Über partielle Differentialgleichungen vom elliptischen Typus mit singulären Koeffizienten

von

M. BURNAT (Warszawa)

Differentialoperatoren der Gestalt $\overset{(0)}{L}u + q(x)u$, wo $\overset{(0)}{L}u$ ein elliptischer Differentialoperator mit regulären Koeffizienten und $q(x)$ eine, mit Ausnahme einer bestimmten Punktmenge (in deren Umgebung sie unendlich wird), stetige Funktion ist, werden von Mathematikern erst seit verhältnismäßig kurzer Zeit untersucht. In einer Reihe von Arbeiten [2, 12, 16, 17, 13, 6, 7, 8] werden Operatoren der Gestalt $\Delta u + q(x)u$ untersucht, jedoch bei stetigem $q(x)$. Es handelt sich dort um wesentliche Selbstadjungiertheit [2], Existenz und Eigenschaften der Greenfunktion [12], Eindeutigkeit der Greenfunktion, was mit der wesentlichen Selbstadjungiertheit gleichbedeutend ist [17, 13], asymptotisches Verhalten der Eigenfunktionen und der Eigenwerte [16], das Verhalten des kontinuierlichen Spektrums in Abhängigkeit von $q(x)$ [6, 7, 8].

In Anbetracht der Anwendungen in der Quantenmechanik werden alle diese Probleme besonders interessant im Falle singulärer $q(x)$. Friedrichs' Arbeit [3] über wesentliche Selbstadjungiertheit $-\Delta u + q(x)u$ im Falle singulärer $q(x)$ und über einige Eigenschaften des entsprechenden Punktspektrums war der Anfang einer Reihe von Arbeiten [4, 10, 15] über wesentliche Selbstadjungiertheit des Operators $-\Delta u + q(x)u$ für unstetige $q(x)$.

Wenn wir in einem Operator $\overset{(0)}{L}u + q(x)u$ mit Singularitäten in $q(x)$ zu tun haben, so entstehen außer den genannten Problemen neue wichtige Fragen. Sie betreffen das Verhalten der Lösungen von $\overset{(0)}{L}u + q(x)u$ oder $\overset{(0)}{L}u + (q(x) - \lambda)u = f(x)$, wo f eine gegebene Funktion ist, in der Umgebung der singulären Punkte von $q(x)$ und $f(x)$. Die Quantenmechanik stellt an Lösungen dieser Art Bedingungen über das reguläre Verhalten in der Umgebung der singulären Stellen $q(x)$. In letzten Jahren erschienen drei Arbeiten über dieses Problem [1, 11, 15]. In [11] und [15] untersucht man unter anderem das Verhalten der Eigenfunktionen des Opera-

tors $-\Delta u + q(x)u$ in der Umgebung der singulären Stellen $q(x)$. Es zeigte sich nämlich, daß bei $q(x) = O(1/|P-x|^a)$, $a \leq 1$, die Eigenfunktionen des Punktspektrums in der Umgebung von P stetig sind und begrenzte Ableitungen erster Ordnung besitzen. Diese Abschätzungen erhält man mit Hilfe von Integralformeln, welche oft als Ausgangspunkt bei der Konstruktion der Greenfunktion des Operators $-\Delta u + (q(x) - \lambda)u$ (oder, wie wir sie später nennen werden, des *Resolventenkerns* des Operators $-\Delta w + q(x)w$) dienen. In [1] wurde das Verhalten der Lösungen der Gleichung $-\Delta u + q(x)u = \lambda^2 u$, wo λ^2 dem kontinuierlichen Spektrum angehört, u aber quadratisch nicht integrierbar ist, in der Umgebung der singulären Stellen untersucht.

Um die genannten Probleme zu untersuchen ist es offenbar zweckmäßig das Verhalten des Resolventenkerns des Operators $\overset{(0)}{L}u + q(x)u$ zu kennen. Es würde hier eine Analogie mit den klassischen Untersuchungsmethoden der Differentialgleichungen vom elliptischen Typus, nämlich mit der Erforschung der Eigenschaften der Lösungen auf Grund der Kenntnis der Fundamentallösung und der Greenschen Funktion eintreten.

