STUDIA MATHEMATICA, T. XVIII. (1959)

Sur les systèmes d'équations intégrales singulières pour des lignes fermées

par

D. PRZEWORSKA-ROLEWICZ (Varsovie)

Introduction

Soit l'équation intégrale non linéaire singulière de seconde espèce:

$$u(t) = \lambda \int_L \frac{K[t, \tau, u(\tau)]}{\tau - t} d\tau, \tag{i}$$

où L désigne un ensemble fini de lignes fermées et disjointes dans le plan de la variable complexe, admettant une tangente continue en tout point. L'intégrale a le sens de la valeur principale de Cauchy, $u(t)$ désigne la fonction inconnue.

A. Gousséïnov [2] a démontré l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (i) en supposant que L est un segment de l'axe réel et que la fonction K admet une dérivée K'_u vérifiant la condition de Lipschitz.

W. Pogorzelski [7] a résolu l'équation (i) par la méthode des approximations successives en supposant la fonction K holomorphe dans une bande qui contient les lignes L. Le même auteur [8] a démontré l'existence de la solution de l'équation (i) en supposant que la fonction K vérifie la condition de Hölder-Lipschitz.

Dans le présent travail nous étudierons les systèmes finis ou infinis d'équations intégrales singulières de la forme (i). On peut considérer un tel système comme une équation opératoire dans un certain espace du type B_0, notamment sous forme de l'équation (i), où K désigne une fonction qui prend les valeurs d'un espace X du type B_0, définie pour $t, \tau \in L$ et $u \in X$, ou de l'équation plus générale

$$u(t) = \lambda M\left[t, u(t), \varrho \int_L \frac{K[t, \tau, u(\tau)]\, d\tau}{\tau - t}\right], \tag{ii}$$

où $M(t, u, v)$ est une fonction non linéaire de trois variables, qui prend les valeurs d'un B_0-espace X.

La première partie rappelle les notions et les théorèmes de L'Analyse fonctionnelle qui seront nécessaires pour les considérations ultérieures.

La seconde partie contient la définition de l'intégrale de Cauchy dans les B_0-espaces et ses propriétés (sans démonstration), en outre elle contient les définitions de certains espaces spéciaux qui interviendront dans les considérations ultérieures.

Dans la troisième partie on fait l'étude des équations (i) et (ii) dans un B_0-espace de Montel et on démontre l'existence de leurs solutions par la méthode du point invariant de Schauder.

Dans la quatrième partie on étudie les équations (i) et (ii) dans un B-espace et on démontre, en supposant que les fonctions K et M vérifient des conditions supplémentaires, qu'on peut résoudre ces équations par la méthode des approximations successives.

Dans la cinquième partie on définit certaines classes d'opérations vérifiant les conditions supplémentaires, données dans la quatrième partie, et on étudie leurs propriétés.

Il faut signaler que de nombreux problèmes limites pour les fonctions analytiques conduisent à des équations intégrales singulières de la forme (i) ou (ii). Les équations de la même forme sont aussi considérées dans la théorie de l'élasticité et dans l'aérodynamique.

I. Notions et théorèmes auxiliaires

Soit l'espace linéaire complexe X. Toute fonctionnelle d'un element $x \in X$, non négatif et subadditif est appelée *pseudonorme* et on la désigne par $\|x\|$. La pseudonorme est *homogène* si $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

L'espace linéaire X est dit *B_0^*-espace*, si sa topologie est déterminée par une famille dénombrable de pseudonormes homogènes $\|x\|^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, c'est-à-dire si la suite x_k n'est convergente vers x que dans le cas où pour chaque n on a $\|x_k - x\|^{(n)} \to 0$. Si, en plus, cet espace est complet, on l'appelle *B_0-espace*. Un B_0-espace est dit *B_0-espace de Montel*, si tout ensemble borné dans cet espace est compact.

La pseudonorme $\|x\|$ est dite *norme*, si $\|x\| = 0$ n'a lieu que dans le cas où $x = 0$.

Un espace X dont la topologie est déterminée par une norme (c'est-à-dire la suite x_k n'est convergente vers x que dans le cas où $\|x_k - x\| \to 0$) est appelé *B^*-espace*. Si de plus cet espace est complet, on l'appelle *B-espace*. Evidemment tout B-espace est un B_0-espace.

THÉORÈME DE SCHAUDER. *Dans un B_0-espace toute transformation continue d'un ensemble convexe, fermé et compact en son sous-ensemble, admet au moins un point invariant.*

THÉORÈME DE BANACH. *Si, dans l'espace métrique complet X, une opération A vérifie la condition de Lipschitz:*

$$\|Au_1 - Au_2\| \leqslant q\|u_1 - u_2\| \qquad (0 < q < 1)$$

l'équation $u = Au$ admet une solution unique qui est la limite de la suite des approximations successives

$$u = \lim_{n\to\infty} Au_n, \qquad \text{où} \qquad u_n = Au_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

(u_0 est un élément de l'espace X fixé arbitrairement).

Soit l'opération U non linéaire définie dans l'espace X. Si, pour tout $h \in X$, il existe une limite

$$\lim_{r\to 0} \frac{U(x+rh) - U(x)}{r}$$

(r désigne un nombre réel), on dit que l'opération U admet une *différentielle faible* (Gâteau) au point x et on désigne cette différentielle par $d_G U_x(h)$.

Si pour tout $h \in X$ l'égalité suivante est satisfaite,

$$U(x+h) - U(x) = d_F U_x(h) + a(x, h), \qquad \text{où} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\|a(x, h)\|}{\|h\|} = 0,$$

et si l'opération $d_F U_x$ est linéaire (au sens des nombres réels), on appelle $d_F U_x$ *différentielle forte* (Fréchet). S'il existe une différentielle forte, alors il existe une différentielle faible qui est égale à la première.

THÉORÈME A. *Si, dans un ensemble ouvert, il existe une différentielle faible, dépendant d'une manière uniformément continue de x et d'une manière continue de h, il existe une différentielle forte et elle est égale à la première* ([4], p. 303).

Soit $h(t)$ une fonction dérivable de la variable réelle t, qui prend les valeurs du B-espace X; alors la formule suivante est satisfaite:

$$(*) \qquad \frac{d[Uh(t)]}{dt} = d_F U_{h(t)}[h'(t)].$$

II. Intégrale de Cauchy et ses propriétés

1. Soit un ensemble fini L des lignes fermées et disjointes dans le plan de la variable complexe, qui ont une tangente continue en tout point. Soit un B_0-espace X arbitrairement fixé.

Désignons par H^{μ} l'espace de toutes les fonctions $x(t)$ prenant des valeurs de l'espace X, qui satisfont pour $t, t_1 \epsilon L$ la condition de Hölder relativement à chaque pseudonorme

$$\|x(t)-x(t')\|^{(n)} \leqslant c_n^x |t-t_1|^{\mu} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

(c_n^x sont des constantes positives arbitraires, $0 < \mu < 1$ est fixé arbitrairement pour tout l'espace). Posons

$$s_n^{\mu}(x) = \sup_{t \epsilon L} \|x(t)\|^{(n)}, \qquad h_n^{\mu}(x) = \sup_{t, t_1 \epsilon L} \frac{\|x(t)-x(t_1)\|^{(n)}}{|t-t_1|^{\mu}}.$$

L'espace H^{μ} sera un B_0-espace, si nous admettons la suite des pseudonormes suivante:

$$\|x\|_{H^{\mu}}^{(n)} = s_n^{\mu}(x) + h_n^{\mu}(x). \tag{2}$$

Nous désignons par $H^{\mu,\nu}$ l'espace de toutes les fonctions $x(t, \tau)$ prenant les valeurs de l'espace X, qui satisfont pour $t, \tau, t', \tau' \epsilon L$ à la condition de Hölder relativement à chaque pseudonorme:

$$\|x(t, \tau)-x(t', \tau')\|^{(n)} \leqslant c_n^x[|t-t'|^{\nu}+|\tau-\tau'|^{\mu}] \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

