervalle $\langle \beta, +\infty \rangle$

$$\psi'(t) - \varphi'(t) = f(t, \psi(t)) - f(t, \varphi(t)) \geq f(t, \varphi(t) + \eta) - f(t, \varphi(t)) \geq 0.$$

La fonction $\Phi(t) = f(t, \varphi(t) + \eta) - f(t, \varphi(t))$ est presque-périodique et dans l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$ on a par hypothèse $\Phi(t) \geq 2k$. Il existe donc dans l'intervalle $\langle \beta, +\infty \rangle$ une infinité d'intervalles de longueurs égales à $\beta - \alpha$ dans chacun desquels on a $\Phi(t) \geq k > 0$. Il en résulte que $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = +\infty$. Ayant de même exclu toutes les autres possibilités, on conclut enfin que pour tout t on doit avoir forcément $\psi'(t) - \varphi'(t) = 0$.

Le théorème I se trouve ainsi démontré.

7. En s'appuyant sur la relation (8) et sur le lemme III on peut aisément démontrer que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que toute presque-période de la fonction $f(t, x)$, relative à δ , soit une presque-période de la solution minimale $\varphi(t)$ (et, par suite, de toute autre solution bornée), relative à ε . Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi. Il existe donc un $\varepsilon_0 > 0$ et deux suites de nombres $\{t_p\}$ et $\{\tau_p\}$ où τ_p est une presque-période de la fonction $f(t, x)$, relative à $1/p$, telles que

$$(10) \quad |\varphi(t_p + \tau_p) - \varphi(t_p)| \geq \varepsilon_0 \quad (p = 1, 2, \dots).$$

La suite de fonctions $\{f(t + \tau_p, x)\}$ converge uniformément dans l'ensemble $|x| \leq M, -\infty < t < +\infty$ vers la fonction $f(t, x)$. Par conséquent, la suite $\{\varphi(t + \tau_p)\}$ converge uniformément dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ (cf. la démonstration du lemme III) vers la fonction $\varphi(t)$, ce qui est en contradiction avec l'inégalité (10).

8. Au n° 6 nous avons démontré que toute solution bornée $\psi(t)$ de l'équation (1) ne diffère de la solution minimale que d'une constante. Ce n'est possible que dans le cas où l'on a

$$f(t, \varphi(t)) \equiv f(t, \psi(t)) \quad (-\infty < t < +\infty).$$

Or, cette identité est impossible si la fonction $f(t, x)$ est monotone au sens strict par rapport à la variable x . On en conclut que dans ce cas l'équation (1) ne peut admettre qu'une seule solution bornée dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

9. Soit $\alpha(t)$ une solution de l'équation (1) bornée dans un intervalle $(t_0, +\infty)$. De même qu'au n° 6 on démontre que la différence $\alpha(t) - \varphi(t)$ ($\varphi(t)$ — solution minimale de l'équation (1)) est une fonction monotone. On a donc, en particulier

$$(11) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} (\alpha(t) - \varphi(t)) = C$$

où C est une constante. Nous allons montrer que la fonction $\varphi(t) + C$ est une solution de l'équation (1). En effet, choisissons une suite de nombres $\{\tau_n\}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = +\infty$ et que τ_n soit une presque-période de la fonction $f(t, x)$, relative à $1/n$. On a donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t + \tau_n, x) = f(t, x)$.

De la suite $\{\alpha(t + \tau_n)\}$ on peut extraire une suite partielle qui converge (uniformément dans tout intervalle fini) vers une solution de l'équation (1). Mais de la relation (11) il résulte immédiatement que cette solution doit être identique à $\varphi(t) + C$ puisque la suite $\{\varphi(t + \tau_n)\}$ converge uniformément dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ vers $\varphi(t)$. On peut donc énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME II. Dans les hypothèses du théorème I toute solution de l'équation (1), bornée dans un intervalle $(t_0, +\infty)$ est la somme d'une solution presque-périodique de l'équation (1) et d'une fonction tendant vers zéro lorsque t tend vers l'infini c'est-à-dire elle est une fonction asymptotiquement presque-périodique au sens de Fréchet (voir [4]).

Il en est de même pour toute solution de l'équation (1), bornée dans un intervalle $(-\infty, t_0)$.

