C O M P T E S   R E N D U S

SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

Le compte rendu complet des communications faites aux Sections de la Société est publié par le périodique „Prace Matematyczne" (en polonais). Ici, nous ne publions dorénavant que des résumés de communications parvenus de leurs auteurs et dont les résultats ne seront pas publiés prochainement dans une autre forme

SECTION DE GLIWICE

26. X. 1957. C. Ginalski et A. Kapcia (Częstochowa), *Sur quelques équations intégrables par différentiation.*

Les généralisations suivantes de l'équation $y = xy' + f(y')$ de Clairaut:

$$y = \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} y' + s\varphi^{a}(x) f\left(\frac{y'}{\varphi'(x)}\right), \tag{1}$$

$$y = \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} y' + \big(m\varphi(x) + n\big) f\left(\frac{y'}{\varphi'(x)}\right), \tag{2}$$

$$y = \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} y' + \left(p + \varepsilon\sqrt{q\varphi(x) + r}\right) f\left(\frac{y'}{\varphi'(x)}\right), \tag{3}$$

où s, m, n, p, q, r, α et ε sont des constantes et les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont de classe C^1, se laissent réduire par différentiation à des équations de formes connues, à savoir: (1) à celle de Bernoulli par rapport à la fonction $\varphi(x)$, (2) à l'équation linéaire par rapport à la même fonction et (3) à l'équation de Riccati par rapport à la fonction $p + \varepsilon\sqrt{q\varphi(x) + r}$.

Par conséquent, les équations (1) et (2) sont résolubles effectivement et l'équation (3) l'est lorsque l'intégrale de l'équation correspondante de Riccati est connue.

9. XI. 1957. S. Gołąb et M. Kucharzewski (Cracovie), *Sur quelques propriétés invariantes d'affineurs.*

Le type d'un objet géométrique, de même que ses propriétés, dépend du groupe des transformations des coordonnées par rapport auquel on considère cet objet.

La somme d'un vecteur covariant et contravariant n'est pas un objet géométrique par rapport au groupe général des transformations affines. On peut donc poser la question, quel est le groupe de transformations par rapport auquel cette somme peut être considérée comme étant un objet géométrique. La réponse est qu'il en est ainsi seulement par rapport au groupe des transformations orthogonales. La symétrie d'un affineur covariant ou contravariant est une propriété invariante par rapport au groupe général des transformations affines, tandis que la symétrie d'un affineur mixte a^{λ}_{μ} n'est pas invariante par rapport à ce groupe et ne devient invariante que par rapport à celui des similitudes.

11. I. 1958. C. Ginalski (Częstochowa), *L'intégrale singulière de l'équation de Clairaut généralisée.*

En résolvant dans un domaine de points (x, y, y') l'équation

$$y = \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}y' + f\left(\frac{y'}{\varphi'(x)}\right) \tag{1}$$

comme celle de Clairaut, on conclut que les fonctions suivantes en sont des intégrales dans un domaine de points (x, y):

$$y = c\varphi(x) + f(c), \tag{K}$$

où c appartient à un intervalle I et

$$\begin{cases} \varphi(x) = -f'(t), \\ y = -tf'(t) + f(t), \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \beta(t) \quad \text{où } t \in I_0 \subset I. \end{cases} \tag{S}$$

En substituant à x et y dans l'équation (K) leurs valeurs des équations (S), il vient

$$f(t) - f(c) = (t-c)f'(t). \tag{T}$$

Admettons que la fonction $\alpha(t)$ est de multiplicité constante k pour $t \in I_0$, que la fonction $\varphi(x)$ est de classe C^1 sans être constante et que la fonction $f(x)$ est de classe C^2 sans être linéaire. Désignons par R la famille des courbes (K), par γ la puissance de l'ensemble $\underset{c}{\mathrm{E}}\{T, c \in I\}$ et par τ celle de l'ensemble $\underset{t}{\mathrm{E}}\{T, t \in I_0\}$. On a alors les théorèmes suivants:

1. *Par tout point de la courbe S passent γ courbes de la famille R.*

2. *Pour tout point $p \in S$, il existe une courbe $K \in R$ tangente à S en p, à savoir la courbe $K(c = t)$.*

3. *Toute courbe $K(c) \in R$ passe par $k\tau$ points de la courbe S.*

4. *Aucun arc de la courbe S n'est identique à aucun arc d'une courbe quelconque $K \in R$ (car l'ensemble $\underset{t}{\mathrm{E}}\{T\}$ est non-dense).*

22. II. 1958. C. Kluczny, *Unicité du système d'équations différentielles ordinaires dans un ensemble de points.*

Les solutions du système d'équations

$$Y' = F(x, Y) \quad \text{où} \quad Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{1}$$

sont dites *uniques* (uniques à droite, uniques à gauche) dans un ensemble de points G lorsque deux solutions (demi-intégrales droites, demi-intégrales gauches) de ce système contenues dans G et ayant un point commun (issues d'un même point) coïncident dans la partie commune de leurs domaines.

Dans le cas d'une seule équation

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

on a le théorème suivant:

Lorsque la fonction $f(x, y)$ est continue dans un ensemble $G \subset \bar{R}$ où $R = \{(x, y)\colon\ a < x < b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$ et qu'il existe une fonction $g(x, z)$ continue dans l'ensemble $S = \{(x, y)\colon a < x < b,\ 0 \leqslant z \leqslant d-c\}$ et telle que $g(x, 0) = 0$ pour $a < x < b$ et

$$|f(x_1, y_2) - f(x_1, y_1)| \leqslant g(x_1, |y_2 - y_1|) \quad \textit{dans} \quad G \frown R, \tag{3}$$

sans qu'il existe dans S une solution $z(x)$ de l'équation différentielle

$$z' = g(x, z) \tag{4}$$

ne s'annulant pas identiquement et telle que

$$\lim_{x \to a} \frac{z(x)}{x - x_0} = 0, \tag{5}$$

les solutions de l'équation (2) *sont uniques à droite dans G.*

Un théorème analogue est valable pour l'unicité à gauche et les deux théorèmes suffisent pour étudier l'unicité des solutions de l'équation (2) dans G.

Ces théorèmes entraînent des critères généraux d'unicité dans un ensemble, analogues aux critères connus concernant l'unicité d'une solution passant par un point et desquels ils ne diffèrent que peu par leurs énoncés.

On a des théorèmes analogues pour le système (1).

SECTION DE LUBLIN

7. III. 1958. K. Tatarkiewicz, *Sur l'équation différentielle du second ordre.*

On démontre les théorèmes:

I. *Si a, b et f sont des fonctions continues pour $0 \leqslant t < \infty$, la fonction f est bornée et $b(t) \geqslant B > 0$, il existe au moins une solution bornée de l'équation*

$$\ddot{x} - 2a(t)\dot{x} - b(t)x = f(t). \tag{1}$$

II. *S'il existe des constantes $\mu > 0$ et $B > 0$ telles que*

$$b(t) \geqslant B + \mu|a(t)|, \tag{2}$$

il existe une famille à un paramètre des solutions de l'équation

$$\ddot{x} - 2a(t)\dot{x} - b(t)x = 0 \tag{3}$$

qui tendent exponentiellement vers 0, tandis que les valeurs absolues des autres solutions tendent exponentiellement vers l'infini.

Certaines propriétés asymptotiques des solutions de l'équation (1) se laissent déduire sans l'hypothèse (2), pourvu que $b(t) \geqslant B > 0$.

On peut démontrer à l'aide des exemples que dans le cas où les fonctions a et b sont bornées et

$$a(t) < 0, \tag{4}$$

$$[a(t)]^2 + b(t) < \sigma^2 < 0, \tag{5}$$

l'équation (3) peut avoir des solutions non-bornées. On peut donner des hypothèses supplémentaires limitant de la meilleure manière possible les bornes des fonctions a et b, et entraînant, conjointement à (4) et (5), la convergence vers 0 de toutes les solutions de l'équation (3).

Des théorèmes analogues se présentent dans le cas $a(t) > 0$ lorsque l'hypothèse (5) est satisfaite.

6. V. 1958. M. Zlámal (Brno), *Sur le problème mixte pour l'équation $\varepsilon a(t)u_{tt} + \beta(t)u_t - a(x)u_{xx} = F(x, t)$.*

Il s'agit du problème

$$\begin{gathered} \varepsilon a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta(t)\frac{\partial u}{\partial t} - a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t), \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad u(0, t) = u(l, t) = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

où les fonctions $a(t)$ et $\beta(t)$ sont de classe C^2, la fonction $a(x)$ est de classe C^3, $a(t) > 0$ et $\beta(t) > 0$ pour $t \geqslant 0$, $a(x) > 0$ pour $0 \leqslant x \leqslant l$ et ε est un petit paramètre.

Soit $U(x, t)$ une solution du problème obtenu de (1) par le passage à la limite avec $\varepsilon \to 0$, c'est-à-dire du problème

$$\beta(t)\frac{\partial U}{\partial t} - a(x)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = F(x, t),$$

$$U(x, 0) = f(x), \qquad U(0, t) = U(1, t) = 0.$$

Admettons que

$$f(0) = f(l) = f''(0) = f''(l) = g(0) = g(l) = F(0, t) = F(l, t) = 0, \tag{2}$$

$$f(x) \text{ est de classe } C^5 \text{ et } g(x) \text{ est de clase } C^3, \tag{3}$$

$$\text{les dérivées } F'''_{xxx},\ F'''_{xxt} \text{ et } F''''_{xxtx} \text{ existent et sont continues.} \tag{4}$$

Alors en posant

$$\nu(t) = \int_0^t \frac{\beta(s)}{a(s)}ds \quad \text{et} \quad k(x) = g(x) - U_t(x, 0),$$

on a dans tout intervalle $0 \leqslant t \leqslant T$

$$u(x, t) = U(x, t) + O(\varepsilon),$$

$$u_t(x, t) = U(x, t) + k(x)e^{-\nu(t)/\varepsilon} + O(\varepsilon^{1/4}),$$

$$u_x(x, t) = u_x(x, t) + O(\varepsilon^{3/4}).$$

SECTION DE SZCZECIN

5. V. 1958. J. Meder, *Sommabilité des séries orthogonales par la méthode logarithmique.*

Une série $\sum u_n$ est dite *sommable vers s par la méthode des premières moyennes logarithmiques* — ou *par la méthode* $(R, 1)$ tout court — lorsque

$$\tau_n = \frac{1}{\log n}\left(\frac{s_1}{1} + \frac{s_2}{2} + \ldots + \frac{s_n}{n}\right) \to s$$

avec $n \to \infty$, s_n désignant la n-ième somme partielle:

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

La série $\sum u_n$ est dite *sommable au sens fort vers s par la méthode* $(R, 1)$ lorsque
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|s_k - s|}{k} = o(\log n)$$
avec $n \to \infty$.

Posons $u_n = a_n \varphi_n(x)$ où $0 \leqslant x \leqslant 1$ et considérons la série orthogonale

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

aux coefficients a_n assujettis à la condition

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty. \tag{2}$$

On a les théorèmes:

I. *Si la série* (1) *est sommable presque partout vers $s(x)$ par la méthode* $(R, 1)$, *elle l'est également au sens fort.*

II. *Pour que la série* (1) *soit sommable presque partout vers $s(x)$ par la méthode* $(R, 1)$, *il faut et il suffit que l'on ait*
$$s_{2^{2^n}}(x) \to s(x) \text{ avec } n \to \infty \text{ presque partout}$$
pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.

III. *Si l'on a*
$$\sum_{n=5}^{\infty} a_n^2 (\log\log\log n)^2 < \infty,$$
la série (1) *est sommable presque partout par la méthode* $(R, 1)$.

IV. *Les conditions*

$$0 < v(n) \leqslant v(n+1), \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} v(n) = \infty, \tag{4}$$

$$v(n) = o(\log\log\log n) \tag{5}$$

entraînent l'existence d'une suite $\{b_n\}$ *de nombres réels et d'un système orthonormal* $\{\Psi_n(x)\}$ *tels que l'on a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 v^2(n) < \infty$ *et que la série* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \Psi_n(x)$ *n'est sommable par la méthode* $(R, 1)$ *en aucun point du segment* $0 \leqslant x \leqslant 1$.

V. *On a pour la série* (1)
$$\tau_n(x) = o(\log\log\log n)$$
presque partout lorsque $n \to \infty$.

VI. *Les conditions* (3)-(5) *entraînent l'existence d'une suite* $\{b_n\}$ *de nombres réels et d'un système orthonormal* $\{\Psi_n(x)\}$ *tels que l'on a*
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{v(n)} \left| \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} b_j \Psi_j(x) \right| = 0$$
en tout point du segment $0 \leqslant x \leqslant 1$.

SECTION DE TORUŃ

13. XII. 1957. J. Słomiński, *Sur le théorème de Gödel pour les systèmes avec addition et multiplication propositionnelles infinies.*

Construction algébrique, pour tout nombre ordinal γ, d'une théorie élémentaire P_γ sans quantificateurs et dans laquelle on a (à côté des foncteurs habituels, générateurs des propositions) les sommes et les produits des suites de propositions de longueur inférieure à γ.