In dieser Arbeit wird die Untersuchung der Eigenschaften des Resolventenkerns des Operators $\overset{(0)}{L}u + q(x)u$ in der Umgebung der singulären Stellen $q(x)$ durchgeführt. Man untersucht das Verhalten des Resolventenkerns und seiner Ableitungen bis zur zweiten Ordnung einschließlich, in Abhängigkeit von Singularitäten von $q(x)$. Als Anwendung wird die Abschätzung der Eigenfunktionen und ihrer Ableitungen einschließlich der zweiten Ordnung angegeben. Die Ergebnisse erlauben es die recht feine Abhängigkeit der Resolvente und der Eigenfunktionen von den lokalen Eigenschaften $q(x)$ zu verstehen. Es sei z. B. P eine singuläre Stelle von $q(x)$, l_1, l_2 zwei in P eingehende Kurven. Wir setzen voraus, daß $q(x)$ für $x \rightarrow P$ entlang l_1 zugleich mit ihren ersten Ableitungen begrenzt bleibt, jedoch für $x \rightarrow P$ entlang l_2 , $q(x)$ und ihre ersten Ableitungen unbegrenzt sind. Aus den erhaltenen Abschätzungen folgt, daß der Resolventenkern und die Eigenfunktionen mit ihren Ableitungen einschließlich der zweiten Ordnung auf l_1 begrenzt sind. Je nach dem Verhalten der $q(x)$ und ihrer ersten Ableitungen auf l_2 , sind die oben genannten Funktionen auf l_2 begrenzt oder nicht. Aus einfachen Beispielen folgt, daß die erhaltenen Abschätzungen den bestmöglichen nahe sind (siehe Bemerkung nach Satz 8). Ähnliche Abschätzungen kann man für das

nichthomogene Problem $\overset{(0)}{L}u + (q(x) - \lambda)u = f(x)$ erhalten. Die Abschätzungen sind abhängig vom Verhalten von $q(x)$ und $f(x)$.

Es scheint sehr wahrscheinlich zu sein, daß man aus den Abschätzungen des Resolventenkerns ausgehend, etwas über das Verhalten der

Spektralfunktion sagen kann. Danach könnte man vielleicht, der Gårdingsarbeit [9] folgend, das Verhalten der quadratisch nicht integrierbaren Eigenfunktionen auf kontinuierlichem Spektrum zu untersuchen. Die vorliegende Arbeit möge der erste Schritt auf diesem Wege sein. Der Einfachheit halber werden die Untersuchungen in drei Dimensionen durchgeführt. Ähnlich kann das Problem im n -dimensionalen Falle behandelt werden.

I. Voraussetzungen und Vorbemerkungen

Es sei Ω ein beliebiges Gebiet, $\partial\Omega$ seine Berandung ($\partial\Omega$ genügend glatt),

$$L(u) = \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik}(x_1, x_2, x_3) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + q(x_1, x_2, x_3)u$$

ein Operator vom elliptischen Typus, erklärt für $(x_1, x_2, x_3) = x \in \Omega$. Wir machen die Voraussetzung, daß die Koeffizienten $a_{ik}(x)$ hinreichend regulär sind, damit der Operator

$$\overset{(0)}{L}(u) = \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik}(x_1, x_2, x_3) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)$$

die Grundlösung $\varphi(x, y)$ besitze. Z. B. $a_{ik}(x)$ besitzt stetige Ableitungen vierter Ordnung (vgl. [14]). Die Funktion $q(x)$ ist stetig mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Punkten, beschränkter Kurven und beschränkter Flächen⁽¹⁾. Für jede Kugel $K \subset \Omega$ sei $\int_K |q|^2 dx < \infty$. Es existiert eine Zahl N und eine hinreichend große Kugel K_N , daß für $x \in \Omega - K_N$ die Ungleichung $|q(x)| < N$ gilt.

W bezeichnet eine symmetrische Randbedingung auf $\partial\Omega$, D die Menge der Funktionen $u(x)$, deren Ableitungen zweiter Ordnung in Ω stetig sind, auf $\partial\Omega$ die Randbedingung W erfüllen und außerhalb der Punktmenge $\Omega \cdot K_u$, wo K_u eine $u(x)$ entsprechende genügend große Kugel ist, verschwinden. Wir setzen voraus, daß für $u \in D$ der Operator $B(u) = L(u)$ wesentlich selbstadjungiert ist (d. h. daß er nach Abschließung selbstadjungiert ist). Über wesentliche Selbstadjungiertheit $B(u) = -\Delta u + q(x)u$ siehe [3, 4, 17, 10, 15].