(c_n^x sont des constantes positives arbitraires, $0 < \mu < \nu \leqslant 1$ sont fixés arbitrairement pour tout l'espace). Posons:

$$s_n^{\mu,\nu}(x) = \sup_{t, \tau \epsilon L} \|x(t, \tau)\|^{(n)},$$

$$h_n^{\mu,\nu}(x) = \sup_{t, t', \tau', \tau \epsilon L} \frac{\|x(t, \tau)-x(t', \tau')\|^{(n)}}{|t-t'|^{\nu}+|\tau-\tau'|^{\mu}}.$$

L'espace $H^{\mu,\nu}$ sera un B_0-espace, si nous admettons la suite des pseudonormes suivante:

$$\|x\|_{H^{\mu,\nu}}^{(n)} = s_n^{\mu,\nu}(x) + h_n^{\mu,\nu}(x).$$

2. Nous appellerons *valeur principale au sens de Cauchy* la limite suivante pour la fonction $x(t)$ prenant les valeurs de l'espace X:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{L-l_\varepsilon} \frac{x(\tau)d\tau}{\tau-t} \quad (t \epsilon L),$$

où l'arc l_ε est la partie des lignes L qui est contenue à l'intérieur d'un cercle de centre t et de rayon ε, et nous la désignerons par

$$\int_L \frac{x(\tau)d\tau}{\tau-t}.$$

THÉORÈME 1. *Si la fonction $x(t) \epsilon H^{\mu}$ et $t \epsilon L$, la fonction $x(t)$ est intégrable au sens de Cauchy.*

La démonstration du théorème est évidente.

THÉORÈME DE PLEMELJ-PRIVALOV. *Si $x(t) \epsilon H^{\mu}$, la fonction définie par l'intégrale de Cauchy*

$$\hat{x}(t) = \int_L \frac{x(\tau)d\tau}{\tau-t} \quad (t \epsilon L)$$

appartient à l'espace H^{μ}.

Il résulte de la démonstration de ce théorème qu'on peut le formuler de la manière suivante:

THÉORÈME 2. *Si $x(t) \epsilon H^{\mu}$, alors $\hat{x}(t) \epsilon H^{\mu}$ et $h_n^{\mu}(\hat{x}) \leqslant Dh_n^{\mu}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, où la constante D ne dépend pas de la fonction x sous le signe de l'intégrale.*

THÉORÈME DE PLEMELJ-PRIVALOV GÉNÉRALISÉ. *Si $x(t, \tau) \epsilon H^{\mu,\nu}$, alors la fonction définie par l'intégrale de Cauchy*

$$\hat{x}(t) = \int_L \frac{x(t, \tau)d\tau}{\tau-t} \quad (t \epsilon L)$$

appartient à l'espace H^{μ}.

De même que précédemment nous obtenons le

THÉORÈME 3. *Si $x(t, \tau) \epsilon H^{\mu,\nu}$, alors $\hat{x}(t) \epsilon H^{\nu}$ et $h_n^{\mu}(\hat{x}) \leqslant Dh_n^{\mu,\nu}(x)$, où la constante D ne dépend pas de la fonction $x(t, \tau)$.*

III. Équations intégrales singulières dans les B_0-espaces

1. Désignons par X un B_0-espace de Montel (voir p. 248) avec la suite des pseudonormes $\|x\|^{(n)}$. Par C_X nous désignerons l'espace de toutes les fonctions continues $x(t)$ pour $t \epsilon L$ qui prennent les valeurs de l'espace X. C_X est un B_0-espace de Montel, si nous admettons la suite des pseudonormes suivante:

$$\|x\|_{C_X}^{(n)} = \sup_{t \epsilon L} \|x(t)\|^{(n)} = s_n^{\mu}(x).$$

Considérons dans l'espace C_X un ensemble Z déterminé par les inégalités:

$$\|u(t)\|^{(n)} \leqslant R_n, \tag{5}$$

$$\|u(t)-u(t')\|^{(n)} \leqslant \varkappa_n(t-t')^{\mu} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5'}$$

R_n, $\varkappa_n$ sont des constantes positives arbitraires, qui ne sont pas fixées pour le moment, $0<\mu<1$ est fixé arbitrairement pour tout l'ensemble Z. On voit que l'ensemble Z est convexe et fermé, en outre l'ensemble $Z\subset H^{\mu}$. Nous énoncerons sans démonstration — celle-ci étant bien connue — le théorème suivant:

THÉORÈME AUXILIAIRE 1. *L'ensemble Z est compact dans l'espace C_X.*

2. Soit une fonction $K(t,\tau,\xi)$ définie sur l'ensemble L $[t,\tau\in L;\ \|\xi\|^{(n)}\leqslant R_n\ (n=1,2,\ldots)]$, prenant des valeurs de l'espace X et satisfaisant à la condition

$$\text{(6)}\qquad \|K(t,\tau,\xi)-K(t',\tau',\xi')\|^{(n)}$$
$$\leqslant k_n\Big[|t-t'|^{\nu}+|\tau-\tau'|^{\mu}+\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}\|\xi-\xi'\|^{(i)}\Big]\quad (0<\mu<\nu\leqslant 1;\ k_n>0),$$

où les constantes positives a_{ni} sont telles que les séries suivantes soient convergentes:

$$\text{(6')}\qquad \varkappa_{0n}=\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}\varkappa_i<+\infty;\qquad R_{0n}=\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}R_i<+\infty.$$

THÉORÈME 4. *Si $u(t)\in Z$, alors $Ku=K[t,\tau,u(\tau)]\in H^{\mu,\nu}$ et*

$$h_n^{\mu,\nu}[Ku]\leqslant k_n\Big(1+\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}\varkappa_i\Big)\leqslant k_n(1+\varkappa_{0n}).$$

La conclusion résulte immédiatement des inégalités (5') et (6).

3. Considérons l'opération intégrale singulière

$$\text{(7)}\qquad \lambda\hat{K}u=\lambda\int_L\frac{K[t,\tau,u(\tau)]\,d\tau}{\tau-t},$$

qui transforme l'ensemble Z en un ensemble $\lambda\hat{K}Z\subset C_X$.

THÉORÈME 5. *Pour que $\lambda\hat{K}Z\subset Z$, il suffit que l'on ait $\inf\limits_n\gamma_n>0$, où*

$$\text{(9)}\qquad \gamma_n=\min\Big[\frac{\varkappa_n}{Dk_n(1+\varkappa_{0n})};\ \frac{R_n}{Ik_n(1+\varkappa_{0n})+\pi s_n^0(K)}\Big],$$
$$I=\sup_{t\in L}\int_L\frac{dl_\tau}{|\tau-t|^{1-\mu}},\qquad s_n^0(K)=\sup_{t,\tau\in L;\|u\|^{(n)}\leqslant R_n}\|K[t,\tau,u(\tau)]\|^{(n)}$$

(la constante D ne dépend pas de la fonction K) et que le paramètre λ satisfasse à l'inégalité

$$\text{(10)}\qquad |\lambda|\leqslant\inf_n\gamma_n.$$

Démonstration. Des théorèmes 3 et 4 il résulte que $\lambda\hat{K}u\in H^{\mu}$ et

$$h_n^{\mu}(\lambda\hat{K}u)\leqslant|\lambda|Dk_n\Big(1+\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}\varkappa_i\Big)\leqslant|\lambda|Dk_n(1+\varkappa_{0n}).$$

En outre

$$\hat{K}u=\int_L\frac{K[t,\tau,u(\tau)-K[t,t,u(t)]}{\tau-t}\,d\tau+K[t,t,u(t)]\int_L\frac{d\tau}{\tau-t},$$

d'où

$$s_n^{\mu}(\hat{K}u)\leqslant k_n\Big(1+\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}\varkappa_i\Big)\int_L\frac{dl_\tau}{|\tau-t|^{1-\mu}}+\pi s_n^0(K)$$
$$\leqslant k_n\Big(1+\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}\varkappa_i\Big)I+\pi s_n^0(K)\leqslant k_n(1+\varkappa_{0n})I+\pi s_n^0(K).$$

Donc, si les conditions suivantes, équivalentes à l'inégalité (10), sont satisfaites:

$$\text{(12)}\qquad \begin{aligned}&|\lambda|k_nD(1+\varkappa_{0n})\leqslant\varkappa_n,\\&|\lambda|k_nI(1+\varkappa_{0n})+\pi s_n^0(K)\leqslant R_n,\end{aligned}\qquad (n=1,2,\ldots),$$

et si $\inf\limits_n\gamma_n>0$ existe, alors $\lambda\hat{K}Z\subset Z$.