Exemple d'un système non-contradictoire dans la logique P_γ, mais n'ayant pas de modèle.

Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un tel système ait un modèle.

13. XII. 1957. J. Łoś, *Une condition suffisante pour qu'un semi-groupe compact avec unité soit un groupe.*

Théorème. *Pour qu'un semi-groupe compact S avec unité soit un groupe, il suffit que S ait un idempotent et que, pour tout couple a, b d'éléments de S, il y existe un couple x, y pour lequel les équations $ax = by$ et $xa = yb$ soient résolubles.*

26. V. 1958. L. Dubikajtis, *Sur les treillis géométriques.*

Théorème. *Si dans un treillis géométrique de dimension n les conditions*
$$\operatorname{mod}(a \frown b) = p \quad \text{et} \quad \operatorname{mod}(a \smile b) = q$$
entraînent, pour un couple d'entiers p, q tel que $0 \leqslant p < q \leqslant n$, l'égalité
$$\operatorname{mod}(a) + \operatorname{mod}(b) = \operatorname{mod}(a \frown b) + \operatorname{mod}(a \smile b),$$
les conditions suivantes:
$$\operatorname{mod}(a \frown b) \geqslant p \quad \text{et} \quad \operatorname{mod}(a \smile b) \leqslant q$$
l'entraînent également.

SECTION DE VARSOVIE

10. I. 1958. A. Białynicki-Birula, *Sur un problème de E. Marczewski.*

On a les théorèmes:

I. *K étant un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et F en étant un sous-corps, $[K:F] < \aleph_0$ entraîne $[K:F] = 2$.*

II. *K étant un prolongement algébrique normal du corps F, il existe un sous-corps F_1 de K tel que $F \subset F_1 \subset K$ et $[K:F_1] \leqslant \aleph_0$.*

14. III. 1958. W. Bogdanowicz, *Sur la méthode de Banach appliquée à la démonstration de l'existence d'une fonction continue n'ayant nulle part de dérivée et étant une convolution de fonctions continues.*

Soit C l'espace des fonctions réelles continues périodiques de période 2π, avec la norme usuelle. La convolution des fonctions $x, y \in C$ est définie par la formule

$$(x \bigcirc y)(t) = \int_0^{2\pi} x(t-\tau) y(\tau) d\tau.$$

Théorème 1. *L'ensemble des couples de fonctions (x, y) dont la convolution n'a nulle part de dérivée est de II catégorie dans le produit cartésien $C \times C$; le complémentaire en est de I catégorie.*

Théorème 2. *L'ensemble des fonctions x telles que la convolution $x \bigcirc x$ n'a nulle part de dérivée est de II catégorie dans l'espace C; son complémentaire y est de I catégorie.*

Soit à présent, pour $i = 1$ et 2, $\omega_i(\delta)$ une fonction continue et croissante aux valeurs positives pour $0 < \delta < \infty$ et telle que la fonction $\delta/\omega_i(\delta)$ est croissante et

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\delta}{\omega_i(\delta)} = 0.$$

En posant

$$\|x\|_i = |x(0)| + \sup_{\delta > 0} \frac{|x(t+\delta) - x(t)|}{\omega_i(\delta)}$$

où $0 \leqslant t < 2\pi$ et $0 \leqslant \delta \leqslant 1$, l'ensemble $E_i = \{x \in C: \|x\|_i < \infty\}$ est un espace de Banach avec la norme $\|x\|_i$. Cet espace contient l'ensemble Λ des fonctions satisfaisant à la condition de Lipschitz.

Soit Λ_i la fermeture de Λ dans l'espace E_i. Elle est donc aussi un espace de Banach avec la norme $\|x\|_i$.

Théorème 1'. *Si*

$$\lim_{\delta \to 0+} \frac{\delta}{\omega_1(\delta)\omega_2(\delta)} = 0,$$

l'ensemble des couples de fonctions $(x, y) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2$ dont la convolution n'a nulle part de dérivée est de II catégorie dans le produit cartésien $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ et son complémentaire y est de I catégorie.

Théorème 2'. *Si*

$$\lim_{\delta \to 0+} \frac{\delta}{\omega_1^2(\delta)} = 0,$$

l'ensemble des fonctions $x \in \Lambda_1$ dont la convolution $x \bigcirc x$ n'a nulle part de dérivée est de II catégorie dans Λ_1 et le complémentaire en est de I catégorie dans cet espace.

Un théorème analogue pour les convolutions définies en remplaçant $\int_0^{2\pi}$ par $\int_{-\infty}^{+\infty}$ ou $\int_0^t$ est vrai dans certaines classes de fonctions continues, correspondant aux classes Λ_i, mais étant des espaces B_0.

8. IV. 1958. S. Gołąb (Cracovie), *Sur la notion de dérivée de Lie.*

Une nouvelle méthode de définition de l'ainsi dite *dérivée de Lie* d'un champ d'objets géométriques G par rapport à un champ vectoriel donné V.

25. IV. 1958. A. Pełczyński et Z. Semadeni (Poznań), *L'espace des fonctions continues sur un ensemble clairsemé.*

Soient Q un espace de Hausdorff bicompact et $C(Q)$ l'espace de Banach composé de toutes les fonctions réelles continues, définies dans Q.

Théorème. *Les propriétés suivantes de Q sont équivalentes:*

1. *Q est clairsemé, c'est-à-dire ne contient aucun ensemble dense en soi,*
2. *toute mesure définie dans Q est purement atomique,*
3. *aucun sous-espace de $C(Q)$ n'est isomorphe avec l'espace l de toutes les séries absolument convergentes de nombres réels,*
4. *tout sous-espace de $C(Q)$ de dimension infinie contient un sous-espace isomorphe à l'espace c de toutes les suites convergentes de nombres réels.*

Corollaire. *Si les espaces Q_1 et Q_2 sont clairsemés, l'isométrie entre les espaces conjugués de $C(Q_1)$ et $C(Q_2)$ équivaut à l'égalité des puissances entre Q_1 et Q_2.*

Cette égalité n'entraîne cependant pas l'isomorphie entre les espaces $C(Q_1)$ et $C(Q_2)$ eux-mêmes. Par exemples, $[\alpha]$ désignant d'une façon générale l'espace que constitue le segment des nombres ordinaux $\xi \leqslant \alpha$

avec la topologie ordinale, les espaces $C([\omega]) = c$ et $C([\omega^\omega])$ ne sont pas isomorphes. Cet exemple donne réponse à la question de Banach, si deux espaces du type B qui ne sont pas isomorphes peuvent avoir les espaces conjugués qui le sont.

2. V. 1958. T. Ganea (Bucarest), *Sur la répartition des points stables dans les espaces topologiques.*

L'ensemble des points stables au sens de Borsuk et Jaworowski [1] est dense dans tout espace de Hausdorff de dimension finie. Un espace de Hausdorff de dimension infinie peut être dépourvu de points stables.

30. V. 1958. J. de Groot (Amsterdam), *Sur les rapports entre topologie générale et algèbre.*

THÉORÈME. *Quel que soit le groupe G, il existe un anneau commutatif avec unité dont le groupe des automorphies est isomorphe à G.*

On ignore si un théorème analogue subsiste pour les corps, en particulier s'il existe un corps dont le groupe des automorphies est isomorphe à un groupe cyclique infini.

SECTION DE WROCŁAW

4. X. 1957. S. Świerczkowski, *Solution d'un problème de Zahorski* [2].

Étant donné un point P dans une sphère de centre O et le sommet d'un trièdre mobile demeurant dans P, l'aire de l'intersection de ce trièdre et de la surface sphérique peut ne pas être maximum lorsque la droite PO forme un même angle a avec toutes les arêtes du trièdre. Exemple: trièdres aux angles suffisamment petits entre les arêtes, pour un a donné.

8. XI. 1957. S. Świerczkowski, *Un théorème sur l'ordination des familles d'ensembles.*

Démonstration du théorème suivant qui confirme une hypothèse de S. Hartman et Jan Mycielski: *étant donné une famille de puissance ne dépassant pas $\aleph_\xi$ d'ensembles de puissance inférieure à $\aleph_\xi$, tous ces ensembles peuvent être rangés en une suite $\{E_\mu\}$ de type $a \leqslant \omega_\xi$ et telle que $\beta < a$ entraîne $\overline{\overline{\bigcup_{\mu\leqslant\beta} E_\mu}} < \aleph_\xi$.*

La démonstration de ce théorème a été publiée par J. Mycielski [3].

(1) K. Borsuk and J. W. Jaworowski, *On labil and stabil points*, Fundamenta Mathematicae 39 (1952), p. 159-175.

(2) Z. Zahorski, *Problème 228*, Nouveau Livre Écossais, 30. V. 1953 (non publié).

(3) J. Mycielski, *About sets invariant with respect to denumerable changes*, Fundamenta Mathematicae 45 (1958), p. 292-305, en particulier p. 301.

15. XI. 1957. S. Świerczkowski, *Une remarque concernant les translations des ensembles ouverts bornés sur un réseau quadratique.*

Une démonstration facile que, un réseau quadratique et un ensemble ouvert borné étant donnés, on peut toujours modifier par translation le nombre des sommets de ce réseau couvert par cet ensemble.

16. V. 1958. J. Mioduszewski, *Sur les fonctions de multiplicité constante.*

La multiplicité d'une fonction continue $f: X \to Y = f(X)$ dans un point $y \in Y$ est par définition la puissance k de l'ensemble $f^{-1}(y) \subset X$.

Si l'on a $k = 2$ pour tous les $y \in Y$, la fonction $\varphi: X \to X$ faisant correspondre à tout $x \in X$ l'autre élément du couple $f^{-1}f(x)$ est une involution sans points invariants et l'ensemble de ses points de continuité est ouvert et dense dans X. On a les théorèmes suivants lorsque Y est un espace T_2:

I. *Aucun point de discontinuité essentielle (c'est-à-dire impossible à lever en assignant à la fonction une autre valeur en ce point) de l'involution φ n'a dans X localement compact un entourage homéomorphe à la sphère euclidienne (massive) de dimension $n \geqslant 1$.*

II. *Il existe sur le plan des continus étant des frontières communes à deux régions (mais n'étant pas des courbes de Jordan) et sur lesquels on peut définir des fonctions de multiplicité constante $k = 2$.*

III. *De telles fonctions n'existent pas sur l'intervalle borné ouvert de la droite, mais il en existe sur le cube euclidien ouvert de toute dimension $n \geqslant 2$.*

IV. *Toute fonction de multiplicité constante $k > 2$, définie sur un segment rectiligne (fermé) a une infinité de composantes de continuité (c'est-à-dire d'intervalles saturés sur lesquels la fonction-ensemble $\Phi(x) = f^{-1}f(x)$ est continue).*

DEUXIÈME CONFÉRENCE DES FONCTIONS ANALYTIQUES LUBLIN, 2-6. IX. 1958 (*)

2. IX. 1958. M. Marden (Milwaukee, Wisc.), *The location of the zeros of infrapolynomials.*

2. IX. 1958. M. Biernacki (Lublin), *Sur les zéros des polynomes trigonométriques.*

J'ai établi les théorèmes suivants:

I. *Le polynome* $a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \ldots + a_n z^n$ *où* $ka_k \geqslant (k+1)a_{k+1} \geqslant \ldots$

(*) Première Conférence des Fonctions Analytiques avait lieu à Łódź, 21-23. X. 1954.

$\ldots \geqslant na_n > 0$ est k-valent dans le cercle $|z| < 1$. Ce polynome est étoilé dans les cercles $|z| < \frac{1}{2}\sqrt{2}$ et $|z| < \sqrt{k}/(\sqrt{k}+1)$.

II. *Si la fonction $a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ dont les coefficients a_i sont réels est holomorphe et presque convexe dans le cercle $|z| \leqslant R$, alors l'expression*

$$a_1 R \sin\Theta + \ldots + a_n R^n \sin n\Theta + \ldots$$

ne s'annule dans l'intervalle $0 \leqslant \Theta < 2\pi$ que pour $\Theta = 0$ et $\Theta = \pi$.

(La fonction $f(z) = a_1 z + \ldots$ s'appelle *presque convexe*, si $f'(z) = \varphi'(z) g(z)$ où $\varphi(z)$ est convexe et la partie réelle de $g(z)$ est positive (¹)).

Le théorème II résulte aussi aisément des résultats de Kaplan (¹).

Le théorème II contient comme cas particulier la proposition de Fejér-Dunham-Jackson (²):

Le polynome

$$\sin\Theta + \frac{\sin 2\Theta}{2} + \ldots + \frac{\sin n\Theta}{n}$$

est positif pour $0 < \Theta < \pi$.