Bei diesen Voraussetzungen ist die Resolvente R_λ einer selbstadjungierten Erweiterung A des Operators B , ein Integraloperator:

$$R_\lambda f = \int_\Omega H(x, s, \lambda) f(s) ds.$$

⁽¹⁾ Die Einschränkung auf beschränkte Punktmenge, Kurven und Flächen kann man ohne größere Schwierigkeiten beseitigen.

Der Resolventenkern $H(x, y, \lambda)$ besitzt die nachstehenden Eigenschaften:

(a) für jedes $\lambda \in SpA$ und für jedes beschränkte Gebiet Ω^0 , für welches $q(x)$ in $\overline{\Omega^0}$ stetig ist, existiert eine Konstante M so daß:

$$\int_{\Omega^0} |H(x, s, \lambda)|^2 ds < M \quad \text{für} \quad x \in \Omega^0.$$

(b) $h(x, y, \lambda) = H(x, y, \lambda) - \varphi(x, y)$ ist stetig in x als auch in y . $\partial h(x, y, \lambda)/\partial x$ und $\partial^2 h(x, y, \lambda)/\partial x^2$ sind stetig für $x \neq y$. Weiter

$$\frac{\partial h(x, y, \lambda)}{\partial x} = O(\ln|x-y|) \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 h(x, y, \lambda)}{\partial x^2} = O\left(\frac{1}{|x-y|}\right)$$

(siehe [5], S. 18, Formel (22.2)).

(c) $H(x, y, \lambda) = H(y, x, \bar{\lambda})$.

(d) $\int_{\Omega^0} |H(x, s, \lambda) - H(x', s, \lambda)|^2 ds \rightarrow 0$ für $x \rightarrow x'$, wenn $q(x)$ in der Umgebung von x' stetig ist.

(e) K_i ($i = 1, 2$) bedeuten offene Kugel, $\bar{K}_1 \subset K_2$, welche die Eigenschaft besitzen daß $q(x)$ für $x \in \bar{K}_i$ stetig ist ($\bar{K}$ bedeutet die Kugel mit ihrer Berandung).

Wenn die Funktion $\Psi(s, x) = \Psi^{(\alpha)}(s, x)g(s)$ folgende Bedingungen erfüllt:

- I. $\Psi^{(\alpha)}(s, x)$ ist für $s \in K_1$ und $y \in K_2$ erklärt und stetig in beiden Veränderlichen wenn $s \neq y$;
- II. $\Psi^{(\alpha)}(s, x) = O(1/|s-x|^\alpha)$, $\alpha > 0$;
- III. $g(s)$ ist außerhalb einer endlichen Anzahl von Punkten, Kurven oder Flächen stetig und $\int_{K_1} g^2(s) ds < +\infty$;

dann gilt, für $\alpha < 3/2$,

$$(1) \quad \int_{K_1} H(s, y, \lambda) \Psi(s, x) ds = \eta(-, x) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \eta(-, x'), \quad y \in \Omega, \quad x \rightarrow x' \in K_2.$$

Wenn $g(s)$ begrenzt ist, dann (1) gilt für $\alpha < 3$.

Beweis. Es ist bekannt (z. B. [5], S. 16-17), daß der Resolventenkern sich folgend, für $s \in K_1$, $y \in \Omega$, darstellen läßt:

$$(2) \quad H(s, y, \lambda) = H_1(s, y) + \lambda \overline{R_1(H_1(s, -))}(y) + \overline{R_1(H_2(s, -))}(y),$$

wo die Funktionen H_i ($i = 1, 2$) folgende Eigenschaften besitzen:

1° $H_i(s, y) = 0$ für $s \in K_1$, $y \in \Omega - K_2$;

2° $H_1(s, y) - \varphi(s, y)$ ist für $s \in K_1$, $y \in K_2$ stetig und begrenzt in beiden Veränderlichen;

3° $H_2(s, y) - q(y) \cdot \varphi(s, y)$ ist für $s \in K_1$, $y \in K_1$ stetig und begrenzt in beiden Veränderlichen. Dasselbe betrifft die Funktion $H_2 - q\varphi$ für $s \in K_1$, $y \in K_2 - K_1$;

4° Aus 2° und 3° folgt unmittelbar $|H_i(s, y)| < M/|s-y|$ für $s \in K_1$, $y \in K_2$;

5° $H_i(s, y)$ besitzt für $s \neq y$ stetige erste Ableitungen, welche die Ungleichung

$$\left| \frac{\partial H_i(s, y)}{\partial s} \right| < \frac{M}{|s-y|^2} \quad \text{für} \quad s \in K_1, \quad y \in K_2$$

erfüllen.