Remarque. Les nombres $\varkappa_n$ étant arbitraires, on peut les choisir de telle manière que l'intervalle de variation du paramètre $|\lambda|$ soit le plus grand possible. On peut aussi augmenter cet intervalle par un choix convenable des constantes a_{ni}, en conservant la convergence des séries (6') (les constantes R_n sont déterminées par la fonction $K(t,\tau,\xi)$).

THÉORÈME 6. *L'opération $\hat{K}u$ est continue sur l'ensemble Z.*

Démonstration. Considérons une suite arbitraire $\{u_m\}$ convergente vers u $(u,u_m\in Z,\ m=1,2,\ldots)$. Nous pouvons écrire:

$$\hat{K}u-\hat{K}u_m=\int_L\frac{K[t,\tau,u(\tau)-K[t,\tau,u_m(\tau)]}{\tau-t}\,d\tau$$
$$=\pi i\{K[t,t,u(t)]-[Kt,t,u_m(t)]\}$$
$$+\Big\{\int_L\frac{K[t,\tau,u(\tau)-K[t,t,u(t)]}{\tau-t}\,d\tau$$
$$-\int_L\frac{K[t,\tau,u_m(\tau)]-K[t,t,u_m(t)]}{\tau-t}\,d\tau\Big\}.$$

Étudions la première différence I_1:

$$\|I_1\|_{C_X} \leqslant \pi k_n \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} \|u(t)-u_m(t)\|_{C_X}^{(i)}.$$

Pour un nombre arbitraire $\varepsilon > 0$ on peut choisir un nombre naturel M_n tel que

$$\sum_{i=M_n}^{\infty} a_{ni} R_i \leqslant \frac{\varepsilon}{16\pi k_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

et un nombre naturel N_n tel que

$$\pi k_n \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} \|u(t)-u_m(t)\|_{C_X}^{(i)} \leqslant \frac{\varepsilon}{8}$$

pour $m > N_n$. Alors

$$\|I_1\|_{C_X}^{(n)} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}, \quad \text{si} \quad m > N_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Pour étudier la seconde différence I_2, considérons un cercle Λ de centre t et de rayon r assez petit, pour que Λ ne contienne qu'un seul arc l des lignes L, et décomposons I_2 en deux sommandes: $I_2 = I_2^l + I_2^{L-l}$, où l'intégration s'étend sur l'arc l et les lignes $L-l$. Pour $m = 1, 2, \ldots$, et aussi pour la limite, l'inégalité suivante est satisfaite:

$$\left\| \int \frac{K[t, \tau, u_m(\tau)] - K[t, t, u_m(t)]}{\tau - t} d\tau \right\|_{C_X}^{(n)}$$

$$\leqslant k_n \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} \varkappa_i\right) \int_L \frac{dl_\tau}{|\tau - t|^{1-\mu}} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

si l'arc l est suffisamment petit, d'où $\|I_2\|_{C_X}^{(n)} \leqslant \varepsilon/2$.

Dans l'intégrale I_2^{L-l} le point t est situé à l'extérieur du domaine d'intégration, donc en vertu de la continuité de la fonction sous le signe de l'intégrale on peut choisir pour ε (pour chaque n) un nombre naturel M_n' tel que $\|I_2^{L-l}\|_{C_X}^{(n)} \leqslant \varepsilon/4$, si $m > M_n'$. Alors

$$\|\hat{K}u - \hat{K}u_m\|_{C_X}^{(n)} \leqslant \varepsilon, \quad \text{si } m > \max(N_n, M_n') \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME 7. *Si l'opération* $K(t, \tau, \xi)$, *définie sur l'ensemble* L, *satisfait à la condition* (6) *et si* $\inf_n \gamma_n > 0$, *il existe pour* $|\lambda| \leqslant \inf_n \gamma_n$ *au moins une solution de l'équation intégrale singulière*

$$u(t) = \lambda \hat{K} u, \tag{13}$$

qui appartient à l'ensemble Z.

La conclusion résulte immédiatement du théorème auxiliaire 1, des théorèmes 5 et 6 et du théorème de Schauder (page 248).

4. Soit une fonction $M(t, \xi, \eta)$ définie sur l'ensemble $L^*[t \in L;\ \|\xi\|^{(n)} \leqslant R_n;\ \|\eta\|^{(n)} \leqslant R_n\ (n = 1, 2, \ldots)]$, prenant des valeurs de l'espace X et satisfaisant à la condition

$$\|M(t, \xi, \eta) - M(t', \xi', \eta')\|^{(n)} \tag{14}$$

$$\leqslant m_n \left[|t-t'|^\mu + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{ni} \|\xi - \xi'\|^{(i)} + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{ni}' \|\eta - \eta'\|^{(i)} \right] \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$(0 < \mu < 1;\ m_n > 0)$ (pour les constantes δ_{ni} et δ_{ni}' nous admettons les hypothèses (6')).

Considérons l'opération

$$\lambda M u = \lambda M[t, u(t), \varrho \hat{K} u]$$

définie sur l'ensemble Z, où l'opération $\hat{K}u$ est définie par la formule (7) et le paramètre ϱ satisfait à l'inégalité (10)[1]. L'opération λMu transforme l'ensemble Z en un ensemble $\lambda MZ \subset C_X$.

THÉORÈME 8. *Pour que* $\lambda MZ \subset Z$, *il suffit que l'on ait* $\inf_n \gamma_n^* > 0$, *où*

$$\gamma_n^* = \min \left[\frac{\varkappa_n}{m_n\{1 + \sum_{j=1}^{\infty} [\delta_{nj} \varkappa_j + |\varrho|\, \delta_{nj}' D k_j (1 + \varkappa_{0j})]\}} ; \right. \tag{15}$$

$$\left. \frac{R_n}{m_n [b_n + \sum_{j=1}^{\infty} [\delta_{nj} + |\varrho|\, \delta_{nj}' I k_j (1 + \varkappa_{0j}) + \pi |\varrho|\, \delta_{nj} s_j^0(K)]\}} \right],$$

où $b_n = \sup_{t \in L} |t|^\mu + \dfrac{1}{m_n} \|M(0, 0, 0)\|^{(n)}$, *et que le paramètre satisfasse à l'inégalité*

$$|\lambda| \leqslant \inf_n \gamma_n^*. \tag{15'}$$

La conclusion résulte immédiatement du théorème 5 et de l'inégalité (13), par analogie avec la démonstration du théorème 4.

THÉORÈME 9. *L'opération* Mu *est continue sur l'ensemble* Z.

La conclusion résulte des inégalités dans la démonstration du théorème 5 et de l'inégalité (14).

---

[1] L'hypothèse (10) faite sur le paramètre ϱ assure la convergence des séries qui interviennent dans les considérations ultérieures.

THÉORÈME 10. *Si la fonction $K(t, \tau, \xi)$ définie sur l'ensemble L satisfait à la condition* (6), *si la fonction $M(t, \xi, \eta)$ définie sur l'ensemble L^* satisfait à la condition* (14) *et si $\inf\limits_n \gamma_n > 0$, $\inf\limits_n \gamma_n^* > 0$, alors pour $|\varrho| \leqslant \inf\limits_n \gamma_n$ et pour $|\lambda| \leqslant \inf\limits_n \gamma_n^*$ il existe au moins une solution de l'équation non linéaire*

$$(16) \qquad u(t) = \lambda M[t, u(t), \varrho \hat{K} u],$$

appartenant à l'ensemble Z.

La conclusion résulte immédiatement du théorème auxiliaire 1, des théorèmes 8 et 9 et du théorème de Schauder.

IV. Méthode des approximations successives pour les équations intégrales singulières

1. Dans la suite on désignera par X un B-espace. Évidemment toutes les notations, notions et théorèmes concernant les pseudonormes, introduits au chapitre II, sont valables pour la norme dans l'espace X. Il suffit de supprimer dans toutes les formules l'indice n.