Le théorème II contient aussi la proposition suivante qui paraît nouvelle:

Les a_i et Θ étant réelles si l'on a pour tout Θ

$$a_1 + 2a_2 \cos 2\Theta + \ldots + na_n \cos n\Theta + \ldots \neq 0,$$

alors $a_1 \sin\Theta + a_2 \sin 2\Theta + \ldots + a_n \sin n\Theta + \ldots$ ne s'annule dans l'intervalle $0 \leqslant \Theta < 2\pi$ que pour $\Theta = 0$ et $\Theta = \pi$.

Les démonstrations seront publiées dans les Annales de l'Université de M. Curie-Skłodowska.

2. IX. 1958. W. Jankowski (Poznań), *Sur la situation des zéros d'un polynôme contenant des paramètres arbitraires.*

Le polynôme

$$(z+P)^p + az^q + bz^{q+1} \qquad (p < q) \tag{1}$$

a p zéros au moins dans le cercle

$$|z| \leqslant R = \frac{q(q-p+1) + \sqrt{pq(q-p+1)}}{(q-p)(q-p+1)} |P|,$$

(¹) Cf. W. Kaplan, *Close-to-convex schlicht functions*, The Michigan Mathematical Journal 1 (1952), p. 169-185.

(²) Cf. P. Turán, *On a trigonometric sum*, Annales de la Société Polonaise des Mathématiques 25 (1952), p. 154-161.

et cette limite supérieure est atteinte pour le polynôme

$$(z+P)^p + a_0 z^q + b_0 z^{q+1},$$

où

$$a_0 = \left(\frac{q-p}{P}\right)^{q-p} (p-q-1)^{q-p+1} \times$$
$$\times \frac{\left[p + \sqrt{pq(q-p+1)}\right]\left[p(q-p+1) + \sqrt{pq(q-p+1)}\right]^{p-1}}{\left[q(q-p+1) + \sqrt{pq(q-p+1)}\right]^q},$$

$$b_0 = \left(\frac{p-q-1}{P}\right)^{q-p+1} (q-p)^{q-p} \times$$
$$\times \frac{\sqrt{pq(q-p+1)}\left[p(q-p+1) + \sqrt{pq(q-p+1)}\right]^{p-1}}{\left[q(q-p+1) + \sqrt{pq(q-p+1)}\right]^{q+1}}.$$

Le nombre R est déterminé de la sorte que, lorsque $z = Re^{i\theta}/|P|$ décrit la circonférence $C(|z| = R/|P|)$ dans le sens positif et

$$\left|\frac{a}{b}\right| \geqslant \frac{q(q-p+1) + p + 2\sqrt{pq(q-p+1)}}{(q-p)^2}$$

l'argument de l'expression $f(z) = (z+1)^p / z^q(-a-bz)$ diminue d'une façon monotone. En désignant par Γ l'image de la circonférence C dans la transformation réalisée par la fonction $f(z)$ nous trouvons que, pour $|a/b| \geqslant R/|P|$ on a $\operatorname{ind}_\Gamma(1) \geqslant p-q$ et

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_c[(z+1)^p + az^q + bz^{q+1}] \geqslant p.$$

Si $|a/b| < R/|P|$ on a $\operatorname{ind}_\Gamma(1) \geqslant p-q-1$ et

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_c[(z+1)^p + az^q + bz^{q+1}] \geqslant p.$$

Ainsi le polynôme

$$(z+1)^p + az^q + bz^{q+1} \tag{2}$$

a p zéros au moins dans le cercle $|z| \leqslant R/|P|$. Si le polynôme (2) a p zéros au moins dans le cercle $|z| \leqslant R/|P|$, le polynôme (1) a p zéros au moins dans le cercle $|z| \leqslant R$.

2\. IX. 1958. S. Bergman (Stanford, Cal.), *Sur les problèmes aux limites dans le cas des domaines dont les surfaces frontières atteignent un maximum.*

2\. IX. 1958. W. Janowski (Łódź), *Sur les valeurs extrémales du module de la dérivée des fonctions univalentes bornées* (voir Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences mathématiques, astronomiques et physiques 6 (1958), No 4, p. 255-259).

2\. IX. 1958. I. Dziubiński (Łódź), *Über Extremalfunktionen in der Familie der beschränkten schlichten Funktionen mit reellen Koeffizienten* (à paraître dans le Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Łódź, Classe III).

Es sei T eine beliebige Zahl des Intervalls $(0,1)$. Ich betrachte die Familie F_T von schlichten Funktionen, die folgende Entwicklung für $|z|<1$ haben:

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

wo $|f(z)|<1$ für $|z|<1$ und $a_1 \geqslant T$ ist.

Z. Charzyński hat bewiesen, daß die Extremalfunktionen dieser Familie eine Differential-Funktional-Gleichung erfüllen ([3]).

Ich betrachte eine Teilklasse der Familie F_T, wo alle Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots$ reel sind. Ich bezeichne diese Teilfamilie mit R_T.

Nehmen wir an, daß jeder Funktion $g(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$, $|z|<1$, $g(z) \in R_T$, eine reelle Zahl

$$H_g = H(X_2, \ldots, X_N) \tag{1}$$

entspricht, wo $b_k/b_1 = X_k$ für $k = 1, 2, \ldots$ und

$$H(X_2, \ldots, X_N) \qquad (N \geqslant 2) \tag{2}$$

eine Funktion der $N-1$ reellen Veränderlichen ist, welche in einem genügend großen Bereich definiert ist und welche dort stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat, die nirgends gleichzeitig verschwinden.

Satz. *In der Familie R_T existieren Extremalfunktionen $g^*(z)$, für welche das Funktional* (2) *den größten Wert erreicht. Jede Extremalfunktion erfüllt die Gleichung*

$$\left[\frac{g^{*\prime}(z)}{g^*(z)}\right]^2 \mathfrak{U}[g^*(z)] = \frac{1}{z^2}\mathfrak{V}(z), \qquad 0 < |z| < 1,$$

([3]) Z. Charzyński, *Sur les fonctions univalentes bornées*, Rozprawy Matematyczne 2, Warszawa 1953.

wo

$$\mathfrak{U}(w) = \left[\sum_{p=2}^{N} D_{p-1}^*\left(w^{p-1} + \frac{1}{w^{p-1}}\right)\right] - 2\mathfrak{P}^*,$$

$$\mathfrak{V}(z) = \left[\sum_{p=2}^{N} E_{p-1}^*\left(z^{p-1} + \frac{1}{z^{p-1}}\right)\right] - 2\mathfrak{P}^*,$$

$$g^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^* z^n,$$

$$[g^*(z)]^p = \sum_{n=p}^{\infty} b_n^{*p} z^n \qquad (p = 2, 3, \ldots),$$

$$B_n^* = b_n^*/b_1; \quad B_n^* = X_n^* \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

$$H_n^* = H'_{X_n}(X_2^*, \ldots, X_N^*) \qquad (n = 2, \ldots, N),$$

$$D_{p-1}^* = 2\sum_{n=p}^{N} b_n^{*p} H_n^* \qquad (p = 2, \ldots, N),$$

$$E_0^* = \sum_{n=2}^{N} (n-1) b_n^* H_n^*,$$

$$E_{p-1}^* = 2\sum_{n=2}^{N} (n-p+1) b_{n-p+1}^* H_n^* \qquad (p = 2, \ldots, N),$$

$$\mathfrak{P}^* = \min_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi}\left\{\sum_{p=2}^{N} D_{p-1}^* \cos(p-1)x\right\}.$$

Die Funktionen $\mathfrak{U}(w)$ und $\mathfrak{V}(z)$ nehmen für $|w|=1$ und $|z|=1$ nur reelle, nicht negative Werte an und alle haben (auf entsprechenden Kreisscheiben) wenigstens eine doppelte Wurzel.

Der Koeffizient b_1^* der Entwicklung jeder Extremalfunktion ist gleich T.

Den Beweis dieses Satzes erhalte ich durch eine passende Konstruktion symmetrischer Variationsfolgen und durch Ausnutzung der Resultate von Z. Charzyński.

2\. IX. 1958. Z. Jakubowski (Łódź), *Le maximum d'une fonctionnelle dans la famille des fonctions univalentes bornées.*

Considérons les fonctions holomorphes et univalentes dans le cercle $|z|<1$ de la forme

$$f(z) = z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots \tag{1}$$

Soit $M > 1$ un nombre positif quelconque, F_M — la famille de toutes les fonctions bornées de la forme (1) assujetties à la condition $|f(z)| < M$ et F_∞ — la famille de toutes les fonctions de la forme (1).

Je démontre les théorèmes suivants:

THÉORÈME 1. *Pour les fonctions de la famille F_M et pour $0 \leqslant \alpha < 1$ on a l'inégalité*

$$|A_3 - \alpha A_2^2| \leqslant \begin{cases} 1-1/M^2 & \textit{pour} \quad M \leqslant e^{1/(1-\alpha)}, \\ 2\beta^2+1+\dfrac{1}{M^2}-4\beta\dfrac{1}{M} & \textit{pour} \quad M \geqslant e^{1/(1-\alpha)}, \end{cases} \tag{2}$$

où le nombre β est la plus grande des deux racines de l'équation

$$\beta\log\beta + \frac{\alpha}{1-\alpha}\beta = -\frac{1}{M}.$$

La limite (2) *est atteinte.*

THÉORÈME 2. *Pour les fonctions de la famille F_∞ et pour $0 \leqslant \alpha < 1$ on a l'inégalité*

$$|A_3 - \alpha A_2^2| \leqslant 2e^{-2\alpha/(1-\alpha)}+1$$

et cette limite est atteinte.

Le résultat obtenu pour les fonctions de la famille F_∞ coïncide avec celui de Fekete et Szegö [4] obtenu par d'autres procédés.

2. IX. 1958. Z. Jakubowski (Łódź), *Sur le maximum du coefficient A_4 des fonctions univalentes bornées.*

Je considère la famille $R_M \subset F_M$ des fonctions, dont les coefficients du développement taylorien sont réels. Dans la famille R_M il existe des fonctions $f^*(z)$ pour lesquelles la fonctionnelle H_f définie et différentiable dans R_M atteint la valeur la plus grande. Chacune de ces fonctions vérifie une certaine équation [5]. En particulier, pour la fonctionnelle $H_f = A_4$ cette équation est de la forme suivante:

$$\left[\frac{f^{*\prime}(z)}{f^*(z)}\right]^2 \mathfrak{M}\left[\frac{1}{M}f^*(z)\right] = \frac{1}{z^2}\mathfrak{N}(z), \qquad 0 < |z| < 1, \tag{1}$$

où

$$\mathfrak{M}\left[\frac{w}{M}\right] = \frac{2}{Mw^3}\left[\left(\frac{w^6}{M^6}\right) + 3A_2^*\frac{w^5}{M^4} + \right.$$
$$\left. + (2A_3^*+A_2^{*2})\frac{w^4}{M^2} - \mathfrak{P}^*Mw^3 + (2A_3^*+A_2^{*2})w^2 + 3A_2^*w + 1\right],$$

$$\mathfrak{N}(z) = \frac{2}{Mz^3}[z^6+2A_2^*z^5+3A_3^*z^4+(3A_4^*-\mathfrak{P}^*M)z^3+3A_3^*z^2+2A_2^*z+1],$$

$$\mathfrak{P}^* = 2M^2 \min_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}[(2A_3^*+A_2^{*2})\cos x + 3A_2^*M\cos 2x + M^2\cos 3x],$$

et

$$f^*(z) = z + A_2^*z^2 + A_3^*z^3 + A_4^*z^4 + \ldots$$

En m'appuyant sur cette équation j'obtiens quelques résultats concernant le coefficient A_4^* de la fonction extrémale $f^*(z)$.

La discussion détaillée de l'équation (1) et les théorèmes concernant le coefficient A_4^*, qui résultent de cette discussion seront publiés dans le Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Łódź, Classe III.

2. IX. 1958. P. Wiatrowski (Łódź), *Sur les valeurs extrémales du module de la derivée logarithmique des fonctions univalentes bornées* (à paraître dans le Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Łódź, Classe III).

Soit F_∞ la famille de toutes les fonctions $f(z)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1° $f(z)$ est holomorphe et univalente dans le cercle $|z| < 1$,

2° $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, alors $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} A_k z^k$.

Nous désignons par F_M la famille des fonctions appartenant à F_∞ et qui vérifient la condition $|f(z)| < M$, où M est un nombre fixe supérieur à 1.

Posons

$$h(|z|) = \left(\frac{1-|z|}{\sqrt{2|z|}}\right)^2, \qquad M_0(|z|) = \frac{2-h(|z|)}{h^2(|z|)},$$

$$M_1(|z|) = \max_{0<|z|<1}(1, M_0(|z|)), \qquad M_2(|z|) = \left(\frac{|z|}{2-\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} \qquad (0 < |z| < 1)$$

et soit $\tau_1(|z|) < 1$ la solution de l'équation

$$\frac{(\tau_1+1)^2}{2\tau_1} = \frac{h(|z|)+2}{h(|z|)}.$$

([4]) M. Fekete and G. Szegö, *Eine Bemerkung über ungerade schlichte Funktionen*, Journal of the London Mathematical Society 8 (1933), p. 85-89.