Wenn wir (2) mit $\Psi(s, x)$ multiplizieren und beiderseitig integrieren werden, ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{K_1} H(s, y, \lambda) \Psi(s, x) ds &= \int_{K_1} H_1(s, y) \Psi(s, x) ds + \\ &+ \int_{K_1} \lambda \int_{K_2} \overline{H(y, t, \bar{\lambda}) H_1(s, t)} dt \Psi(s, x) ds + \int_{K_1} \overline{H(y, t, \bar{\lambda}) H_2(s, t)} dt \Psi(s, x) ds, \end{aligned}$$

wo wir die Integrationsfolge wechseln können. Das ergibt:

$$\begin{aligned} \eta(-, x) &= \int_{K_1} H_1(s, y) \Psi(s, x) ds + \\ &+ \lambda \int_{\Omega} \overline{H(y, t, \bar{\lambda})} \left[\int_{K_1} H_1(s, t) \Psi(s, x) ds \right] dt + \\ &+ \int_{\Omega} \overline{H(y, t, \bar{\lambda})} \left[\int_{K_1} H_2(s, t) \Psi(s, x) ds \right] dt, \end{aligned}$$

oder

$$(2_A) \quad \eta(-, x) = \gamma_1(-, x) + \lambda \overline{R_1(\gamma_1(-, x))}(y) + \overline{R_1(\gamma_2(-, x))}(y),$$

wo

$$\gamma_i(t, x) = \begin{cases} \int_{K_1} H_i(s, t) \Psi(s, x) ds & \text{für} \quad t \in K_2, \\ 0 & \text{für} \quad t \in \Omega - K_2. \end{cases}$$

Weiter, aus I, II, III und 1°, 2°, 3°, 4° ausgehend, läßt sich zeigen, daß $\gamma_i(-, x) \xrightarrow{L^2(K_2)} \gamma_i(-, x')$ für $x \rightarrow x'$ ($x, x' \in K_2$). Nämlich für jede Folge

$x_n \rightarrow x'$ gelten die Ungleichungen

$$|\gamma_i(t, x_n) - \gamma_i(t, x)| \leq N \sqrt{\int_{K_1} \left| \frac{1}{|s - x_n|^a} - \frac{1}{|s - x'|^a} \right|^2 \frac{ds}{|t - s|^2}}$$

für $\alpha < \frac{3}{2}$, $\int_{K_1} g^2(s) ds < +\infty$, N konstant,

$$|\gamma_i(t, x_n) - \gamma_i(t, x)| \leq M \int_{K_1} \left| \frac{1}{|s - x_n|^a} - \frac{1}{|s - x'|^a} \right| \frac{ds}{|t - s|}$$

für $\alpha < 3$, $g(s)$ begrenzt, M konstant, welche ergeben

$$\gamma_i(-, x) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \gamma_i(-, x') \quad \text{für } x \rightarrow x' \ (x, x' \in K_2),$$

und schließlich aus (2_A) bekommen wir die Eigenschaft (1).

(f) Es soll K_r eine Kugel mit Radius r und P als Zentrum sein. Wir führen die neue Funktion $\tilde{\varphi}(x, y)$ ein:

$$\tilde{\varphi}(x, y) = \begin{cases} \varphi(x, y) & \text{für } x \in K_r, y \in K_{r+a}, \\ 0 & \text{für } x \in K_r, y \in \Omega - K_{r+2a}; \end{cases}$$

außerdem besitzt $\tilde{\varphi}(x, y)$ für $x \in K_r$, $y \in K_{r+2a} - K_{r+a}$ stetige Ableitungen in x und y bis zur zweiten Ordnung einschließlich. Die Zahlen r und a sind so gewählt, daß $q(x)$ stetig in $\bar{K}_{r+2a}$ ist.