Considérons donc l'ensemble Z définie par les inégalités (voir (15) et (15'))

$$(17) \qquad \|u(t)\| \leqslant R,$$

$$(17') \qquad \|u(t) - u(t')\| \leqslant \varkappa |t - t'|^{\mu},$$

où R, $\varkappa$ sont des constantes positives arbitraires, qui ne sont pas fixées pour le moment, $0 < \mu < 1$ est fixé arbitrairement pour tout l'ensemble Z. L'ensemble Z est un sous-ensemble de l'espace H^{μ}.

Soit une fonction $K(t, \tau, \xi)$ satisfaisant à la condition (analogue à 6)

$$(18) \qquad \|K(t, \tau, \xi) - K(t', \tau', \xi')\| \leqslant [|t - t'|^{\nu} + |\tau - \tau'|^{\mu} + \|\xi - \xi'\|]$$

$(0 < \mu < \nu \leqslant 1;\ k > 0)$ sur l'ensemble $L[t, \tau \in L;\ \|\xi\| \leqslant R]$.

Au théorème 4 correspond le théorème suivant:

THÉORÈME 4'. *Si $u(t) \in Z$, alors $Ku = K[t, \tau, u(\tau)] \in H^{\mu,\nu}$ et $h^{\mu,\nu}(Ku) \leqslant k(1+\varkappa)$.*

Considérons l'opération intégrale (7)

$$\lambda \hat{K} u = \lambda \int\limits_L \frac{K[t, \tau, u(\tau)]\, d\tau}{\tau - t}$$

qui transforme l'ensemble Z en un ensemble $\lambda \hat{K} Z$. Au théorème 5 correspond le théorème suivant (la démonstration est analogue):

THÉORÈME 5. *Pour que $\lambda \hat{K} Z \subset Z$, il suffit que le paramètre λ satisfasse à l'inégalité suivante:*

$$(19) \qquad |\lambda| \leqslant \min\left[\frac{\varkappa}{kD(1+\varkappa)};\ \frac{R}{kI(1+\varkappa) + \pi s^0(K)}\right].$$

Remarque. Le nombre $\varkappa$ étant arbitraire (R est déterminé par la propriété (18) de la fonction K), on peut le choisir de telle manière que le module $|\lambda|$ soit si grand que possible. Posons donc

$$\varphi(\varkappa) = \frac{\varkappa}{kD(1+\varkappa)}, \qquad \psi(\varkappa) = \frac{R}{kI(1+\varkappa) + \pi s^0(K)}.$$

La fonction $\varphi(\varkappa)$ est croissante, la fonction $\psi(\varkappa)$ est décroissante, donc la plus avantageuse sera la valeur de $\varkappa_0$ telle que $\varphi(\varkappa_0) = \psi(\varkappa_0)$, d'où nous obtenons

$$(20) \qquad \varkappa_0 = \frac{RkD - kI - \pi s^0(K) + \sqrt{(RkD - kI - \pi s^0(K))^2 + 4k^2 RDI}}{2kI}$$

et le plus grand intervalle des valeurs possibles du paramètre λ est

$$(20') \qquad |\lambda| \leqslant \lambda_0,$$

où

$$(20'') \qquad \lambda_0 = \varphi(\varkappa_0) = \psi(\varkappa_0)$$

$$= \frac{2R}{RkD + kI + \pi s^0(K) + \sqrt{(RkD - kI - \pi s^0(K))^2 + 4k^2 RDI}}.$$

Dans les considérations suivantes nous admettons toujours que $\varkappa = \varkappa_0$. Nous désignerons l'ensemble Z correspondant à cette valeur par Z_0.

Si la fonction $K(t, \tau, \xi)$ définie sur l'ensemble L satisfait à la condition (18), alors évidemment pour des $u_1, u_2 \in H^{\mu}$ arbitraires l'inégalité suivante est satisfaite ($Ku_1 - Ku_2 \in H^{\mu,\nu}$):

$$(21) \qquad s^{\mu,\nu}(Ku_1 - Ku_2) \leqslant k s^{\mu}(u_1 - u_2).$$

Supposons que pour des $u_1, u_2 \in H^{\mu}$ arbitraires la fonction $K(t, \tau, \xi)$ satisfasse à la condition supplémentaire

$$(22) \qquad h^{\mu,\nu}(Ku_1, Ku_2) \leqslant a s^{\mu}(u_1 - u_2) + b h^{\mu}(u_1 - u_2),$$

où a, b sont des constantes positives arbitraires, qui ne s'annulent pas simultanément. Remarquons que l'ensemble des opérations satisfaisant aux inégalités (21) et (22) est linéaire; de plus, si à l'opération K_n correspondent les constantes k_n, a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots, r)$, alors à l'opération $K = \sum_{n=1}^{r} c_n K_n$ correspondent les constantes $\sum_{n=1}^{r} c_n k_n$, $\sum_{n=1}^{r} c_n a_n$, $\sum_{n=1}^{r} c_n b_n$, où c_n sont des constantes positives arbitraires.

Théorème 11. *Si la fonction $K(t, \tau, \xi)$ déterminée sur l'ensemble L satisfait aux conditions* (18) *et* (22), *alors l'opération $\hat{K}u$ définie par la formule* (7) *satisfait à l'inégalité*

$$\|\lambda K u_1 - \lambda K u_2\|_{H^\mu} \leqslant |\lambda|\, q \|u_1 - u_2\|_{H^\mu}, \tag{23}$$

où

$$q = \max[(I+D)a + \pi k; (I+D)b]. \tag{24}$$

Démonstration. D'après les théorèmes 3 et 4 nous avons

$$\begin{aligned} h^\mu[\lambda(\hat{K}u_1 - \hat{K}u_2)] &\leqslant |\lambda| D h^{\mu,\nu}(K u_1 - K u_2) \\ &\leqslant |\lambda| D [a s^\mu(u_1 - u_2) + b h^\mu(u_1 - u_2)]. \end{aligned}$$

En outre, par analogie avec la théorème 5, nous obtenons

$$\begin{aligned} s^\mu(\lambda\hat{K}u_1 - \lambda\hat{K}u_2) &\leqslant |\lambda| [I h^{\mu,\nu}(K u_1 - K u_2) + \pi s^{\mu,\nu}(K u_1 - K u_2)] \\ &\leqslant |\lambda| \{I[a s^\mu(u_1 - u_2) + b h^\mu(u_1 - u_2)] + \pi k s^\mu(u_1 - u_2)\}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|\lambda\hat{K}u_1 - \lambda\hat{K}u_2\|_{H^\mu} &\leqslant |\lambda| \{[(I+D)a + \pi k] s^\mu(u_1 - u_2) + (I+D) b h^\mu(u_1 - u_2)\} \\ &\leqslant |\lambda|\, q \|u_1 - u_2\|_{H^\mu}, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Théorème 12. *Si la fonction $K(t, \tau, \xi)$ définie sur l'ensemble L satisfait aux conditions* (18) *et* (22), *alors pour les valeurs du paramètre $|\lambda|$ telles que*

$$|\lambda| < \min\left[\lambda_0, \frac{1}{q}\right], \tag{25}$$

l'équation intégrale singulière (13), $u(t) = \lambda\hat{K}u$, *admet une solution unique appartenant à l'ensemble Z_0.*

La conclusion résulte du théorème 5, de la remarque consécutive au théorème 5', du théorème 11 et du théorème de Banach (page 248).

Remarquons que, d'après le théorème de Banach, on peut construire la solution de l'équation (13) comme la limite de la suite des approximations successives.

2. Soit une fonction $M(t, \xi, \eta)$ définie sur l'ensemble $L^*[t \in L; \|\xi\| \leqslant R; \eta \in X]$ [2] qui satisfait à la condition (correspondant à l'inégalité (14))

$$\|M(t, \xi, \eta) - M(t', \xi', \eta')\| \leqslant m[|t - t'|^\mu + \|\xi - \xi'\| + \|\eta - \eta'\|] \tag{26}$$

$(0 < \mu < 1,; m > 0)$.