([5]) Cf. I. Dziubiński, *Über Extremalfunktionen in der Familie der beschränkten schlichten Funktionen mit reellen Koeffizienten*, Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Łódź, Classe III, à paraître.

Soient en outre E, E_1, E_2, E_3 les domaines du plan $(|z|, M)$ définis comme il suit:

$$E = \{0 < |z| < 1, M > 1\}, \qquad E_1 = E_{11}+E_{12},$$

où

$$E_{11} = \{0 < |z| < 2-\sqrt{3},\ M > 1\},$$

$$E_{12} = \{2-\sqrt{3} \leqslant |z| < 1,\ M > M_1(|z|)\},$$

$$E_2 = \{2-\sqrt{3} \leqslant |z| < 1,\ M_2(|z|) < M \leqslant M_1(|z|)\},$$

$$E_3 = \{2-\sqrt{3} \leqslant |z| < 1, 1 < M \leqslant M_2(|z|)\}.$$

Je démontre les théorèmes suivants:

THÉORÈME 1. *Pour les fonctions de la famille F_M l'estimation suivante, dont les limites sont atteintes, a lieu*:

$$n(|z|, M) \leqslant \left| z\frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leqslant N(|z|, M),$$

où, pour chaque point $(|z|, M)\in E$,

$$n(|z|, M) = \frac{1+\dfrac{x}{M}}{1-\dfrac{x}{M}} \cdot \frac{1-|z|}{|z|(1+|z|)}$$

et où x $(0 < x < M)$ est la racine de l'équation

$$\frac{\left(\dfrac{x}{M}+1\right)^2}{x} = \frac{(1+|z|)^2}{|z|}.$$

L'expression $N(|z|, M)$ est définie comme il suit:

1° pour chaque point $(|z|, M)\in E_1$

$$N(|z|, M) = \frac{1-y/M}{1+y/M}\,\frac{1+|z|}{|z|(1-|z|)},$$

où y est la racine de l'équation

$$\frac{(y/M-1)^2}{y} = \frac{(|z|-1)^2}{|z|}.$$

Si $(|z|, M)\in E_{11}$ on a $0 < y < M$ et si $(|z|, M)\in E_{12}$ on a $0 < y < M\tau_1(|z|)$.

2° Pour chaque point $(|z|, M)\in E_2$

$$\log N(|z|, M) = \frac{\sqrt{2u/M}}{1+u/M}\log\frac{1+u/M-\sqrt{2u/M}}{1+u/M+\sqrt{2u/M}}\cdot\frac{1}{|z|} + \log\left[\frac{4}{1-|z|^2}\cdot\frac{1-(u/M)^2}{1+(u/M)^2}\right],$$

où $u\big(M\tau_1(|z|) < u < (2-\sqrt{3})M\big)$ est la racine de l'équation

$$\log\frac{1}{8M}\,\frac{(u/M-1)^2[(u/M)^2+1]}{(u/M)^2} + \frac{1+u/M}{\sqrt{2u/M}}\log\frac{\big(1+u/M+\sqrt{2u/M}\big)|z|}{1+u/M-\sqrt{2u/M}} = 0.$$

3° Pour chaque point $(|z|, M)\in E_3$

$$\log N(|z|, M) = \frac{1+(v/M)^2}{2[1-(v/M)^2]}\log\frac{v/M}{|z|} + \log|z|\,\frac{1-(v/M)^2}{v(1-|z|^2)/M},$$

où v $((2-\sqrt{3})M < v < M)$ est la racine de l'équation

$$2\,\frac{1-(v/M)^2}{1+(v/M)^2}\log\frac{|z|}{v/M} - \log M = 0.$$

THÉORÈME 2. *Pour les fonctions de la famille F_∞ l'estimation suivante, dont les limites sont atteintes, a lieu*:

$$\frac{1-|z|}{|z|(1+|z|)} \leqslant \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{1+|z|}{|z|(1-|z|)}.$$

Le résultat obtenu pour les fonctions de la famille F_∞ coïncide avec celui de R. Nevanlinna, obtenu par d'autres procédés [6].

3. IX. 1958. K. Kuratowski (Varsovie), *Cohomotopic multiplication and duality theorems concerning arbitrary subsets of Euclidean space* (voir le Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences mathématiques, astronomiques et physiques, 6 (1958), p. 753-758).

3. IX. 1958. Z. Charzyński (Łódź), *Fonctions univalentes inverses. Polynômes univalents* (voir le Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Łódź, Classe III, 9 (1958), No 7, p. 1-21).

3. IX. 1958. L. Siewierski (Łódź), *Sur les fonctions univalentes algébriques dans le demi-plan* (voir le Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Łódź, Classe III, 7 (1956), No 4, p. 1-17).

---

[6] R. Nevanlinna, *Über die konforme Abbildung von Sterngebieten*, Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar 63A (1921), No 7.

3. IX. 1958. R. Zawadzki (Łódź), *Les équations des fonctions extrémales dans les familles des fonctions univalentes algébriques non bornées* (voir ibidem 8 (1957), No 10, p. 1-21).

3. IX. 1958. J. Śladkowska (Łódź), *Polynômes extrémaux dans la famille des polynômes univalents.*

Je considère la famille R_M, $M \geqslant 2$, de tous les polynômes univalents dans le cercle $|z| < 1$ ayant la forme

$$P(z) = z + A_2 z^2 + \ldots + A_m z^m,$$

et dont les dégrés ne dépassent pas M.

Dans cette famille je détermine la fonctionnelle H_P de la façon suivante: je fais correspondre à chaque polynôme $P(z)$ de cette famille le nombre $H_P = H(X_{2P}, \ldots, X_{NP}, Y_{2P}, \ldots, Y_{NP})$, où l'on suppose que

$$P(z) = z + A_{2P} z^2 + \ldots + A_{mP} z^m, \qquad A_{sP} = X_{sP} + iY_{sP},$$
$$s = 2, \ldots, m,$$

et que

$$H(X_2, \ldots, X_N, Y_2, \ldots, Y_N), \qquad 2 \leqslant N \leqslant M,$$

soit une fonction quelconque de $2N-2$ variables réelles, définie dans une région suffisamment grande, et qui y admet les dérivées partielles du premier ordre continues, ne s'annulant nulle part simultanément.

THÉORÈME. 1° *Il existe dans la famille R_M un polynôme extrémal $P^*(z) = z + A_2^* z^2 + \ldots + A_M^* z^M$, pour lequel la fonctionnelle H_P atteint la valeur maximale.*

2° *Si je désigne par $(e^{i\varphi_k}, e^{i\psi_k})$, $k = 1, \ldots, Q$, toutes les paires distinctes des points distincts de la circonférence $|z| = 1$ pour lesquels a lieu la relation $P^*(e^{i\varphi_k}) = P^*(e^{i\psi_k})$ et si je pose $H_s^* = H'_{X_s}(X_2^*, \ldots, Y_N^*) - iH'_{Y_s}(X_2^*, \ldots, Y_N^*)$, $s = 2, \ldots, M$, où $X_s^* + iY_s^* = A_s^*$, alors les relations suivantes ont lieu:*

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{Q} \nu_k (e^{si\varphi_k} - e^{si\psi_k}) = tH_s^*, \qquad s = 2, \ldots, M,$$

où $t \geqslant 0$ et où ν_k, $k = 1, \ldots, Q$, sont des coefficients complexes; en outre

$$\arg \nu_k = \arg [P^{*\prime}(e^{i\varphi_k}) e^{i\varphi_k}] = \pi + \arg [P^{*\prime}(e^{i\psi_k}) e^{i\psi_k}],$$
$$k = 1, \ldots, Q.$$

Les relations $(*)$ peuvent être écrites d'une façon équivalente sous la forme de l'équation des moments suivante:

$$(**) \qquad X(z) P^{*f}(z) \frac{dz}{z} = 0, \qquad f = 2, \ldots,$$

où

$$(***) \qquad X(z) = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{Q} \nu_k \left[\frac{e^{2i\varphi_k}}{z - e^{i\varphi_k}} - \frac{e^{2i\psi_k}}{z - e^{i\psi_k}} \right]$$

et où C est une circonférence arbitraire $|z| = R$, $R > 1$.

On peut remarquer que le nombre de composants ne s'annulant pas dans les membres gauches des formules $(*)$ resp. $(***)$ ne dépasse pas $M-1$.

3. IX. 1958. J. Zamorski (Wrocław), *Some remarks on the Hummel's equations.*

Let G be a class of functions starlike with respect to the point $z = 0$, having a development of the form

$$f(z) = \frac{1}{z} + b_0 + b_1 z + \ldots, \qquad |z| < 1,$$
$$b_k = x_k + iy_k \quad \text{for} \quad k = 0, 1, \ldots$$

Let the functional $E(f) = E(b_1, \ldots, b_n) = E(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)$ be a real function of the class C_1 for which we have

$$\sum_k \left(\frac{\partial E}{\partial x_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y_k}\right)^2 \neq 0.$$

Then we have the following theorems:

I. *If the functional E attains the extremal value for a function of the class G, then this function satisfies the following system of differential equations:*

$$(1) \qquad \frac{zf'}{f} \left[\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{z^p} \sum_{k=-1}^{n-p} b_k \gamma_{p+k} - \sum_{p=1}^{n+1} z^p \sum_{k=-1}^{n-p} \bar{b}_k \bar{\gamma}_{p+k} \right]$$
$$= \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{z^p} \sum_{k=-1}^{n-p} k b_k \gamma_{p+k} + \sum_{k=1}^{n+1} k \gamma_{k-1} b_k + \sum_{p=1}^{n+1} z^p \sum_{k=-1}^{n-p} k \bar{b}_k \bar{\gamma}_{p+k},$$

$$(2)\qquad \frac{zf'}{f}\Bigg[\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{z^p}\frac{1}{p}\sum_{k=-1}^{n-p}b_k\gamma_{p+k}-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n+1}\Bigg(\frac{a_p}{p}\sum_{k=-1}^{n-p}b_k\gamma_{p+k}+\frac{\bar{a}_p}{p}\sum_{k=-1}^{n-p}\bar{b}_k\bar{\gamma}_{p+k}\Bigg)+$$
$$+\sum_{p=1}^{n+1}z^p\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n-p}\bar{b}_k\bar{\gamma}_{p+k}\Bigg]$$
$$=-\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{z^p}\sum_{k=0}^{n+1-p}\frac{a_k}{p+k}\sum_{l=-1}^{n-p-k}b_l\gamma_{l+p+k}-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n+1}\Bigg(\frac{a_p}{p}\sum_{k=-1}^{n-p}b_k\gamma_{p+k}-\frac{\bar{a}_p}{p}\sum_{k=-1}^{n-p}\bar{b}_k\bar{\gamma}_{p+k}\Bigg)+\sum_{p=1}^{n+1}z^p\sum_{k=0}^{n+1-p}\frac{\bar{a}_p}{p+k}\sum_{l=-1}^{n-p-k}\bar{b}_l\bar{\gamma}_{l+p+k}.$$

II. *The extremal function is of the form*

$$f(z)=\frac{1}{z}\prod_{k=1}^{m}(1-\sigma_k z)^{\beta_k},$$

where $\sum_{k=1}^{m}\beta_k=2,\ \beta_k\geqslant 0,\ |\sigma_k|=1$ *and* $m\leqslant n+1$.

III. *If the extremal function is of the form*

$$f(z)=\frac{1}{z}\prod_{k=1}^{m}(1-\sigma_k z)^{\beta_k},\qquad m<n+1,$$

then, moreover, it satisfies the following system of differential equations:

$$\frac{zf'}{f}\Bigg[\sum_{k=1}^{q}\frac{A_k^{(q)}}{z^k}+\lambda_q+\sum_{k=1}^{q}\bar{A}_k^{(q)}z^k\Bigg]=\sum_{k=1}^{q}\frac{B_n^{(q)}}{z_k}+\mu_q-\sum_{k=1}^{q}B_k^{(q)}z^k,$$
$$q=m,\ldots,n,$$

where the coefficients $A_k^{(q)}$, $B_k^{(q)}$ *depend only on the coefficients of the function* f *and functional* E.

Remark. Theorem II and differential equation (1) have been obtained for the analytical functionals E by Hummel (7).

4. IX. 1958. A. J. Lohwater (Ann Arbor, Mich.), *The exceptional values of meromorphic functions* (voir ce fascicule, p. 89-93).

4. IX. 1958. M. Biernacki (Lublin), *Sur le théorème de Cauchy-Goursat* (à paraître dans le Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences).

(7) See J. Hummel, *A variational method for starlike functions*, Proceedings of the American Mathematical Society 9 (1958), p. 82-87.

J'ai esquissé une démonstration de la proposition suivante:

Si une fonction de la variable complexe possède en tout point d'un domaine une dérivée finie, cette dérivée est continue.