10. Du raisonnement du n° précédent il résulte immédiatement que dans l'énoncé du théorème I il suffit de supposer l'existence d'une solution au moins de l'équation (1), bornée dans un intervalle $(t_0, +\infty)$ (ou bien $(-\infty, t_0)$), puisque l'on en tire sans peine l'existence d'une solution bornée sur tout l'axe des t .

11. Envisageons maintenant l'équation différentielle du second ordre

$$(12) \quad w'' = f(t, w, w')$$

et supposons que la fonction $f(t, w, w')$, définie et continue dans tout l'espace à trois dimensions, soit presque-périodique par rapport à la variable t (uniformément par rapport à (w, w') — cf. le n° 1) et non décroissante par rapport à la variable w . Supposons que l'équation (12) admette une solution bornée avec sa dérivée première dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Dans ces hypothèses existe-t-il au moins une solution

presque-périodique de l'équation (12)? C. Corduneanu [1] a établi que la réponse à ce problème est positive si l'on a pour tout (t, x, u) :

$$(13) \quad f_x(t, x, u) \geq m > 0.$$

Il a notamment démontré que dans ce cas toute solution de l'équation (12) qui est bornée ainsi que sa dérivée première dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, est presque-périodique, mais il est aisé de voir que l'inégalité (13) exclut la possibilité d'existence de plusieurs solutions bornées. Ce résultat de C. Corduneanu se laisse étendre au cas où $f(t, x, u)$ est croissante au sens large par rapport à la variable x sans pourtant satisfaire à l'inégalité (13). En modifiant un peu la démonstration du théorème I et en profitant des résultats de la note [6] on peut démontrer:

THÉORÈME III. *Supposons que la fonction $f(t, x, u)$ satisfasse aux conditions suivantes:*

- A. $f(t, x, u)$ est définie et continue en tout point (t, x, u) , croissante au sens large par rapport à la variable x ;
- B. $f(t, x, u)$ est une fonction presque-périodique de la variable t , uniformément par rapport à (x, u) ;
- C. pour tout couple de points (t, x, u) , $(t, \bar{x}, \bar{u})$

$$|f(t, x, u) - f(t, \bar{x}, \bar{u})| \leq L(|x - \bar{x}| + |u - \bar{u}|).$$

Dans ces hypothèses, si l'équation (12) admet une solution bornée avec sa dérivée première dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, elle admet au moins une solution presque-périodique. Deux solutions presque-périodiques de l'équation (12) ne peuvent différer que d'une constante.

Si la fonction $f(t, x, u)$ est croissante au sens strict par rapport à x , l'équation (12) ne peut admettre qu'une seule solution bornée dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

12. Esquisse de la démonstration du théorème III. Supposons que l'équation (12) admette au moins une solution $x(t)$ telle que

$$(14) \quad |x(t)| \leq M \quad \text{et} \quad |x'(t)| \leq M \quad (-\infty < t < +\infty)$$

et désignons par F la famille de solutions de l'équation envisagée satisfaisant aux inégalités (14). De même que dans la démonstration du théorème I (cf. aussi [6], théorème I) on définit la solution minimale $\varphi(t)$ de l'équation (12). Pour démontrer que cette solution minimale satisfait aux relations (3) et (4) on répète sans aucun changement la démonstration du lemme I. De là et du lemme I de la note [6] il résulte que la solution minimale est unique.

On introduit ensuite la classe S d'équations

$$(12^*) \quad x'' = f^*(t, x, x'),$$

où la fonction $f^*(t, x, u)$ est une limite, uniforme dans l'ensemble $|x| \leq M$, $|u| \leq M$, $-\infty < t < +\infty$, d'une suite $\{f(t + h_n, x, u)\}$. On vérifie sans peine que toute équation (12*) de la classe S jouit des mêmes propriétés que l'équation (12). En particulier, l'hypothèse C qui assure l'unicité des solutions de l'équation (12), est aussi vérifiée pour la fonction $f^*(t, x, u)$. Il en vient que toute équation (12*) de la classe S admet une et une seule solution minimale. On peut donc, en répétant les raisonnements des nos 4 et 5, démontrer que la solution minimale de l'équation (12) est une fonction presque-périodique.

Soit $\psi(t)$ une autre solution presque-périodique de l'équation (12). La différence $\psi(t) - \varphi(t)$ est aussi une fonction presque-périodique. D'après le lemme I de la note [6] cette différence doit être monotone pour t suffisamment grands, ce qui n'est possible que dans le cas où elle est constante.