Wenn wir jetzt schreiben, daß

$$\tilde{h}(s, y, \lambda) = H(s, y, \lambda) - \tilde{\varphi}(s, y), \quad \tilde{h}_i(s, y) = H_i(s, y) - \tilde{\varphi}(s, y),$$

dann erhält die Gleichung (2) folgende Gestalt:

$$(3) \quad \begin{aligned} \tilde{h}(s, y, \lambda) = & \tilde{h}_1(s, y) + \lambda \overline{R_{\tilde{1}}(H_1(s, -))}(y) + \\ & + \overline{R_{\tilde{2}}(H_2(s, -))}(y), \quad s \in K_1, y \in \Omega, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \tilde{h}(s, y, \lambda) = & \tilde{h}_1(s, y) + \lambda \int_{K_2} \overline{H(y, t, \bar{\lambda}) H_1(s, t)} dt + \\ & + \int_{K_2} \overline{H(y, t, \bar{\lambda}) H_2(s, t)} dt, \quad s \in K_1, y \in \Omega. \end{aligned}$$

Differenzierung der letzten Formel ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{h}(s, y, \lambda)}{\partial s} = & \frac{\partial \tilde{h}_1(s, y)}{\partial s} + \lambda \int_{K_2} \overline{H(y, t, \bar{\lambda})} \frac{\partial H_1(s, t)}{\partial s} dt + \int_{K_2} \overline{H(y, t, \bar{\lambda})} \frac{\partial H_2(s, t)}{\partial s} dt. \end{aligned}$$

Wenn wir jetzt in (1) $\Psi(t, s) = \partial H_i(s, t)/\partial s$ einsetzen, dann, wegen der Eigenschaft 5° der Funktionen $H_i(s, t)$, bekommt man

$$(4) \quad \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \tilde{h}(s, y, \lambda)}{\partial s} \right|^2 dy < +\infty$$

und

$$(5) \quad \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \tilde{h}(s, y, \lambda)}{\partial s} - \frac{\partial \tilde{h}(s', y, \lambda)}{\partial s} \right|^2 dy \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow s' \in K_1).$$

Wir werden noch die Eigenschaften der Fundamentallösung angeben:

(α) Symmetrieeigenschaft: $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$;

(β) Für festgehaltene y und $x \neq y$ ist $\varphi(x, y)$ stetig, besitzt stetige Ableitungen in x bis zur zweiten Ordnung einschließlich;

(γ) $\partial \varphi(x, y)/\partial x = -\partial \varphi(x, y)/\partial y + O(1/|x - y|)$;

(δ) Die Funktion $\varphi(x, y)$ erfüllt für $x \neq y$ im Gebiete Ω die Gleichung⁽⁹⁾
 $L_x \varphi = 0$;

(μ) Mit Hilfe der Funktion $\varphi(x, y)$ kann man das Potenzial $u(x) = \int_{K_r} \varphi(x, y) f(y) dy$ bauen. Wenn $f(y)$ eine in K_r stetig differenzierbare Funktion ist, dann

$$L(u) = \begin{cases} -f(x) & \text{für } x \in K_r, \\ 0 & \text{für } x \in \Omega - K_r; \end{cases}$$

(ν) $\varphi(x, y) = O(1/|x - y|)$.

II. Integralgleichungen zur Untersuchung von $H(x, y, \lambda)$

Der Einfachheit halber nehmen wir an, $q(x)$ habe nur einen singulären Punkt P . Wir zerlegen $q(x)$ in eine Summe $q(x) = q_s^{(1)}(x) + q_s^{(2)}(x)$ derart, daß $q_s^{(1)}(x)$ für $x \in \Omega - K_\varepsilon$ ($K_\varepsilon = \{x: |x - P| \leq \varepsilon\}$) verschwindet, $q_s^{(1)}(x) = q(x)$ für $x \in K_{\varepsilon/2}$, und daß $q_s^{(2)}(x)$ mit Ausnahme von P eine stetige Funktion ist.