4. IX. 1958. H. Śmiałkówna (Łódź), *Sur certaines conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions holomorphes dans le cercle-unité soient univalentes et bornées* (voir le Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Łódź, Classe III, 8 (1957), No 2, p. 1-7).

4. IX. 1958. T. Świątkowski (Łódź), *Über die Funktionen, die alle ihre Werte unendlich vielmal annehmen.*

Sei B ein beliebiger, fixierter Bereich der w-Ebene. Man betrachte die Klasse $H(B)$ von Funktionen, die im Einheitskreise $|z|<1$ regulär sind und deren Wertevorrat im B enthalten ist. $H(B)$ kann als metrischer Raum betrachtet werden, indem man die Entfernung zweier Funktionen f_1, f_2 in $H(B)$ folgendermaßen definiert:

$$\varrho(f_1,f_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{M_n(f_1-f_2)}{1+M_n(f_1-f_2)},$$

wo

$$M_n(f)=\sup_{|z|=1-1/n}|f(z)|.$$

Ich beweise, daß die Teilklasse von $H(B)$, die aus allen Funktionen besteht, welche jeden ihren Wert unendlich vielmal annehmen, in $H(B)$ residuell ist.

4. IX. 1958. T. Świątkowski (Łódź), *Über schlichte Funktionen deren Potenzreihenentwicklung die Hadamardsche Lückenbedingung erfüllt.*

Ich beweise den folgenden Satz:

Wenn die Reihe

$$(1)\qquad f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}c_n z^{\lambda_n}$$

eine in $|z|<1$ *schlichte Funktion darstellt, und wenn für diese Reihe die Hadamardsche Lückenbedingung* $\lambda_{n+1}-\lambda_n>\Theta\lambda_n$ $(\Theta>\frac{1}{2}$, *von* n *unabhängig,* $\lambda_2\geqslant 2)$ *erfüllt ist, dann gibt es eine von* $f(z)$ *unabhängige Zahl* $N(\Theta)$ *derart, daß*

$$|c_n|\leqslant\lambda_n^{\frac{1-\Theta}{\Theta}}\qquad\text{für}\qquad n>N(\Theta).$$

Daraus ergibt sich unmittelbar, daß für $\Theta>1$

$$1+\sum_{n=2}^{\infty}|c_n|\leqslant M(\Theta)<\infty$$

gilt, d. h. die Reihe (1) konvergiert für $|z| = 1$ gleichmäßig und man hat

$$|f(z)| \leqslant M(\Theta) \quad \text{für} \quad |z| \leqslant 1$$

($M(\Theta)$ ist von $f(z)$ unabhängig).

Man weiß nicht, ob die Reihe (1) auch für $0 < \Theta < 1$ im Einheitskreise $|z| \leqslant 1$ (gleichmäßig) konvergiert.

4. IX. 1958. Б. Боярский (Москва), *Абсолютная непрерывность отображений с ограниченным искажением в n-мерном пространстве.*

Мы рассматриваем непрерывные, сохраняющие ориентацию отображения $Y = f(x)$, $y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$, n-мерной области D пространства E_n удовлетворяющие следующим условиям:

1) функции $f_i(x)$ обладают в D (локально) обобщенными по С. Л. Соболеву частными производными $f_{ik} = \partial f_i / \partial x_k$, принадлежащими L_n,

2) почти всюду в D имеет место неравенство

$$\Big(\sum_{i,k=1}^{n} f_{ik}^2\Big)^{\frac{n}{2}} \leqslant K \cdot \Delta, \tag{1}$$

где Δ якобиян преобразования $Y = f(x)$ и K некоторая постоянная.

Определенный класс отображений обозначим через (OK). Класс (OK) включает в себя класс отображений с ограниченным искажением по М. А. Лаврентьеву [3], класс отображений с ограниченной характеристикой, т. е. отображений переводящих в каждой точке $x_0 \in D$ бесконечно малую сферу в бесконечно малый эллипсоид с соотношением максимальной к минимальной осей не превосходящим постоянной Q, а также более общий класс отображений с ограниченным искажением по А. И. Маркушевичу [4].

Через $|E|$ обозначаем n-мерную лебегову меру множества E; $f(E)$ — образ множества E.

Основной результат сообщения следующий:

Теорема 1. *Для любого отображения класса (OK), $|f(E)| = 0$ тогда и только тогда, когда $|E| = 0$. Множество $f(E)$ и E одновременно измеримы по Лебегу.*

При $n = 2$, как показано в [1, 2], из (1) следует, что $f_{ik} \in L_p$ при некотором $p = 2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, откуда немедленно получается теорема 1 в более сильной формулировке: $|f(E)| \leqslant C|E|^{1/q}$, где C и q постоянные, которые (при соответствующей нормировке) не зависят от f и E. При $n = 2$ теорема 1 установлена также Моррей и Песиным ([5] и [7]. При $n > 2$ не удалось из (1) заключить, что $f_{ik} \in L_{n+\varepsilon}$ при некотором $\varepsilon > 0$. При выводе теоремы 1 мы пользуемся поэтому следующей леммой:

Лемма. *Интегралы*

$$\int_{S_d} \Big(\sum_{i,k} f_{ik}^2\Big)^{n/2} r^{-\alpha} dX \leqslant M < +\infty$$

существуют, при некотором $\alpha > 0$, в каждой точке $x_0 \in D'$. Здесь D' произвольная подобласть области D, $\bar{D}' \subset D$, S_d шар радиуса d с центром в точке $x_0 \in D'$; $d < \varrho/2$ ϱ-расстояние D' от границы области D. Если $|f_i|$ ограничены, то постоянная M не зависит от функции f_i и от $x_0 \in D'$, $r = |x - x_0|$.

Эта лемма является уточнением и обобщением леммы Л. Ниренберга [6] (при $n = 2$); там существование указанных интегралов предполагается и не доказывается. Этот факт при $n = 2$ легко следует из теорем о возможности равномерной аппроксимации (OK)-отображений (OK)-отображениями класса C_1. При $n > 2$ такая возможность далеко не очевидна и пока не доказана.

Отметим некоторые следствия теоремы 1:

1) Δ отличен от нуля почти всюду,

2) однолистные отображеная класса (OK) образуют группу,

3) при отображениях класса (OK) сохраняются обычные формулы замены переменных при интегрировании и дифференцировании,

4) для отображении класса (OK) почти всюду

$$\varlimsup_{\varrho \to 0} \frac{\max\limits_{|x-x_0|=\varrho} |f(x) - f(x_0)|}{\min\limits_{|x-x_0|=\varrho} |f(x) - f(x_0)|} > 0.$$

Подробное изложение и дальнейшие приложения указанных результатов будут напечатаны в журнале „Математический сборник“.

[1] Б. В. Боярский, *Гомеоморфные решения систем Бельтрами,* Доклады Академии Наук СССР 102 (1955), стр. 661-664.

[2] — *О решениях линейной эллиптической системы дифференциальных уравнений на плоскости,* тамже 102 (1955), стр. 871-874.

[3] M. Lavrentieff, *Sur une classe de représentations continues,* Математический Сборник 42 (1935), No 4, стр. 407-424.

[4] А. И. Маркушевич, *О некоторых классах непрерывных отображений,* Доклады Академии Наук СССР 28 (1940), стр. 301-304.

[5] C. B. Morrey, Jr., *On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations,* Transactions of the American Mathematical Society 43 (1938), стр. 126-166.

[6] L. Nirenberg, *On non linear elliptic partial differential equations and Hölder continuity,* Communications on Pure and Applied Mathematics 6 (1953), стр. 103-156.

[7] И. Н. Песин, *Метрические свойства Q-квазиконформых отображений,* Математический Сборник 40 (1956), № 3, стр. 281-294.

5. IX. 1958. F. Leja (Cracovie), *Sur les moyennes des distances mutuelles des points d'un ensemble* (à paraître dans Annales Polonici Mathematici).

Soit E un ensemble compact de points de l'espace R à n dimensions, $\omega(p, q)$ une fonction continue, non-négative et symétrique de deux points p et q de R et $p^{(n)}$ un système de $n+1$ points quelconques $p_0, p_1, \ldots, p_n$ de E. Formons les moyennes

$$(1)\qquad a(p^{(n)}) = \frac{\sum\limits_{i\neq k} \omega(p_i, p_k)}{n(n+1)}, \qquad g(p^{(n)}) = \Big[\prod_{i\neq k} \omega(p_i, p_k)\Big]^{1/n(n+1)}, \qquad h(p^{(n)}) = \frac{n(n+1)}{\sum\limits_{i\neq k} \omega(p_i, p_k)^{-1}},$$

où i et $k = 0, 1, \ldots, n$, et les fonctions du point variable $p \in R$

$$a^{(i)}(p, p^{(n)}) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=0\\(k\neq i)}}^{n} [\omega(p, p_k) - \omega(p_i, p_k)],$$

$$(2)\qquad g^{(i)}(p, p^{(n)}) = \Big[\prod_{\substack{k=0\\(k\neq i)}}^{n} \frac{\omega(p, p_k)}{\omega(p_i, p_k)}\Big]^{1/n},$$

$$h^{(i)}(p, p^{(n)}) = \frac{n}{\sum\limits_{\substack{k=0\\(k\neq i)}}^{n} [\omega(p, p_k)^{-1} - \omega(p_i, p_k)^{-1}]}$$

pour tout $i = 0, 1, \ldots, n$. On démontre que les bornes supérieures $a_n(E)$, $g_n(E)$ et $h_n(E)$ des moyennes (1), lorsque $p^{(n)}$ varie dans E, tendent pour $n \to \infty$ vers des limites finies

$$(3)\qquad a(E), \quad g(E), \quad h(E)$$

dites *écarts arithmétique, géométrique* et *harmonique* de l'ensemble E par rapport à la distance généralisée $\omega(p, q)$.

Posons $a_n(p, E) = \inf\limits_{p^{(n)} \subset E} \max\limits_{(i)} \{a^{(i)}(p, p^{(n)})\}$, et désignons par $g_n(p, E)$ et $h_n(p, E)$ les fonctions analogues de p correspondant aux fonctions (2).

On démontre que, si les écarts (3) ne s'annulent pas, les suites $\{a_n(p, E)\}$, $\{g_n(p, E)\}$ et $\{h_n(p, E)\}$ convergent en tout point p de l'espace R. Les fonctions limites $a(p, E)$, $g(p, E)$ et $h(p, E)$ jouissent de plusieurs propriétés remarquables.

5. IX. 1958. F. Bierski (Cracovie), *Bedingte Kapazität der Summe zweier Mengen.*

Es sei im metrischen Raum R, dessen Punkte wir mit $z, \zeta, \eta, \ldots$ bezeichnen, eine stetige Funktion $\omega(z, \zeta)$ zweier Punkte definiert, die folgende Bedingungen erfüllt: $\omega(z, \zeta) \geqslant 0$, $\omega(z, \zeta) = \omega(\zeta, z)$, $\omega(z, z) = 0$. Es seien in diesem Raume R zwei kompakte, disjunkte und beschränkte Mengen E_1 und E_2 gegeben. Weiter sei α eine beliebige Zahl aus dem offenen Intervall $(0, 1)$ und n eine ganze positive Zahl. Durch n_α bezeichnen wir die ganze Zahl, welche die Ungleichung $n\alpha - 1 < n_\alpha \leqslant n\alpha$ erfüllt.

Wir sagen, daß *das System* $\zeta^{(n)} = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ *von n Punkten die Bedingung* $W(n; \alpha)$ *erfüllt*, wenn n_α Punkte dieses Systems zur Menge E_1 und die übrigen zu E_2 gehören. Für ein beliebiges System $\zeta^{(n)} = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ von n Punkten bezeichnen wir durch $V(\zeta^{(n)})$ das Produkt $\prod\limits_{1\leqslant i<k\leqslant n} \omega(\zeta_i, \zeta_k)$. Es sei nun

$$V_n(\alpha) = \sup V(\zeta^{(n)}),$$

wo das Supremum in bezug auf die die Bedingung $W(n, \alpha)$ erfüllenden Systeme $\zeta^{(n)}$ genommen wird.

I. *Die Folge* $\{V_n(\alpha)^{2/n(n-1)}\}$ *konvergiert nach einem endlichen Grenzwert* $v(\alpha)$.

Wir nennen den Grenzwert $v(\alpha)$ *bedingte Kapazität im Verhältnis* α der Summe der Mengen $E_1 + E_2$ in bezug auf die Funktion $\omega(z, \xi)$. Die bedingte Kapazität im Verhältnis $\alpha = 1/2$ hat als erster Leja [8] eingeführt.

II. *Wenn* $v(\alpha_0) > 0$, *wo* $\alpha_0 \in (0, 1)$, *dann* $v(\alpha) > 0$ *für alle* α *aus dem abgeschlossenen Intervall* $[0, 1]$.