La fonction $f(t, x, u)$, comme uniformément presque-périodique par rapport à la variable t , est bornée dans l'ensemble $|x| \leq M$, $|u| \leq M$, $-\infty < t < +\infty$. Il en résulte que la dérivée seconde $\varphi''(t)$ de la solution minimale est bornée dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. D'après le théorème bien connu de Bochner il en vient que la dérivée première $\varphi'(t)$ est presque-périodique. Enfin, de la relation

$$\varphi''(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t))$$

et de l'hypothèse C on conclut facilement que la fonction $\varphi''(t)$ est aussi presque-périodique.

Pour achever la démonstration du théorème III il reste de montrer que dans l'hypothèse que la fonction $f(t, x, u)$ est croissante au sens strict par rapport à x , l'équation (12) ne peut admettre qu'une seule solution bornée dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

Introduisons à cet effet une nouvelle variable $y = x - \varphi(t)$, ce qui nous permet de remplacer l'équation (12) par l'équation suivante

$$(15) \quad y'' = F(t, y, y'),$$

où nous avons posé

$$F(t, y, u) = f(t, y + \varphi(t), u + \varphi'(t)) - \varphi''(t).$$

La fonction $F(t, y, u)$ ainsi définie jouit des mêmes propriétés que la fonction $f(t, x, u)$. En particulier, elle est croissante au sens strict par

rapport à la variable y et presque-périodique par rapport à la variable t . De plus

$$(16) \quad F(t, 0, 0) \equiv 0.$$

Nous allons démontrer que l'équation (15) admet une et une seule solution bornée dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, à savoir $y(t) \equiv 0$. Pour la démonstration par l'absurde supposons qu'il n'en soit pas ainsi et désignons par $z(t)$ une autre solution bornée de l'équation (15). D'après le lemme I de la note [6] on doit avoir ou bien $\lim_{t \rightarrow -\infty} z(t) \neq 0$, ou bien $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) \neq 0$. Pour fixer les idées supposons que l'on ait

$$(17) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = c \neq 0.$$

Choisissons une suite de nombres $\{\tau_n\}$ de telle sorte que l'on ait $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = +\infty$ et que τ_n soit une presque-période de la fonction $F(t, y, u)$, relative à $1/n$. La suite de fonctions $\{F(t + \tau_n, y, u)\}$ converge vers la fonction $F(t, y, u)$. Par conséquent, de la suite $\{z(t + \tau_n)\}$ on peut extraire une suite partielle qui converge vers une solution de l'équation (15). De la relation (17) il résulte que cette solution devrait être identique à la constante c . On aurait par suite

$$F(t, c, 0) \equiv 0$$

ce qui est incompatible avec l'identité (16), puisque la fonction $F(t, y, u)$ est croissante au sens strict par rapport à la variable y .

13. De même qu'au n° 7 on peut démontrer que quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que toute presque-période de la fonction $f(t, x, u)$, relative à δ , est une presque-période de la solution minimale (et, par suite, de toute autre solution presque-périodique de l'équation (12)) de l'équation (12), relative à ε .

Enfin, des raisonnements des nos 9 et 12 il résulte que toute solution de l'équation (12), bornée dans un intervalle $(t_0, +\infty)$ (ou bien $(-\infty, t_0)$) est une fonction asymptotiquement presque-périodique au sens de Fréchet.

Travaux cités

- [1] C. Corduneanu, *Soluții aproape periodice ale ecuațiilor diferențiale neliniare de ordinul al doilea*, Comun. Acad. Rep. Pop. Rom. V, Nr 5 (1955), p. 793-797.
 [2] Б. П. Демидович, *Об одном случае почти периодичности решения обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка*, Успехи мат. наук, VIII, 6 (58) 1953, p. 103-106.

[3] J. Favard, *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients presque-périodiques*, Acta Mathematica 51 (1928), p. 31-81.

[4] M. Fréchet, *Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques continues*, C. R. Acad. Sc. Paris 213 (1941), p. 520-522.

[5] N. Gheorghiu, *Soluții aproape periodice și asimptotic aproape periodice ale unor ecuații diferențiale neliniare de ordinul I*, An. St. Univ. Iași, Sect. I, t. I (1955), p. 17-20.

[6] Z. Opial, *Sur l'existence des solutions périodiques de l'équation différentielle du second ordre*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série des Sci. Math., Astr. et Phys. 7 (1959), p. 71-75.

Reçu par la Rédaction le 15. 4. 1958