Considérons l'opération $\lambda M u = M[t, u(t), \hat{K}u]$, où l'opération Ku est définie par la formule (7). Au théorème 8 correspond le théorème suivant:

Théorème 8. *Pour que $\lambda M Z \subset Z$, il suffit que le paramètre λ satisfasse à l'inégalité*

$$|\lambda| \leqslant \min\left[\frac{\varkappa}{m(1+\varkappa)(1+KD)}; \frac{R}{m[c + R + \pi s^0(K) + Ik(1+\varkappa)]}\right], \tag{27}$$

où $c = \sup_{t \in L} |t|^\mu + \frac{1}{m}\|M(0,0,0)\|$.

Remarque. Par analogie avec la remarque consécutive au théorème 4' on peut choisir le nombre $\varkappa$ de telle manière que $|\lambda|$ soit si grand que possible. Nous obtenons

$$\varkappa_1 = \frac{k(D-I) - c - \pi s^0(K) + \sqrt{[c + \pi s^0(K) + k(I-D)]^2 + 4RIK(1+kD)}}{2Ik} \tag{28}$$

et le plus grand intervalle des valeurs possibles du paramètre $|\lambda|$ est

$$\begin{aligned} |\lambda| &\leqslant \lambda_1 \\ &= \frac{2R}{m\{2R + \pi s^0(K) + k(I+D) + \sqrt{[c + \pi s^0(K) + k(I-D)]^2 + 4RIk(1+kD)}\}}. \end{aligned} \tag{28'}$$

Nous admettons dans les considérations suivantes (concernant l'opération Mu) que $\varkappa = \varkappa_1$. Nous désignerons l'ensemble Z correspondant à cette valeur par Z_1.

Supposons que la fonction $M(t, \xi, \eta)$ satisfasse à la condition supplémentaire

$$\begin{aligned} h^\mu\{M[t, u_1(t), v_1(t) - M[t, u_2(t), v_2(t)]\} \\ \leqslant \sigma_1 s^\mu(u_1 - u_2) + \sigma_2 s^\mu(v_1 - v_2) + \sigma_3 h^\mu(u_1 - u_2) + \sigma_4 h^\mu(v_1 - v_2) \end{aligned} \tag{29}$$

---

[2] Pour étudier l'opération Mu au chapitre III il a fallu introduire le paramètre ϱ et considérer l'opération $\varrho\hat{K}u$; il était alors nécessaire de supposer que $\|\eta\|^{(n)} \leqslant R_n$ pour assurer la convergence des séries numériques dans la formule (15). Cette supposition n'est plus nécessaire ici.

($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ sont des constantes positives qui ne s'annulent pas simultanément pour $u_1, u_2, v_1, v_2 \in H^\mu$).

THÉORÈME. *Si la fonction $M(t, \xi, \eta)$ définie sur l'ensemble L^* satisfait aux conditions* (26) *et* (29) *et si la fonction $K(t, \tau, \xi)$ définie sur l'ensemble L satisfait aux conditions* (18) *et* (22), *l'opération λMu satisfait à l'inégalité*

$$\|\lambda Mu_1 - Mu_2\|_{H^\mu} \leqslant |\lambda| q^* \|u_1 - u_2\|_{H^\mu}, \tag{30}$$

où

$$q^* = \max[m+\sigma_1+aD\sigma_4+(m+\sigma_2)(\pi k+aI);\ \sigma_3+bD\sigma_4+(m+\sigma_2)bI]. \tag{31}$$

D é m o n s t r a t i o n. Il résulte de la démonstration du théorème 11 que

$$h^\mu(\hat{K}u_1 - \hat{K}u_2) \leqslant (Ia+\pi k)s^\mu(u_1-u_2)+bIh^\mu(u_1-u_2),$$

$$s^\mu(\hat{K}u_1 - \hat{K}u_2) \leqslant aDs^\mu(u_1-u_2)+bDh^\mu(u_1-u_2).$$

D'après l'inégalité (26), on obtient que

$$\begin{aligned} s^\mu(\lambda Mu_1 - \lambda Mu_2) &\leqslant m|\lambda|[s^\mu(u_1-u_2)+s^\mu(\hat{K}u_1-\hat{K}u_2)] \\ &\leqslant |\lambda| m[s^\mu(u_1-u_2)+(aI+\pi k)s^\mu(u_1-u_2)+bIh^\mu(u_1-u_2)] \\ &\leqslant |\lambda| m[(1+Ia+\pi k)s^\mu(u_1-u_2)+bIh^\mu(u_1-u_2)]. \end{aligned}$$

D'après la condition (29), on obtient

$$\begin{aligned} &h^\mu(\lambda Mu_1 - \lambda Mu_2) \\ &\leqslant |\lambda|[\sigma_1 s^\mu(u_1-u_2)+\sigma_2 s^\mu[\hat{K}u_1-\hat{K}u_2)+\sigma_3 h^\mu(u_1-u_2)+\sigma_4 h^\mu(\hat{K}u_1-\hat{K}u_2)] \\ &\leqslant |\lambda|[\sigma_1 s^\mu(u_1-u_2)+\sigma_2[(aI+\pi k)s^\mu(u_1-u_2)+bIh^\mu(u_1-u_2)]+ \\ &\quad +\sigma_3 h^\mu(u_1-u_2+\sigma_4[aDs^\mu(u_1-u_2)+bDh^\mu(u_1-u_2)] \\ &\leqslant |\lambda|\{[\sigma_1+\sigma_2 aI+\pi k)+\sigma_4 aD]s^\mu(u_1-u_2)+(\sigma_3+\sigma_2 bI+\sigma_4 bD)h^\mu(u_1-u_2)\}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\lambda Mu_1 - \lambda Mu_2\|_{H^\mu} &\leqslant |\lambda|\{[\sigma_1+m+aD\sigma_4+(aI+\pi k)(m+\sigma_2)]s^\mu(u_1-u_2)+ \\ &\quad +[\sigma_3+\sigma_4 bD+bI(m+\sigma_2)]h^\mu(u_1-u_2)\} \leqslant |\lambda| q^*\|u_1-u_2\|_{H^\mu}, \end{aligned}$$

où q^* est déterminée par la formule (31).

THÉORÈME 14. *Si la fonction $M(t, \xi, \eta)$ définie sur l'ensemble L^* satisfait aux conditions* (26) *et* (29) *et si la fonction $K(t, \tau, \xi)$ définie sur l'ensemble L satisfait aux conditions* (18) *et* (22), *alors pour*

$$|\lambda| < \min\left[\lambda_1, \frac{1}{q^*}\right] \tag{32}$$

l'équation non linéaire (16)

$$u(t) = \lambda M[t, u(t), \hat{K}u]$$

admet une solution unique appartenant à l'ensemble Z_1.

La conclusion résulte immédiatement du théorème 8', de la remarque consécutive au théorème 8', du théorème 13 et du théorème de Banach.

Opérations de la classe $\mathcal{H}_{\mu,\nu}$

1. Nous définirons une classe d'opérations satisfaisant aux conditions (21) et (22). Voici la définition de cette classe:

L'opération $G(t, \tau, \xi)$ déterminée pour $t, \tau \in L$, $\xi \in X$, prenant les valeurs de l'espace X *appartient à la classe* $\mathcal{H}_{\mu,\nu}$ si

$$G(t, \tau, \xi_1) - G(t, \tau, \xi_2) = G(t, \tau, \xi_1, \xi_2)[G_2(\xi_1-\xi_2)], \tag{33}$$

où

1. l'opération G_2 transforme l'espace X en lui-même;
2. $G_2(0) = 0$;
3. G_2 satisfait à la condition de Lipschitz:

$$\|G_2(\xi) - G_2(\xi')\| \leqslant g_2\|\xi - \xi'\|; \tag{34}$$

4. l'opération $G_1(t, \tau, \xi_1, \xi_2)[u]$ est linéaire pour t, τ, ξ_1, ξ_2 fixés ($u \in X$) et transforme l'espace X en lui-même;
5. G_1 satisfait à la condition

$$\begin{aligned} &\|G_1(t, \tau, \xi_1, \xi_2) - G_1(t', \tau', \xi_1', \xi_2')\|_{X\to X} \\ &\leqslant g_1[|t-t'|^\nu+|\tau-\tau'|^\mu+\|\xi_1-\xi_1'\|+\|\xi_2-\xi_2'\|] \quad (0<\mu<\nu\leqslant 1;\ g_1, g_2 > 0) \end{aligned} \tag{35}$$

où $X \to X$ désigne l'espace des opérations linéaires transformant l'espace X en lui-même.