Wir bezeichnen: $\overset{(1)}{L}(u) = \overset{(0)}{L}(u) + q_s^{(1)}(x)u$, oder $\overset{(1)}{L}(u) = Lu + q_s^{(2)}(x)u$. Auf Grund unserer Voraussetzungen sind die für $u \in D$ erklärten Operatoren $\overset{(0)}{B}(u) = \overset{(0)}{L}(u)$, $\overset{(1)}{B}(u) = \overset{(1)}{L}(u)$, $\overset{(2)}{B}(u) = \overset{(2)}{L}(u)$ wesentlich selbstadjungiert, $\overset{(0)}{A}$, $\overset{(1)}{A}$, $\overset{(2)}{A}$ bezeichnen die selbstadjungierten Erweiterungen der Operatoren $\overset{(0)}{B}$, $\overset{(1)}{B}$, $\overset{(2)}{B}$. Die Resolventen von $\overset{(0)}{A}$, $\overset{(1)}{A}$, $\overset{(2)}{A}$ bezeichnen wir entsprechend durch $\overset{(0)}{R}_\lambda$, $\overset{(1)}{R}_\lambda$, $\overset{(2)}{R}_\lambda$ und ihre Kerne durch $\overset{(0)}{H}(x, y, \lambda)$, $\overset{(1)}{H}(x, y, \lambda)$, $\overset{(2)}{H}(x, y, \lambda)$. Für $\lambda \notin SpA$ ist $(A - \lambda I)(D)$ eine in $L^2(\Omega)$ dichte Menge (Folge aus der wesentlichen Selbstadjungiertheit von $\overset{(0)}{B}(u)$), und aus $f \in (A - \lambda I)(D)$ folgt $\overset{(1)}{R}_\lambda f \in D$.

Wir haben

$$\begin{aligned} f &= (A - \lambda I)R_\lambda f = (\overset{(1)}{B} + q_s^{(2)} - \lambda I)\overset{(1)}{R}_\lambda f \\ &= (\overset{(1)}{B} - \lambda I)\overset{(1)}{R}_\lambda f + q_s^{(2)}\overset{(1)}{R}_\lambda f. \end{aligned}$$

Durch beiderseitige Anwendung von $\overset{(1)}{R}_\lambda$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{R}_\lambda f &= \overset{(1)}{R}_\lambda f + \overset{(1)}{R}_\lambda(q_s^{(2)}\overset{(1)}{R}_\lambda f), \\ \int_\Omega \overset{(1)}{H}(x, s, \lambda)f(s)ds &= \int_\Omega \overset{(1)}{H}(x, s, \lambda)f(s)ds + \\ &+ \int_\Omega \overset{(1)}{H}(x, s, \lambda)q_s^{(2)}(s) \int_\Omega \overset{(1)}{H}(s, t, \lambda)f(t)dt ds \end{aligned}$$

identisch für $f \in (A - \lambda I)(D)$, und schließlich

$$(6) \quad \overset{(1)}{H}(x, y, \lambda) = \overset{(1)}{H}(x, y, \lambda) - \int_{\Omega - K_{s/2}} \overset{(1)}{H}(x, s, \lambda)q_s^{(2)}(s)\overset{(1)}{H}(s, y, \lambda)ds$$

für $x, y \in \Omega - P$, $\lambda \notin SpA + SpA$.

Auf ähnliche Weise erhalten wir

$$(7) \quad \overset{(1)}{H}(x, y, \lambda) = \overset{(0)}{H}(x, y, \lambda) - \int_{K_s} \overset{(0)}{H}(x, s, \lambda)q_s^{(1)}(s)\overset{(1)}{H}_s(s, y, \lambda)ds$$

für $x, y \in \Omega - P$, $\lambda \notin SpA + SpA$.

Wir beweisen den

HILFSSATZ 1. Wir haben

$$(8) \quad \overset{(1)}{H}(x, -, \lambda) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \overset{(1)}{g}(-, \lambda) \in L^2(\Omega),$$

$$(9) \quad \overset{(1)}{H}(x, -, \lambda) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \overset{(1)}{g}(-, \lambda) \in L^2(\Omega)$$

für $x \rightarrow P$.

Beweis. Die Iterierung der Gleichung (7) ergibt

$$(10) \quad \overset{(1)}{H}(x, y, \lambda) = \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^\mu \overset{(0)}{\vartheta}_\mu(x, y, \lambda) + (-1)^n \int_{K_s} \overset{(0)}{\vartheta}_n(x, s, \lambda)q_s^{(1)}(s)\overset{(1)}{H}(s, y, \lambda)ds,$$

wo

$$\overset{(0)}{\vartheta}_\mu(x, y, \lambda) = \int_{K_s} \overset{(0)}{\vartheta}_{\mu-1}(x, s, \lambda)q_s^{(1)}(s)\overset{(0)}{H}(s, y, \lambda)ds \quad (\mu = 1, 2, \dots, n)$$

und $\overset{(0)}{\vartheta}_0(x, y, \lambda) = \overset{(0)}{H}(x, y, \lambda)$.