III. *Die Funktion* $v(\alpha)$ *ist stetig*

(a) *im Intervalle* $0 < \alpha < 1$, *wenn* $v(\alpha_0) = 0$,

(b) *im Intervalle* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, *wenn* $v(\alpha_0) > 0$, *wo* α_0 *ein Punkt des Intervalls* $(0, 1)$ *ist.*

---

[8] F. Leja, *Distributions libres et restreintes des points extrémaux dans les ensembles plans*, Annales Polonici Mathematici 3 (1956), S. 147-156.

Wir führen nun folgende Funktionen des Punktes z ein:

$$L_n(z, a) = \inf_{\zeta^{(n)}} \left\{ \max_{(i)} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \frac{\omega(z, \zeta_k)}{\omega(\zeta_i, \zeta_k)} \right\}, \quad C_n(z, a) = \inf_{\zeta^{(n)}} \left\{ \max_{(k)} \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \frac{\omega(z, \zeta_k)}{\omega(\zeta_i, \zeta_k)} \right\},$$

$$R_n(z, a) = \inf_{\zeta^{(n)}} \left\{ \max_{(i)} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \frac{\omega(z, \zeta_k)}{\omega(\zeta_i, \zeta_k)} \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{n} \frac{\omega(z, \zeta_i)}{\omega(\zeta_l, \zeta_i)} \right\},$$

$$S_n(z, a) = \inf_{\zeta^{(n)}} \left\{ \prod_{i=1}^{n} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \frac{\omega(z, \zeta_k)}{\omega(\zeta_i, \omega_k)} \right\};$$

die Infima nimmt man hier in bezug auf diejenigen die Bedingung $W(n, a)$ erfüllenden Systeme $\zeta^{(n)} = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, für welche mit $i \neq k$ stets $\omega(\zeta_i, \zeta_k) > 0$ gilt.

IV. *Wenn* $v(a) > 0$, *dann konvergieren die Folgen* $\{L_n(z, a)^{1/n-1}\}$, $\{C_n(z, a)^{1/n-1}\}$, $\{R_n(z, a)^{1/2(n-1)}\}$, $\{S_n(z, a)^{1/n(n-1)}\}$ *nach endlichen Grenzwerten* $L(z, a)$, $C(z, a)$, $R(z, a)$, $S(z, a)$.

5. IX. 1958. J. Górski (Cracovie), *Solution of a certain boundary value problem by the method of F. Leja* (à paraître dans Annales Polonici Mathematici).

The method of extremal points of F. Leja was used to solve some problems in the theory of harmonic and analytic functions, e. g. the Dirichlet's problem and the problem of conformal mapping. This method will be here applied to obtain the solution of the boundary value problem for the differential equation of a more general type than the Laplace equation, e. g.

$$\Delta u - c^2 u = 0. \tag{1}$$

Let D be a domain in the 3-dimensional Euclidean space containing the point at infinity and let E be the boundary of D. Let $\lambda > 0$ be a real parameter, $f(P)$ a continuous function defined on E and ω_λ a function of two points $P, Q \epsilon E$ defined by the equality

$$\omega_\lambda(P, Q) = \exp\left\{ \lambda[f(P) + f(Q)] - \frac{e^{-cPQ}}{PQ} \right\},$$

where PQ is the distance of points P and Q.

Let $Q^{(n)} = \{Q_0, Q_1, \ldots, Q_n\}$ be a system of $n+1$ arbitrary points of E and $P^{(n)} = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ such a system of $n+1$ points of E that we have, for every $Q^{(n)}$, the inequality

$$\prod_{0\leqslant i<k\leqslant n} \omega_\lambda(Q_i, Q_k) \leqslant \prod_{0\leqslant i<k\leqslant n} \omega_\lambda(P_i, P_k).$$

The system $P^{(n)}$ is called the *n-th extremal system* of points of the the set E.

We suppose that the capacity $d(E)$ of the set E is positive. It can be proved that for every point $P \notin E_\lambda$ (where E_λ is the kernel of the mass distribution defined by extremal points of all systems $P^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$) there exists the limit

$$v_\lambda(P) = \frac{1}{\lambda} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{0}^{n} \frac{e^{-cPP_i}}{PP_i}.$$

The function $v_\lambda(P)$ satisfies outside the set E_λ differential equation (1), is equal to 0 at infinity and

$$v_\lambda(P) = f(P) + \frac{c_\lambda}{\lambda}$$

for $P \epsilon E$ except at a set of capacity 0 contained in E_λ. C_λ denotes a constant equal to the upper bound of the function $v_\lambda - \lambda$ on E_λ.

It is easy to express the function v as a potential of a simple layer of a mass distributed on E. Under some assumptions concerning the boundary of the domain D and the function $f(p)$ it can be proved that there exists such a number λ_0 that we have $E_\lambda = E$ for $0 < \lambda \leqslant \lambda_0$.

The indicated method can be used to solve the first boundary value problem for the equation $u''_{xx}(x, t) = u'_t(x, t)$.

5. IX. 1958. A. Szybiak (Cracovie), *On the variational method in the extremal points theory.*

The object of this report is to point out parallelism between the balayage theory for symmetric kernels and the theory of extremal points investigated by F. Leja and his school. There is a one-to-one correspondence of the main objects and problems in both theories. Some measures obtained by the extremal points approximate the measures known as the swept out mass or the equilibrium distribution, and some functions obtained by the extremal points approximate the corresponding potentials. The established parallelism allows to solve some problems in the theory of the extremal points which had not yet been solved by the pure extremal points method.

5. IX. 1958. J. Siciak (Cracovie), *On the monotoneity of the Leja extremal function* $\Phi^{1/\lambda}(z, E, f_\lambda)$ *with respect to the parameter* λ.

Let E be a bounded closed point set of the positive logarithmic capacity, $g(z)$ and $h(z)$ real functions defined and bounded (continuous or not) on E, and λ an arbitrary positive real number. We put $f_\lambda(z) = g(z) +$

$+\lambda h(z)$. Let $\zeta^{(n)} = \{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$ be an arbitrary system of $n+1$ different points of E. We put

$$(1) \qquad \Phi^{(j)}(z, \zeta^{(n)}, f_\lambda) = \left(\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{z-\zeta_k}{\zeta_j-\zeta_k}\right) e^{nf_\lambda(\zeta_j)}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n;$$

$$(2) \qquad \Phi_n(z, E, f_\lambda) = \inf_{\zeta^{(n)}\subset E} \{\max_{(j)} |\Phi^{(j)}(z, \zeta^{(n)}, f_\lambda)|\}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

It is known [9] that the limit

$$(3) \qquad \Phi(z, E, f_\lambda) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\Phi_n(z, E, f_\lambda)}$$

exists in the whole open plane.

I have presented a simple and quite elementary proof of the inequality

$$(4) \qquad \Phi^{1/\lambda}(z, E, f_\lambda) \leqslant \Phi^{1/\lambda'}(z, E, f_{\lambda'})$$

if $0<\lambda'\leqslant\lambda$ and $g(z)\geqslant 0$.

This inequality is very useful if we want to give the Kellog-Wiener or Perron solution of the Dirichlet problem by the method of extremal points.

5. IX. 1958. B. Szafirski (Cracovie), *Sur certaines suites de points liées à un ensemble d'un espace métrique quelconque et à une fonction génératrice.*

Dans la théorie des points extrémaux développée par M. F. Leja (cf. F. Leja, *Teoria funkcji analitycznych*, Warszawa 1957) il est important du point de vue pratique de savoir construire le n-ième système des points extrémaux d'un ensemble. Dans le cas général ce problème est bien compliqué. C'est pour cette raison que M. F. Leja a introduit la notion des suites extrémales de points.

Soit E un ensemble borné et fermé de points de l'espace métrique X, $\omega(x, y)$ — la fonction génératrice. La limite

$$v(E, \omega) = \lim_{n\to\infty} \Big[\max_{x^{(n)}\in E} \prod_{0\leqslant i<k\leqslant n} \omega(x_i, x_k)\Big]^{2/n(n+1)},$$

où $x^{(n)} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ est le $n+1$-ième système de points extrémaux de E, est dite *écart de l'ensemble E par rapport à la fonction $\omega(x, y)$* et la limite

$$r(E, \omega) = \lim_{n\to\infty} \Big\{\inf_{x^{(n)}\in E} \Big[\max_{x\in E} \prod_{i=0}^{n} \omega(x, x_i)\Big]\Big\}^{1/n}$$

est dite *rayon de Fekete de l'ensemble E par rapport à la fonction génératrice $\omega(x, y)$.*

[9] F. Leja, *Une méthode élémentaire de résolution du problème de Dirichlet dans le plan*, Annales de la Société Polonaise des Mathématiques 23 (1950), p. 230-245.

La suite $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ de points de l'ensemble E définie comme il suit: a_1 est un point quelconque de E, a_2 un point tel qu'on ait $\omega(a_2, a_1) = \max_{x\in E} \omega(x, a_1)$ et en général a_{n+1} est un point de E tel que

$$\prod_{i=1}^{n} \omega(a_{n+1}, a_i) = \max_{x\in E} \prod_{i=1}^{n} \omega(x, a_i), \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

est dite *suite extrémale de points de E par rapport à la fonction $\omega(x, y)$.*

Formons la suite numérique

$$(1) \qquad [A_n(E, \omega, a_1)]^{1/n} = [\omega(a_{n+1}, a_1)\,\omega(a_{n+1}, a_2)\ldots\omega(a_{n+1}, a_n)]^{1/n}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Les termes de cette suite dépendent de E, de ω et du choix du point a_1 dans E. Il se pose la question de savoir à quelles conditions doivent satisfaire l'ensemble E et la fonction $\omega(x, y)$ pour que l'on ait $\lim_{n\to\infty} [A_n(E, \omega, a_1)]^{1/n} = v(E, \omega)$ indépendamment du choix du point a_1.

Le théorème suivant constitue une réponse partielle à cette question:

Pour que la suite (1) *soit convergente vers l'écart $v(E, \omega)$ indépendamment du choix du point a_1, il suffit que l'on ait $r(E, \omega) = v(E, \omega)$.*

Cette condition n'est pas nécessaire. Toutefois il est possible de donner l'exemple d'un ensemble E et d'une fonction génératrice $\omega(x, y)$ qui montre que si $r(E, \omega) \neq v(E, \omega)$, la limite $\lim_{n\to\infty} [A_n(E, \omega, a_1)]^{1/n}$ peut être différente de l'écart $v(E, \omega)$ et peut dépendre du choix du point a_1.

5. IX. 1958. J. Krzyż (Lublin), *Ein Symmetrisierungssatz über den Maximalmodul* (voir J. Krzyż, *A symmetrization result for maximum modulus*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences mathématiques, astronomiques et physiques, 6 (1958), p. 557-559).

Wenn eine offene Menge G und eine Halbgerade Ox in derselben Ebene liegen, dann wird die durch Kreissymmetrisierung von G in bezug auf Ox entstehende Menge G^* folgendermaßen definiert. Wir führen ein Polarkoordinatensystem (R, Φ) mit Ox als Polarachse ein und betrachten die Kreise K_r ($R = r = \text{const}$, $0\leqslant r\leqslant+\infty$). Ist der Durchschnitt $K_r \cap G$ eine leere Menge, dann ist auch $K_r \cap G^*$ leer; ist $K_r\cap G = K_r$, dann ist auch $K_r \cap G^* = K_r$. Ist $K_r\cap G$ weder leer, noch gleich K_r, und ist das lineare Maß von $K_r\cap G$ in bezug auf K_r gleich $rl(r)$, dann ist $K_r \cap G^*$ ein einziger Bogen: $R = r$, $-\frac{1}{2}l(r) < \Phi < \frac{1}{2}l(r)$ (R, Φ sind die Polarkoordinaten).

Wenn eine Funktion $w = f(z)$ mit $f(0) = 0$, $f'(0)>0$, den Einheitskreis $|z|<1$ konform auf das Gebiet G der w-Ebene abbildet, so sind sowohl G, als auch die in bezug auf die positive reelle Achse symmetriesierte Menge G^*, einfach zusammenhängende Gebiete mit mindestens zwei Randpunkten. Es gibt daher eine im Einheitskreise reguläre Funktion $f^*(z)$ mit $f^*(0) = 0$, $f^{*\prime}(0) > 0$, die den Einheitskreis auf G^* konform abbildet. Ich gebe einen einfachen Beweis dafür, daß f^* schneller als f wächst, d. h. daß $M(r, f^*) \geqslant M(r, f)$ für jedes $0 < r < 1$ gilt, wo $M(r, f) = \sup_{0 \leqslant \Theta \leqslant 2\pi} |f(re^{i\Theta})|$. Dieses Resultat stellt offenbar eine Verallgemeinerung der wohlbekannten Ungleichung von Pólya: $|f^{*\prime}(0)| \geqslant |f'(0)|$ dar. Der Satz bleibt gültig auch dann, wenn G eine Riemannsche Fläche ist, die eine Umgebung des Nullpunktes $w = 0$ schlicht bedeckt.