D'après les conditions 2 et 3, nous avons

$$\|G_2(\xi)\| \leqslant g_2\|\xi\|. \tag{36}$$

THÉORÈME 15. *Une opération de la classe $\mathcal{H}_{\mu,\nu}$ satisfait sur l'ensemble Z aux conditions* (21) *et* (22) *avec les constantes*

$$k = g_0 g_2, \quad a = g_0 g_2, \quad b = g_1 g_2(1+2\varkappa), \tag{37}$$

où

$$g_0 = \sup_{t,\tau\in L;\|\xi_1\|\leqslant R;\|\xi_2\|\leqslant R} \|G_1(t, \tau, \xi_1, \xi_2)\|_{X\to X} \tag{37'}$$

(les constantes g_1 et g_2 figurent dans la définition de la classe $\mathcal{H}_{\mu,\nu}$, la constante $\varkappa$ dans la définition de l'ensemble Z, formule (5)).

Démonstration. Soit une opération arbitraire de la classe $\mathcal{H}_{\mu,\nu}$. Étudions la différence suivante:

$$\|[G(t,\tau,\xi_1)-G(t,\tau,\xi_2)]-[G(t',\tau',\xi_1')-G(t',\tau',\xi_2')]\|$$
$$\leqslant \|[G_1(t,\tau,\xi_1,\xi_2)-G(t',\tau',\xi_1',\xi_2')][G(\xi_1-\xi_2)]\|+$$
$$+\|G_1(t',\tau',\xi_1',\xi_2')[G_2(\xi_1-\xi_2)-G_2(\xi_1'-\xi_2')]\|$$
$$\leqslant \|G_1(t,\tau,\xi_1,\xi_2)-G_1(t',\tau',\xi_1',\xi_2')\|_{X\to X}\|G_2(\xi_1-\xi_2)\|+$$
$$+\|G_1(t',\tau',\xi_1',\xi_2')\|_{X\to X}\|G_2(\xi_1-\xi_2)-G_2(\xi_1'-\xi_2')\|$$
$$\leqslant g_1g_2\|\xi_1-\xi_2\|[|t-t'|^\nu+|\tau-\tau'|^\mu+\|\xi_1-\xi_1'\|+\|\xi_2-\xi_2'\|]+$$
$$+g_2\|G_1(t,\tau,\xi_1',\xi_2')\|_{X\to X}\|(\xi_1-\xi_2)-(\xi_1'-\xi_2')\|.$$

En outre nous avons

$$\|G(t,\tau,\xi_1)-G(t,\tau,\xi_2)\| = \|G_1(t,\tau,\xi_1,\xi_2)[G_2(\xi_1-\xi_2)]\|$$
$$\leqslant g_2\|G_1(t,\tau,\xi_1,\xi_2)\|_{X\to X}\|\xi_1-\xi_2\|.$$

Il en résulte (si $u_1, u_2\in Z$) que $G(t,\tau,u_1)-G(t,\tau,u_2)\in H^{\mu,\nu}$. En désignant cette différence par Gu_1-Gu_2 nous obtenons les inégalités suivantes:

$$h^{\mu,\nu}(Gu_1-Gu_2)\leqslant g_0g_2h^\mu(u_1-u_2)+g_1g_2(1+2\varkappa)s^\mu(u_1-u_2), \tag{38}$$

$$s^{\mu,\nu}(Gu_1-Gu_2)\leqslant g_0g_2s^\mu(u_1-u_2), \tag{38'}$$

d'où la conclusion du théorème.

2. Nous étudions maintenant les propriétés des opérations de la classe $\mathcal{H}_{\mu,\nu}$.

Théorème d'Hadamard. *Si l'opération U admet une différentielle forte $d_F U_x$, dépendant d'une manière continue de x, alors*

$$U(x)-U(y) = \int_0^1 d_F U_{y+\sigma(x-y)}d\sigma(x-y) \tag{39}$$

Démonstration. D'après la formule (*) (p. 249) nous avons

$$d_F U_{y+\sigma(x-y)} = \frac{d}{d\sigma}U[y+\sigma(x-y)]$$

d'où, en intégrant cette égalité par raport à σ, résulte la formule (39).

Théorème 16. *Si l'opération $G(t,\tau,\xi)$, dépendant des paramètres $t,\tau\in L$, admet une différentielle $d_F G_{t,\tau,\xi}$ satisfaisant à la condition*

$$\|d_FG_{t,\tau,\xi}-d_FG_{t',\tau',\xi'}\|_{X\to X}\leqslant c[|t-t'|^\nu+|\tau-\tau'|^\mu+\|\xi-\xi'\|] \tag{40}$$
$$(0<\mu<\nu\leqslant 1),$$

cette opération appartient à la classe $\mathcal{H}_{\mu,\nu}$.

Démonstration. D'après le théorème d'Hadamard, nous obtenons immédiatement

$$G_2(x-y)\equiv x-y \quad \text{et} \quad G_1(t,\tau,x,y) = \int_0^1 d_FG_{t,\tau,y+\sigma(x-y)}d\sigma,$$

et G_1 satisfait à la condition de Lipschitz avec le coefficient $c/2$ relativement à x, y. Nous avons en effet (en remarquant que $0\leqslant\sigma\leqslant 1$):

$$\|G_1(t,\tau,x,y)-G_1(t',\tau',x',y')\|_{X\to X}$$
$$\leqslant c\int_0^1\{|t-t'|^\nu+|\tau-\tau'|^\mu+\|[y+\sigma(x-y)]-[y'+\sigma(x'-y')]\|\}d\sigma$$
$$\leqslant c\Big\{[|t-t'|^\nu+|\tau-\tau'|^\mu]\int_0^1 d\sigma+\int_0^1(1-\sigma)d\sigma\|y-y'\|+\int_0^1\sigma d\sigma\|x-x'\|\Big\}$$
$$\leqslant c[|t-t'|^\nu+|\tau-\tau'|^\mu+\tfrac{1}{2}\|x-x'\|+\tfrac{1}{2}\|y-y'\|].$$

Il en résulte que l'opération $G(t,\tau,\xi)$ appartient à la classe $\mathcal{H}_{\mu,\nu}$.

Théorème 17. *Si l'opération $G(t,\tau,\xi)$ appartient à la classe $\mathcal{H}_{\mu,\nu}$ et si, pour tout $h\in X$ (suffisamment petit), il existe une suite de nombres positifs $r_j\to 0$ telle que la limite*

$$\lim_{\to\infty}\frac{G_2(r_j)}{r_j} \tag{γ}$$

existe, alors la différentielle forte $d_FG_{t,\tau,\xi}$ existe et elle satisfait à la condition (40).