Wenn wir jetzt $\overset{(1)}{\Psi}(s, x) = \overset{(0)}{\vartheta}_{\mu-1}(x, s, \lambda)q_s^{(1)}(s)$ setzen, dann erhalten wir auf Grund der Resolventenkerneigenschaft (e)

$$(11) \quad \overset{(0)}{\vartheta}_\mu(x, -, \lambda) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \overset{(0)}{\vartheta}_\mu(P, -, \lambda)$$

für $x \rightarrow P$, $\mu = 1, 2, \dots, n-1$.

Weiter $\overset{(0)}{\vartheta}_n(x, y, \lambda)$ ist für hinreichend großes n in x und y begrenzt, so daß

$$\overset{(0)}{\vartheta}_n(x, -, \lambda)q_s^{(1)}(-) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \overset{(0)}{\vartheta}_n(P, -, \lambda)q_s^{(1)}(-) \quad (x \rightarrow P).$$

Das letzte Glied der Gleichung (10) werden wir jetzt mit $\overset{(1)}{W}(x, y, \lambda)$ bezeichnen und in folgender Form schreiben:

$$\overset{(1)}{W}(x, y, \lambda) = (-1)^n \overset{(1)}{R}_\lambda(\overset{(0)}{\vartheta}_n(x, -, \lambda)q_s^{(1)}(-))(y).$$

Daraus folgt auf Grund der Eigenschaften der Resolvente

$$(12) \quad \overset{(1)}{W}(x, -, \lambda) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \overset{(1)}{\omega}(-) \in L^2(\Omega) \quad (x \rightarrow P).$$

(10), (11) und (12) ergibt (8).

Die Gleichung (6) kann in der Gestalt

$$(13) \quad \overset{(1)}{H}(x, y, \lambda) = \overset{(0)}{H}(x, y, \lambda) + \overset{(1)}{R}_\lambda(\overset{(1)}{H}(x, -, \lambda)q_s^{(1)}(-))(y)$$

geschrieben werden.

(8) und (13) ergibt (9).

Als erste Folgerung aus dem Hilfssatz erhalten wir

SATZ 1. Die Eigenfunktionen f_λ auf diskrettem Spektrum des Operators A ($Af_\lambda = \lambda f_\lambda$) sind stetig (sogar in der singulären Stelle P von $q(x)$).

Zum Beweise genügt es $\mu \notin SpA$ anzunehmen, zu bemerken, daß $f_\lambda(x) = (\lambda - \mu) R_\mu f_\lambda(x) = (\lambda - \mu) \int_G H(x, s, \mu) f_\lambda(s) ds$, und die Stetigkeit des Skalarproduktes in $L^2(\Omega)$ zu benutzen.

Als weitere Folgerung aus dem Hilfssatz 1 und aus der Gleichung (6) erhalten wir die

Bemerkung. Wir haben

$$(14) \quad H(x, y, \lambda) = \overset{(1)}{H}(x, y, \lambda) - \zeta(x, y, \lambda),$$

wo $\zeta(x, y, \lambda)$ eine in der Umgebung von P stetige Funktion beider Veränderlichen x, y ist. Wenn wir also $H(x, y, \lambda)$ in der Umgebung von P untersuchen wollen, dann genügt es das Verhalten von $\overset{(1)}{H}(x, y, \lambda)$ zu studieren.

Offenbar bleiben die Gleichungen (6) und (7), der Hilfssatz 1, Satz 1 und die Bemerkung gültig, wenn die Menge der singulären Punkte aus einer endlichen Anzahl der Punkte, beschränkter Kurven und beschränkter Flächen besteht. Es genügt an Stelle von K_ε eine ε -Umgebung der singulären Punkte von $q(x)$ zu nehmen.

III. Eigenschaften der Funktion $H(x, y, \lambda)$

Wir führen drei Banachräume $B_{y,K}$, B_y und B ein. Es bezeichne M_y die Familie der für $x \in K_\varepsilon$ erklärten Funktionen von der Gestalt

$$u(x) = a \cdot \varphi(x, y) + v(x)$$

bei fixiertem $y \neq P$, wo a eine komplexe Zahl und $v(x)$ eine in K_ε stetige Funktion ist.