5. IX. 1958. J. Krzyż (Lublin), *Verzerrungssätze für beschränkte p-wertige Funktionen* (voir J. Krzyż, *Distortion theorems for bounded p-valent functions*, Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska 12 (1958), sous presse, et J. Krzyż, *On the derivative of bounded p-valent functions*, ibidem).

Eine im Einheitskreise $|z| < 1$ (= EK) reguläre Funktion $w = F(z)$ heißt *schwach p-wertig* (Hayman, 1951), wenn entweder sämtliche Punkte des Kreises $|w| = R$ genau p-fach bedeckt sind, oder, wenn das für ein gegebenes R nicht zutrifft, mindestens ein Punkt dieses Kreises höchstens $(p-1)$-fach bedeckt ist. Wenn $F(z) = z^p + A_{p+1}z^{p+1} + \ldots$ im EK schwach p-wertig ist (abgekürzt: $F \epsilon H_p$), dann ist $f(z) = [F(z)]^{1/p} = z + \ldots$ schwach einwertig (oder schwachschlicht). Für die p-wertigen Funktionen trifft eine analoge Eigenschaft nicht zu. Da jedoch die Extremalfunktionen für die meisten Extremalprobleme in H_p zugleich p-wertig sind, so lassen sich auf diese Weise viele Extremalprobleme auch für die engere Klasse von p-wertigen Funktionen lösen. Die Hayman-Pólya'sche Methode der Abschätzung des inneren konformen Radius läßt folgende Verzerrungssätze für beschränkte F in H_p ($|F(z)| < M$, $M > 1$) gewinnen:

(1) Die Werte von F bedecken genau p-fach die Kreisscheibe $|w| < [r(M^{1/p})]^p$, wo $r(M) = M\left[2M - 1 - 2\sqrt{M(M-1)}\right]$;

$$[-f(M^{1/p}, -|z|)]^p \leqslant |F(z)| \leqslant [f(M^{1/p}, |z|)]^p, \tag{2}$$

$f(M, z)$ ist die wohlbekannte Pick'sche Funktion, welche den EK konform auf die längst der reellen Achse von $-M$ bis $-r(M)$ geschlitzte Kreisscheibe $|w| < M$ abbildet;

$$\left|\frac{F'(z)}{F(z)}\right| \leqslant \frac{p(1+|z|)}{|z|(1-|z|)} \, \frac{1 - \left|\dfrac{F(z)}{M}\right|^{1/p}}{1 + \left|\dfrac{F(z)}{M}\right|^{1/p}}, \tag{3}$$

woraus sich auch eine nur von $|z|$, p und M abhängige Abschätzung für $|F'|$ gewinnen läßt;

$$|A_{p+1}| \leqslant 2p(1 - M^{-1/p}). \tag{4}$$

Außerdem gilt für $f \epsilon H_1$ und $w_0 = f(z_0)$,

$$(1 - |z_0|^2)|f'(z_0)| \leqslant \frac{1 - |w_0|M^{-1}}{1 + |w_0|M^{-1}} [(1 - |w_0|M^{-1})^2 + 4|w_0|], \tag{5}$$

woraus sich folgende Ungleichung für unbeschränkte schwachschlichte f ergibt: $(1 - |z_0|^2)|f'(z_0)| \leqslant 1 + 4|f(z_0)|$. Diese Ungleichung erhält genaue obere Schranken für $|f|$ und $|f'|$.

Alle obengenannten Schranken sind genau und stellen einerseits Verallgemeinerung der Haymanschen Resultate für unbeschränkte schwach p-wertige Funktionen dar und andererseits ergeben die Verzerrungssätze für beschränkte p-wertige Funktionen, da die Extremalfunktion in (1)-(5), d. h. $[f(M^{1/p}, z)]^p$, p-wertig ist.

5. IX. 1958. Z. Lewandowski (Lublin), *Über gewisse Klassen von schlichten Funktionen.*

Sei S die Klasse der Funktionen von der Gestalt $f(z) = z + a_2z^2 + \ldots$, die im Einheitskreise regulär und schlicht sind. M. Biernacki hat die Unterklasse $L \subset S$ von Funktionen eingeführt, welche den Einheitskreis auf die im engeren Sinne linear erreichbaren Gebiete konform abbilden [10]. Ein Gebiet D heißt *linear erreichbar* (im engeren Sinne) wenn die Komplementarmenge dieses Gebietes mit einer Familie von abgeschlossenen punktfremden Halbgeraden identisch ist (der Anfang einer Halbgeraden kann jedoch auf einer anderen Halbgeraden liegen). In einem speziellen Falle, wenn die Verlängerungen aller Halbgeraden durch einen gemeinsamen Punkt z_0 gehen, ist D ein *Sterngebiet* in bezug auf z_0.

M. Biernacki hat für die Klasse L manche interessante Resultate erhalten, unter anderen hat er genaues Wertegebiet für die Funktionale $z/f(z)$, $zf'(z)/f(z)$ für ein fixiertes z gefunden.

Kaplan [11] hat eine andere Klasse, und zwar die Klasse von konvexnählichen Funktionen eingeführt. Eine Funktion $f(z)$, $f'(z) \neq 0$, regulär im Einheitskreise $|z| < 1$, nennen wir *konvexnählich im Einheitskreise*, wenn es eine Funktion $\Phi(z)$ gibt, die im Einheitskreise konvex und schlicht ist, derart, daß $\Re(f'(z)/\Phi'(z)) > 0$ für $|z| < 1$. Jede konvexnähliche Funktion ist schlicht.

[10] M. Biernacki, *Sur la représentation conforme des domaines linéairement accessibles*, Prace Matematyczno-Fizyczne 44 (1936), S. 293-314.

[11] W. Kaplan, *Close-to-convex schlicht functions*, Michigan Mathematical Journal 1 (1952), No 2, S. 169-185.

Sei K die Klasse von konvexnählichen Funktionen $F(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ Ich habe bewiesen, daß die beiden Klassen, die L-Klasse von Biernacki und die K-Klasse von Kaplan identisch sind ($L = K$). Außerdem habe ich für die beiden Klassen den Sternförmigkeitsradius r^* gefunden. Der von mir gefundene Radius r^* ist gleich $4\sqrt{2}-5 \approx 0{,}6568\ldots$

6. IX. 1958. H. Grunsky (Mainz), *Ein potentialtheoretisches Extremalproblem mit Anwendungen in der Funktionentheorie.*

Eine der grundlegenden Aufgaben der Uniformisierungstheorie ist diese: Die beiden Bereiche $|z| \leqslant 1$ und $|\tilde{z}| \geqslant 1$ werden zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit verheftet, indem man eine umkehrbar eindeutige, die Orientierung erhaltende analytische Beziehung $\tilde{z} = \Phi(z)$ zwischen $|z| = 1$ und $|\tilde{z}| = 1$ vorgibt; gesucht wird eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung $w = F(z)$ bzw. $w = \tilde{F}(\tilde{z})$ dieser Mannigfaltigkeit auf die volle w-Ebene. Man zeigt leicht, daß es höchstens eine Lösung gibt, wenn man bei $z = \infty$ eine Normierung der Form

$$\tilde{F}(\tilde{z}) = \tilde{z} + \frac{a_1}{\tilde{z}} + \ldots$$

(mit beliebigem a_1) vorschreibt. Unter der Annahme, daß wirklich eine Lösung existiert, bezeichne $\mathfrak{W}$ das Bild von $|z| < 1$, $\tilde{\mathfrak{W}}$ das von $|\tilde{z}| > 1$, W das gemeinsame Bild von $|z| = 1$ und $|\tilde{z}| = 1$. Ist $\tilde{g}(w)$ die Greensche Funktion von $\tilde{\mathfrak{W}}$ mit Singularität ∞, so zeigt man:

$$|\Phi'(z)|\, d\vartheta = \frac{\partial}{\partial n}\tilde{g}(w)\, ds,$$

wo ϑ bzw. s die Bogenlänge auf $|z| = 1$ und W, und $\partial/\partial n$ die Ableitung bezüglich der nach $\tilde{\mathfrak{W}}$ weisenden Normalen von W bedeuten.

Diese Gleichung besagt: $w = F(z)$ ist eine in $|z| \leqslant 1$ reguläre schlichte Funktion, die die Belegung auf $|z| = 1$

$$d\mu(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}|\Phi'(z)|\, d\vartheta \tag{*}$$

in eine Gleichgewichtsbelegung (nämlich die auf W) überführt.

Umgekehrt läßt sich zu einer Funktion $F(z)$ mit dieser Eigenschaft leicht $\tilde{F}(\tilde{z})$ bilden, derart, daß beide Funktionen zusammen die ursprüngliche Aufgabe lösen.

Damit läßt sich das Problem so als Extremalproblem formulieren: Gesucht wird unter den in $|z| \leqslant 1$ regulären schlichten Funktionen, die als Bild ein Gebiet mit dem äußeren Bildradius 1 ergeben, eine solche, die die Belegung (*) in eine Belegung von minimaler Energie überführt.

Bei der Lösung ist zunächst die Schwierigkeit zu überwinden, daß die betrachtete Funktionenklasse nicht kompakt ist. Endlich ist zu zeigen, daß die Extremaleigenschaft auch hinreichend ist dafür, daß $F(z)$ die Belegung (*) in eine Gleichgewichtsbelegung verwandelt.

6. IX. 1958. W. Pogorzelski (Varsovie), *Propriétés d'une intégrale singulière de Cauchy pour les arcs non fermés* (voir W. Pogorzelski, *Sur l'équation intégrale singulière non linéaire et sur les propriétés d'une intégrale singulière pour les arcs non fermés*, Journal of Mathematics and Mechanics 7 (1958), p. 515-532).

On appelle *intégrale singulière de Cauchy* pour un système $L = \widehat{a_1 b_1} + \widehat{a_2 b_2} + \ldots + \widehat{a_p b_p}$ d'arcs non fermés une intégrale

$$\Phi(t) = \int_L \frac{\varphi(t, \tau)\, d\tau}{\tau - t} \tag{1}$$

au sens de la valeur principale de Cauchy.

THÉORÈME. *Si la fonction $\varphi(t, \tau)$ définie aux points intérieurs de l'ensemble $t, \tau \in L$, vérifie les inégalités*

(2)
$$|\varphi(t,\tau)| < \frac{M_\varphi}{\prod_{\nu=1}^{p} |\tau - a_\nu|^\alpha |\tau - b_\nu|^\alpha}, \qquad |\varphi(t,\tau) - \varphi(t_1,\tau_1)| < \frac{k_\varphi [|t-t_1|^{\mu_1} + |\tau - \tau_1|^\mu]}{[\prod_{\nu=1}^{p} |\tau - a_\nu|\, |\tau_1 - b_\nu|]^{\alpha+\mu}}$$

($\tau_1 \in \varphi$), *où les exposants fixes α, μ, μ_1 vérifient les inégalités*

$$0 < \alpha < 1; \quad 0 < \mu < \mu_1 < 1; \quad \alpha + \mu < 1 \tag{3}$$

et M_φ, k_φ sont des constantes positives, alors l'intégrale singulière de Cauchy (1) *vérifie les inégalités*

$$|\Phi(t)| < \frac{C_1 M_\varphi + C_2 k_\varphi}{[\prod_{\nu=1}^{p} |t - a_\nu|\, |t - b_\nu|]^\alpha}, \tag{4}$$

$$|\Phi(t) - \Phi(t_1)| < \frac{(C_1 M_\varphi + C_2' k_\varphi)|t - t_1|^\mu}{[\prod_{\nu=1}^{p} |t - a_\nu|\, |t_1 - b_\nu|]^{\alpha+\mu}}; \tag{5}$$

C_1, C_2, C_1', C_2' *sont des constantes positives, indépendantes de la fonction φ.*

6. IX. 1958. W. Pogorzelski (Warszawa), *Problème généralisé de Hilbert pour les arcs non fermés* (voir Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure 75 (1958), p. 201-222)

Problème généralisé de Hilbert pour l'ensemble L des arcs non fermés consiste en détermination de fonctions $\Phi_1(z), \ldots, \Phi_n(z)$ holomorphes en dehors des coupures $L = \sum_\nu \widehat{a_\nu b_\nu}$, dont les valeurs limites $\Phi_\nu^+(t)$ et $\Phi_\nu^-(t)$ des deux côtés des coupures vérifient un système d'équations

$$\Phi_\nu^+(t) = G_\nu(t)\Phi_\nu^-(t) + F_\nu[t, \Phi_1^+(t), \ldots, \Phi_n^+(t), \Phi_1^-(t), \ldots, \Phi_n^-(t)] \tag{6}$$

$(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ en tout point intérieur $t \in L$. On suppose que les fonctions $G_\nu(t) \neq 0$ sont définies dans l'ensemble L et les fonctions $F_\nu[t, u_1, \ldots, u_{2n}]$ dans la région

$$t \in L; \quad |u_a| \in \Pi \quad (a = 1, 2, \ldots, n),$$

Π désignant tout le plan de la variable complexe. Les fonctions données G_ν et F_ν vérifient les inégalités

$$\begin{gathered}|G(t) - G(t_1)| < k_G|t-t_1|^\mu, \\ |F_\nu(t, u_1, \ldots, u_{2n})| < m_F \sum_{a=1}^{2n} |u_a|^r + m_F', \\ |F_\nu(t, u_1, \ldots, u_{2n}) - F_\nu(t', u_1', \ldots, u_{2n}')| < k_F[|t-t'|^\mu + \sum_{j=1}^{2n} |u_j - u_j'|].\end{gathered} \tag{7}$$

En outre on demande que les fonctions $\Phi_1(z), \ldots, \Phi_n(z)$ soient de classe $h(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$, c'est-à-dire qu'elles soient bornées aux voisinages des extrémités distingués $c_{k_1}, \ldots, c_{k_q}$, et qu'elles vérifient les inégalités

$$|\Phi_j(z)| < \frac{\text{const}}{|z-c_j|^\Theta} \quad (0 < \Theta < 1)$$

aux voisinages des autres extrémités.