Démonstration [3]. Nous démontrerons d'abord l'existence d'une différentielle faible droite, c'est-à-dire de la limite

$$d_G^+G_{t,\tau,\xi}(h) = \lim_{r_j\to+0}\frac{G(t,\tau,\xi+r_jh)-G(t,\tau,\xi)}{r_j}$$

[3] La démonstration du théorème 17 dans le cas d'une fonction réelle $G(t,\tau,\xi)$ de la variable réelle est due à M. A. Pliś.

pour tous les h suffisamment petits. Considérons la différence

$$G(t,\tau,\xi+nr_jh)-G(t,\tau,\xi)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}[G(t,\tau,\xi+kr_jh)-G(t,\tau,\xi+(k-1)r_jh]$$
$$=\Big\{\sum_{k=1}^{n}G_1(t,\tau,\xi+kr_jh,\xi+(k-1)r_jh]\Big\}[G_2(r_jh)]$$
$$=\Big\{nG_1(t,\tau,\xi,\xi)$$
$$+\sum_{k=1}^{n}[G_1\big(t,\tau,\xi+kr_jh,\xi+(k-1)r_jh\big)-G(t,\tau,\xi,\xi)]\Big\}[G_2(r_jh)].$$

Il en résulte, d'après les hypothèses faites sur la fonction G_2, qu'il existe un élément g_2^h de l'espace X tel que $G_2(r_jh)=r_jg_2^h+\alpha(r_j,h)$, où $\lim\limits_{j\to\infty}\alpha(r_jh)/r_j=0$. Donc

$$G(t,\tau,\xi+nr_jh)-G(t,\tau,\xi)-G_1(t,\tau,\xi,\xi)[nr_jg_2^h]$$
$$=nG_1(t,\tau,\xi,\xi)[\alpha(r_j,h)]+$$
$$+\Big\{\sum_{k=1}^{n}[G_1\big(t,\tau,\xi+kr_jh,\xi+(k-1)r_jh\big)-G_1(t,\tau,\xi,\xi)]\Big\}[g_2^hr_j+\alpha(r_j,h)].$$

Il résulte ensuite, d'après les hypothèses faites sur la fonction G_1, que

$$\|G_1(t,\tau,\xi+kr_jh,\xi+(k-1)r_jh)-G_1(t,\tau,\xi,\xi)\|_{X\to X}\leqslant 2g_1kr_j\|h\|,$$

d'où l'inégalité

(41)
$$\Big\|\sum_{k=1}^{n}[G_1\big(t,\tau,\xi+kr_jh,\xi+(k-1)r_jh\big)-G_1(t,\tau,\xi,\xi)]\Big\|_{X\to X}\leqslant n(n+1)g_1r_j\|h\|.$$

Soit un nombre positif arbitraire r. Il existe une suite de nombres naturels n_j telle que $n_jr_j\to r$. On voit facilement que $n_j\alpha(r_j,h)\to 0$, si nous divisons et multiplions $n_j\alpha(r_j,h)$ par r_j. D'après l'inégalité (41) nous obtenons en passant à la limite (si $j\to\infty$)

$$\|G(t,\tau,\xi+rh)-G(t,\tau,\xi)-rG_1(t,\tau,\xi,\xi)[g_2^h]\|\leqslant 2g_1r^2\|h\|\,\|g_2^h\|.$$

Alors il existe une différentielle faible droite $d_G^+G_{t,\tau,\xi}$ de la forme suivante:

$$d_G^+G_{t,\tau,\xi}=G_1(t,\tau,\xi,\xi)[g_2^h].$$

On peut démontrer par analogie l'existence d'une différentielle faible gauche $d_G^-G_{t,\tau,\xi}(h)=-G_1(t,\tau,\xi,\xi)[g_2^{-h}]$. L'égalité de ces différentielles résulte de la formule

$$G(t,\tau,\xi)-G(t,\tau,\xi+rh)=G_1(t,\tau,\xi,\xi+rh)[G_2(-rh)].$$

En effet, en divisant les deux membres de la dernière égalité par r et en faisant tendre r vers zéro par une suite r_j telle que $G_2(-r_jh)/r_j\to g_2^{-h}$, nous obtenons à la limite

$$-d_G^+G_{t,\tau,\xi}(h)=G_1(t,\tau,\xi,\xi)[g_2^{-h}].$$

Donc il existe une différentielle faible

$$d_GG_{t,\tau,\xi}(h)=G_1(t,\tau,\xi,\xi)[g_2^h].$$

Nous étudierons la différence suivante:

$$\|d_GG_{t,\tau,\xi}(h)-d_GG_{t',\tau',\xi'}(h')\|$$
$$=\left\|\lim_{r\to0}\frac{G(t,\tau,\xi+rh)-G(t,\tau,\xi)}{r}-\frac{G(t',\tau',\xi'+rh')-G(t',\tau',\xi')}{r}\right\|$$
$$=\left\|\lim_{r\to0}\frac{G_1(t,\tau,\xi+rh,\xi)[G_2(rh)]-G_1(t',\tau',\xi'+rh',\xi')[G_2(rh')]}{r}\right\|$$
$$\leqslant\lim_{r\to0}\Big\{\frac{g_1g_2r\|h\|[|t-t'|^\nu+|\tau-\tau'|^\mu+2\|\xi-\xi'\|+\|h-h'\|]}{r}+$$
$$+\frac{\|G_1(t',\tau',\xi'+rh,\xi'\|_{X\to X}g_2r\|h-h'\|}{r}\Big\}$$
$$=g_1g_2\|h\|[|t-t'|^\nu+|\tau-\tau'|^\mu+2\|\xi-\xi'\|]+$$
$$+[g_1g_2+g_2\|G(t',\tau',\xi',\xi')\|_{X\to X}]\|h-h'\|.$$

En conséquence, $d_GG_{t,\tau,\xi}$ est uniformément continue par rapport à ξ et h, donc d'après le théorème A (p. 248) elle est égale à la différentielle forte. En outre il résulte de la dernière égalité qu'elle vérifie la condition (40).

Corollaire. *Si X est un espace de Banach à un nombre fini de dimensions et si $G(t,\tau,\xi)\in\mathcal{H}_{\mu,\nu}$, il existe une différentielle forte satisfaisant á la condition* (40).

La conclusion s'obtient immédiatement, si nous remarquons que dans l'espace X à un nombre fini de dimensions il existe toujours une suite de nombres positifs $r_j\to0$ telle que la limite

$$\lim_{j\to\infty}\frac{G_2(r_jh)}{r_j}\ .$$

existe. Remarquons encore que l'hypothèse (γ) ne peut être omise comme le montre l'exemple de M. A. Alexiewicz [1].

3. On peut définir par analogie une classe d'opérations satisfaisant aux conditions (26) et (29), notamment:

L'opération $F(t, \xi, \eta)$ déterminée pour $t \in L$, $\xi, \eta \in X$ et prenant les valeurs de l'espace X, *est de la classe* $\mathcal{H}_\mu$ si

$$F(t, \xi_1, \eta_1) - F(t, \xi_2, \eta_2) = F_1(t, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)[F_2(\xi_1 - \xi_2)] + F_3(t, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)[F_4(\eta_1 - \eta_2)], \tag{42}$$

où les opérations F_2, F_4 satisfont à des conditions analogues à celle que remplit l'opération G_2 dans la définition des opérations de la classe $\mathcal{H}_{\mu,\nu}$, et les opérations F_1 et F_3 satisfont à des conditions analogues à celles que remplit l'opération G_1.

On voit que les propriétés des opérations de la classe $\mathcal{H}_\mu$ sont analogues à celles des opérations de la classe $\mathcal{H}_{\mu,\nu}$. Par exemple nous avons le

THÉORÈME 18. *Une opération de la classe $\mathcal{H}_\mu$ satisfait sur l'ensemble Z aux conditions* (26) *et* (29) *avec les constantes*

$$\begin{gathered} m = f_{01} f_2 + f_{03} f_4, \\ \sigma_{2i} = f_{2i} f_{0,2i-1}, \qquad \sigma_{2i-1} = f_{2i-1} f_{2i}(1+4\varkappa) \qquad (i = 1, 2), \end{gathered} \tag{43}$$

où

$$f_{0,2i-1} = \sup_{t \in L;\ \|\xi_i\| \leqslant R;\ k=1,\ldots,4} \|F_{2i-1}(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)\|_{X \to X}, \tag{45'}$$

les f_i désignant les coefficients de Hölder des fonctions F_i $(i = 1, \ldots, 4)$.

On voit aussi que les théorèmes, correspondant aux théorèmes 16 et 17, sont vrais.

4. Dans les considérations précédentes (concernant l'opération K) on a distingué deux classes d'opérations:

I. classe des opérations satisfaisant aux conditions (21) et (22);

II. classe $\mathcal{H}_{\mu,\nu}$.

La première est linéaire (page 257), la seconde est évidemment linéaire si l'espace X est à un nombre fini de dimensions (conclusion à la page 265), on ne sait cependant pas si elle est linéaire dans le cas d'un B-espace arbitraire. On ne sait pas non plus s'il existe une opération satisfaisant aux conditions (21) et (22) et n'appartenant pas à la classe $\mathcal{H}_{\mu,\nu}$. La distinction de ces classes est très commode encore sous un autre rapport, ce que nous montrerons par un exemple.

Désignons par X l'espace des nombres complexes avec la norme $|z|$. Si nous supposons que $K(t, \tau, \xi) \in \mathcal{H}_{\mu,\nu}$, alors K admet une différentielle forte par rapport à u et K est holomorphe. On peut généraliser cette supposition de la manière suivante.

On peut considérer l'espace X des nombres complexes comme le produit des espaces Y des nombres réels: $X = Y \times Y$. Désignons

$$\begin{aligned} \underline{K}(t, \tau, \xi) &= \operatorname{re} K(t, \tau, \xi), \\ \underline{\underline{K}}(t, \tau, \xi) &= \operatorname{im} K(t, \tau, \xi), \end{aligned} \qquad (\xi = x + iy).$$

Supposons maintenant que les opérations $\underline{K}$ et $\underline{\underline{K}}$ soient de la classe $\mathcal{H}_{\mu,\nu}$ (mais désormais au sens des nombres réels); alors chacune d'elles admet une différentielle forte, c'est-à-dire des dérivées partielles par rapport à x et y (satisfaisant à des conditions analogues à celles qui sont remplies pour la différentielle forte). Mais la classe des opérations satisfaisant aux conditions (21) et (22) est linéaire, d'où il résulte que l'opération $K = \underline{K} + i\underline{\underline{K}}$ satisfait aussi à ces conditions et qu'elle peut être non holomorphe.

On peut donner [13] un exemple d'une fonction réelle $K(t, \tau, \xi)$ de variables complexes telle que la derivée K'_x n'existe pas seulement en un point, mais la condition (22) n'est pas satisfaite et il n'existe pas de constante q, pour laquelle le théorème 11 soit vrai.

5. Si X est un B-espace, alors on voit, d'après les théorèmes 7 et 12, que pour $|\lambda| < \lambda_0$ il existe une solution de l'équation (13) et pour $|\lambda| < \min[\lambda_0; 1/q]$ il existe une solution unique de (13).

Nous donnerons un exemple d'une famille de fonctions telle que $1/q < \lambda_0$.

Soit la ligne L composée de l'intervalle fermé $[-1, 1]$ et de la ligne L' qui complète cet intervalle à une ligne fermée ayant une tangente continue en tout point.

Admettons

$$K_p(t, \tau, u) = \begin{cases} \operatorname{Re} u, & \text{si } \operatorname{Re} u > 1/p, \\ (p/4)(\operatorname{Re} u + 1/p)^2, & \text{si } 1/p \geqslant \operatorname{Re} u \geqslant -1/p, \\ 0, & \text{si } \operatorname{Re} u < -1/p \quad (p = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Il est évident que toutes les fonctions ont le même coefficient de Hölder et le même supremum du module, donc elles ont le même nombre λ_0.

Définissons deux suites:

$$u_n(t) = \begin{cases} 1 + t, & \text{si } -1 \leqslant t \leqslant -1 + 1/n, \\ 1/n, & \text{si } -1 + 1/n \leqslant t \leqslant 1 - 1/n, \\ 1 - t, & \text{si } 1 - 1/n \leqslant t \leqslant 1, \\ 0, & \text{si } t \in L', \end{cases}$$

$$u_n^*(t) = u_n(t) - \frac{2}{n}.$$

Nous avons $K_p(u_n^*) = 0$ pour $n \leqslant p$ et $\|u_n^*(t) - u_n(t)\| = 2/n$. Nous obtenons, par analogie avec le calcul du travail [13],

$$\|\hat{K}_p u_n^* - \hat{K}_p u_n\|_{H^\mu} \geqslant \frac{\ln n}{n} = \frac{1}{2} \ln n \, \|u_n^* - u_n\|_{H^\mu} \qquad (\text{pour } n \leqslant p).$$

On peut choisir un nombre p tel que $2/\ln p < \lambda_0$. Donc, il en résulte que pour $p > \exp 2/\lambda_0$ et pour toutes les fonctions K_p l'inégalité suivante est satisfaite: $1/q < \lambda_0$.

Le domaine d'existence des solutions de l'équation (13) est alors essentiellement plus grand que le domaine d'unicité.

Travaux cités

[1] A. Alexiewicz, *On a theorem of Ważewski*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 24 (1951), p. 129.

[2] А. И. Гусейнов, *Об одном классе нелинейных сингулярных интегральных уравнений*, Известия АН СССР 12 (1948), p. 193.

[3] А. Э. Эльсгольц, *Качественные методы в математическом анализе*, Москва 1955.

[4] Л. А. Люстерник и В. И. Соболев, *Элементы функционального анализа*, Москва-Ленинград 1951.

[5] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, Москва-Ленинград 1946.

[6] W. Pogorzelski, *O równaniach całkowych z osobliwością biegunową*, Sprawozdania Warsz. Tow. Politechnicznego, 1924.

[7] — *Sur l'équation intégrale non-linéaire de seconde espèce à forte singularité*, Ann. Pol. Math. 1954.

[8] — *Badanie równań całkowych mocno osobliwych metodą punktu niezmienniczego*, Biuletyn WAT 18 (1955).

[9] — *Sur le système d'équations intégrales à une infinité de fonctions inconnues*, Ann. Pol. Math. II. 1 (1955), p. 106.

[10] И. И. Привалов, *Введение в теорию функций комплексного переменного*, Москва-Ленинград 1948.

[11] D. Przeworska-Rolewicz, *Sur un système d'équations intégrales non linéaires de seconde espèce à une infinité de fonctions inconnues à singularité forte*, Bull. Ac. Pol. Sci, V. 5 (1957), p. 167.

[12] — *Sur l'application de la méthode des approximations successives à l'équation intégrale à forte singularité*, Ann. Pol. Math. VI. 2 (1958), p. 159.

[13] — *Remarque sur un résultat de Kropatchev*, Bull. Acad. Pol. Sci. VI. 12 (1958), p. 727.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 4. 11. 1958

STUDIA MATHEMATICA, T. XVIII. (1959)

Holomorphic vector-valued functions and Hartogs' theorems

by

R. E. EDWARDS (London)

1. The aim of this note is to show how certain parts of the existing theory of vector-valued holomorphic functions may be used to obtain close analogues of theorems of Hartogs (see e. g. [1], pp. 137-142) about functions of several complex variables. Hartogs' theorems themselves are not obtained in as much as we find it necessary to impose a priori conditions of local boundedness. However, repayment for this initial expense comes in the form of increased generality and the weakening of other hypotheses involved.

Holomorphic functions with values in a Banach space are discussed in [3], pp. 92 et seq. A briefer, more general, and in some respects more convenient account is given in § 2 of [2].

2. General results. In this section $\mathcal{E}$ will denote a Fréchet space, $\mathcal{E}'$ its topological dual, and $\langle\ ,\ \rangle$ the bilinear form expressing the duality between $\mathcal{E}$ and $\mathcal{E}'$.

PROPOSITION 1. *Let M be a locally compact space, μ a positive measure on M, φ a function mapping M into $\mathcal{E}$. Assume that the following conditions are satisfied:*

(1) *φ is olmost separably-valued;*

(2) *there exists a subset Λ of $\mathcal{E}'$ generating a vector subspace $[\Lambda]$ which is sequentially weakly dense in $\mathcal{E}'$ and such that, for each $L \in \Lambda$, the function*

$$t \to \langle \varphi(t), L \rangle$$

is μ-measurable;

(3) *$\int^* p(\varphi(t))\, d\mu(t) < +\infty$ for each continuous seminorm p on $\mathcal{E}$.*

Then the weak integral $\int \varphi(t)\, d\mu(t)$, a priori an element of the algebraic dual $\mathcal{E}'^*$ of $\mathcal{E}'$, in fact belongs to $\mathcal{E}$.

Proof. Thanks to (1) we may assume that $\mathcal{E}$ itself is separable. (2) shows at once that $t \to \langle \varphi(t), L \rangle$ is measurable for each L in E', and (3) shows that in addition this same function is μ-integrable. So the weak integral certainly exists as an element of $\mathcal{E}'^*$, say u. In order to show that u lies in $\mathcal{E}$, it suffices to show that the linear