Le problème est réduit à la résolution du système d'équations singulières non linéaires de la forme

$$\varphi_\nu(t) = F_\nu'[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{2n}(t)] + \int_L \frac{F_\nu''([t, \tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2n}(\tau)]d\tau}{\tau - t}$$

$(\nu = 1, 2, \ldots, 2n)$. On a démontré l'existence de la solution par l'application du théorème de Schauder sur le point invariant d'une transformation. La solution existe si le coefficient k_F est suffisamment petit.

6. IX. 1958. W. Żakowski (Varsovie), *On a generalization of the derivative* (voir W. Żakowski, *Operacja potęgowa o wykładniku zespolonym i równania operatorowe*, en polonais, Biuletyn Wojskowej Akademii Technicznej 39 (1958), p. 49-64).

I consider the operation

$$D^\omega f(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \frac{(t-\tau)^{-(\omega+1)}}{\Gamma(-\omega)} f(\tau)\,d\tau & \text{for} \quad \operatorname{Re}\omega < 0, \\ D^n D^{\omega-n} f(t) & \text{for} \quad n-1 \leqslant \operatorname{Re}\omega < n, \end{cases} \tag{1}$$

which is said to be a *derivative of complex order* ω, and I prove that it is a holomorphic function of ω for every fixed $t > 0$ and a continuous function of the variables $\omega = \alpha + i\beta$ and t for $t > 0$.

I prove that for $0 < \operatorname{Re}\omega < 1$ the operation mentioned above follows from the Laplace transform and Duhamel's integral formula.

I show that it can be developed in a convergent series

$$D^\omega f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{\Gamma(n+1-\omega)} t^{n-\omega}$$

if $f(t)$ has derivatives of all natural orders and if a suitable rest converges to zero.

I prove that the period of the function $f(t)$ is the quasiperiod for the function (1) if $\operatorname{Re}\omega > -1$. I examine the equation $D^\alpha f(t) = h(t)$ where α is a real number, $h(t)$ is a given function and $f(t)$ is the unknown function; I consider the number of solutions and I prove their quasiperiodicity, when $h(t)$ is a periodic function and $\alpha < 1$. For $h(t) = \sin t$ the solution may be expressed by non-elementary functions

$$\int_0^T \sin u^x\,du, \quad \int_0^T \cos u^x\,du, \quad x > 1,$$

i. e. by generalizations of Fresnel's integrals.

I introduce an equation of more general form

$$F\big(t, f(t), D^{\omega_1} f(t), \ldots, D^{\omega_n} f(t)\big) = 0,$$

where $f(t)$ is the unknown function and $\omega_1, \ldots, \omega_n$ are given complex numbers. This equation may be treated as a generalization of the Abel's integral equation and of the differential equations.

6. IX. 1958. D. Przeworska-Rolewicz (Varsovie), *Sur les équations intégrales singulières dans le plan de la variable complexe.*

Cette communication concerne les propriétés d'une intégrale au sens de la valeur principale de Cauchy et l'application de la méthode des approximations successives aux équations intégrales singulières suivantes:

$$u(t) = \lambda \int_L \frac{K[t, \tau, u(t)]\,d\tau}{\tau - t},$$

où L désigne un arc régulier sur le plan de la variable complexe (ou bien l'ensemble fini des arcs réguliers et disjoints), $u(t)$ désigne la fonction inconnue et l'intégrale a le sens de la valeur principale de Cauchy.

Tous les résultats présentés dans cette communication sont contenus dans les travaux suivants de l'auteur:

1. *Sur l'application de la méthode des approximations successives à l'équation intégrale à forte singularité*, Annales Polonici Mathematici (sous presse),

2. *Étude des systèmes d'équations intégrales pour les arcs non fermés par la méthode des approximations successives*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences mathématiques, physiques et astronomiques, 6 (1958), p. 697-703.

3. *Remarque sur un résultat de Kropatchev*, ibidem (sous presse),

4. *Sur l'intégrale de Cauchy pour l'arc fermé à l'infini*, Annales Polonici Mathematici (sous presse.)

6. IX. 1958. R. Leitner (Warsaw), *Non-linear Riemann problem for a system of functions* (voir R. Leitner, *Nieliniowe zagadnienie Riemanna dla układu funkcyj*, en polonais, Biuletyn Wojskowej Akademii Technicznej, Prace Matematyczne, XXXIX (1958), p. 3-16).

The Author considers the non-linear Riemann problem for several unknown functions: to find a system of n functions

$$f^{\nu}(z) = u_{\nu}(x, y)+iv(x, y), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

holomorphic in the circle $|z| < 1$ and continuous in $|z| \leqslant 1$ satisfying the boundary conditions:

$$\begin{aligned} &a_{\nu}(s)\, u_{\nu}(s)+b_{\nu}(s) v_{\nu}(s) \\ &\quad = \lambda\Phi_{\nu}\big(s, u_1(s), \ldots, v_n(s)\big)+\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_{\nu}\big(s, t, u_1(t), \ldots, v_n(t)\big)\, dt, \end{aligned}$$

where $a_{\nu}(s), b_{\nu}(s), \Phi_{\nu}(s, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)$ and $\varphi_{\nu}(s, t, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)$ are real functions given on the circle $z = e^{is}$ and satisfying the Hölder-Lipschitz conditions, and λ an arbitrary real number.

Generalizing the ideas given by A. I. Gusseinov [12] the Author reduces this problem to a system of singular integral equations:

$$U_{\nu}(s) = \lambda\Psi_{\nu}\big(s, U_1(s), \ldots, V_n(s)\big)+\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi_{\nu}\big(s, t, U_1(t), \ldots, V_n(t)\big)\, dt$$

[12] А. И. Гусейнов, *Об одной нелинейной граничной задаче теории аналитических функций*, Математический Сборник 26 (1950), p. 237-246

where

$$V_{\nu}(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_{\nu}(\Theta)\operatorname{ctg}\frac{s-\Theta}{2}\, d\Theta.$$

The Author proves the existence of a solution of this system for sufficiently small values of λ, using the Schauder theorem about invariant point in functional space.

Z. Rojek proves the existence of the unique solution of this problem for sufficiently small values of λ using the method of successive approximations, under assumption that $\Psi(s, U_1, \ldots, V_n)$ and $\psi_{\nu}(s, t, U_1, \ldots, V_n)$ are real functions given on the circle $z = e^{is}$ periodic with respect to s and t, continuous together with their derivatives, which satisfy the Hölder-Lipschitz condition.

6. IX. 1958. F. Leja (Cracovie), *Problèmes à résoudre posés à la Conférence.*

1. *Problème de quatre limites.* Soit E un ensemble compact de points du plan de la variable complexe z et $z^{(n)}$ un système de $n+1$ points différents quelconques $z_0, z_1, \ldots, z_n$ de E où $n \geqslant 1$. Posons

$$a_{ik} = a_{ik}(z) = \frac{z-z_k}{z_i-z_k} \qquad \text{pour} \qquad i \neq k,\ a_{ii} = 1,\ i = 0, 1, \ldots, n,$$

et désignons par $A_n(z)$, $B_n(z)$, $C_n(z)$ et $D_n(z)$ les bornes inférieures respectivemens des expressions

$$A(z, z^{(n)}) = \prod_{i=0}^{n}\prod_{k=0}^{n} |a_{ik}|, \qquad B(z, z^{(n)}) = \max_{(i)} \prod_{k=0}^{n} |a_{ik}a_{ki}|,$$

$$C(z, z^{(n)}) = \max_{(i)} \prod_{k=0}^{n} |a_{ik}|, \qquad D(z, z^{(n)}) = \max_{(k)} \prod_{i=0}^{n} |a_{ik}|,$$

lorsque, le point z et le nombre n étant fixés, les points du système $z^{(n)}$ varient arbitrairement dans E. On sait [13] que si le diamètre transfini de l'ensemble E est positif les suites

$$\{A_n(z)^{1/n(n+1)}\}, \qquad \{B_n(z)^{1/2n}\}, \qquad \{C_n(z)^{1/n}\}, \qquad \{D_n(z)^{1/n}\}$$

[13] Cf. F. Leja, *Sur certaines limites relatives aux polynomes de Lagrange et aux ensembles fermés*, Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, Série A, 1933, p. 281-289, F. Leja, *Sur les suites de polynomes, les ensembles fermés et la fonction de Green*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 12 (1933), p. 57-71, et F. Leja, *Sur une suite de fonctions liée aux ensembles plans fermés*, ibidem 13 (1934), p. 53-58.

convergent dans le plan entier vers certaines limites finies $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$, $D(z)$ dont $A(z)$ et $B(z)$ sont identiques. Prouver que ces quatre limites sont identiques ou bien que cette assertion est fausse.

2. *Problème de l'unicité.* Soit E un ensemble compact de points de l'espace R à trois dimensions, p un point variable dans R et $p_1, p_2, \ldots, p_n$ un système de n points quelconques de R. Désignons par $|pq|$ la distance cartésienne des points p et q de R. Démontrer que, pour tout $n = 1, 2, \ldots$, il n'existe qu'un seul système de n points $q_1, q_2, \ldots, q_n$ de l'espace R pour lesquels

$$\min_{p \in E} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|pq_k|} = \sup_{p_1, \ldots, p_n \in R} \left\{ \min_{p \in E} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|pp_k|} \right\}$$

ou bien prouver que cette assertion est fausse.

3. *Problème de trois suites.* Soient E_1 et E_2 deux ensembles compacts disjoints de points du plan et $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ un système de $n > 1$ points de la somme $E_1 + E_2$ pour lesquels le produit des distances mutuelles

$$V(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = \prod_{1 \leqslant i < k \leqslant n} |\eta_i - \eta_k|$$

est le plus grand. Supposons que parmi les points $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, dits *points extrémaux* de l'ensemble $E_1 + E_2$ du rang n, $\mu = \mu(n)$ points initiaux $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\mu$ appartiennent à l'ensemble E_1 et $\nu = n - \mu(n)$ points restants $\eta_{\mu+1}, \ldots, \eta_n$ à E_2 et que pour n suffisamment grand $\mu > 1$ et $\nu > 1$. On sait que la suite

$$[V(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)]^{2/n(n-1)}, \qquad n = 2, 3, \ldots,$$

converge vers le diamètre transfini de l'ensemble $E_1 + E_2$. Démontrer que lorsque n tend vers l'infini les trois suites

$$\{V(\eta_1, \ldots, \eta_\mu)^{2/\mu(\mu-1)}\}, \qquad \{V(\eta_{\mu+1}, \ldots, \eta_n)^{2\nu/(\nu-1)}\},$$

$$\left\{\left(\prod_{i=1}^{\mu} \prod_{k=\mu+1}^{n} |\eta_i - \eta_k|\right)^{1/\mu\nu}\right\}$$

convergent elles aussi ou bien montrer que cette assertion est fausse.

4. *Problème de monotonie.* Soit n un nombre entier, $n \geqslant 2$, $p_1 p_2, \ldots, p_N$ un système de $N = \binom{n+2}{2}$ points quelconques du plan (ou de l'espace de deux variables complexes x et y) et (x_k, y_k) les coordonnées du point

p_k, $k = 1, 2, \ldots, N$. Désignons par V_n la valeur absolue du déterminant d'ordre N dont la k-ième ligne est

$$(*) \quad |x_k^n, x_k^{n-1} y_k, \ldots, y_k^n, x_k^{n-1}, x_k^{n-2} y_k, \ldots, y_k^{n-1}, \ldots, x_k^2, x_k y_k, y_k^2, x_k, y_k, 1|$$

et soit V_{n-1} le plus grand des modules de tous les déterminants que l'on peut obtenir du déterminant $(*)$ en rayant de ce dernier $n+1$ colonnes initiales et $n+1$ lignes quelconques. Démontrer l'inégalité

$$V_n^{1/\binom{n+2}{3}} \leqslant V_{n-1}^{1/\binom{n+1}{3}} \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant 2$$

ou prouver qu'elle est fausse.