Für $u \in M_y$ führen wir folgende Normen ein:

$$(15) \quad \|u\|_{B_{y,K}} = |a| + \sup_{K_\varepsilon - K} |v| + \sqrt{\int_K v^2(x) dx}, \quad K \subset K_\varepsilon, \quad y \in K_\varepsilon - K^{(2)},$$

$$(16) \quad \|u\|_{B_y} = |a| + \sup_{K_\varepsilon} |v|.$$

M_y mit der Norm (15) stellt keinen vollständigen Raum dar. Den hieraus durch Abschließen erhaltenen vollständigen Raum bezeichnen wir mit $B_{y,K}$. M_y mit der Norm (16) stellt einen vollständigen Banachraum dar. Wir bezeichnen ihn durch B_y . Schließlich bezeichne B den Raum aller auf K_ε stetigen Funktionen, mit der Norm $\|u\|_B = \sup_{K_\varepsilon} |u|$.

⁽²⁾ K bedeutet eine beliebige Kugel mit P als Zentrum.

Für die Räume gilt im Sinne der Mengenlehre

$$(17) \quad B \subset B_y \subset B_{y,K}.$$

Aus den Eigenschaften des Resolventenkernes folgt

$$(18) \quad \overset{(0)}{H}(-, y, \lambda) \in B_y, \quad y \in K_\varepsilon,$$

und

$$(19) \quad \overset{(1)}{H}(-, y, \lambda) \in B_{y,K}, \quad y \in K_\varepsilon - K.$$

K ist eine beliebige Kugel mit P als Zentrum, für welche $K \subset K_\varepsilon$ gilt.

Wir führen den Integraloperator

$$F_\lambda^{(0)}(u)(x) = -R_\lambda(q_\varepsilon^{(1)}(-) \cdot u(-))(x) = - \int_{K_\varepsilon} \overset{(0)}{H}(x, s, \lambda) q_\varepsilon^{(1)}(s) u(s) ds$$

ein.

Es gelten die folgenden Ungleichungen ⁽³⁾:

$$(20) \quad |F_\lambda^{(0)}(u)(x)| \leq \sqrt{\int_{K_\varepsilon} |\overset{(0)}{H}(x, s, \lambda) q_\varepsilon^{(1)}(s)|^2 ds} \left(|a| \sqrt{\int_{K_\varepsilon} |\varphi(s, y)|^2 ds} + \sqrt{\int_{K_\varepsilon} |v(s)|^2 ds} \right)$$

für $u(s) = a\varphi(s, y) + v(s) \in B_{y,K}$, $x \neq P$, $x \in K_\varepsilon$;

$$(21) \quad |F_\lambda^{(0)}(u)(x)| \leq \sqrt{\int_{K_\varepsilon} |\overset{(0)}{H}(x, s, \lambda)|^2 ds} \left(|a| \sqrt{\int_{K_\varepsilon} |q_\varepsilon^{(1)}(s) \varphi(s, y)|^2 ds} + \sqrt{\int_{K_\varepsilon} |q_\varepsilon^{(1)}(s) v(s)|^2 ds} \right)$$

für $u(s) = a\varphi(s, y) + v(s) \in B_y$, $x \in K_\varepsilon$.

Aus den Ungleichungen (20), (21) und aus den Eigenschaften der Resolvente folgt

$$F_\lambda^{(0)}(B_{y,K}) \subset B_{y,K} \quad \text{und} \quad F_\lambda^{(0)}(B_y) \subset B_y \quad (4).$$

⁽³⁾ Sie sind einfache Folgen der Schwarzischen Ungleichung.

⁽⁴⁾ Offenbar ist auch $F_\lambda^{(0)}(B) \subset B$.

Wir werden zum Beispiel zeigen, daß $F_\lambda^{(e)}(B_{y,K}) \subset B_{y,K}$. Es sei $h(x) = F_\lambda^{(e)}(u)(x)$, wo $u \in B_{y,K}$. Aus der Stetigkeit der Funktion

$$l(x) = \int_{K_\varepsilon}^{(0)} |H(x, s, \lambda) q_\varepsilon^{(1)}(s)|^2 ds$$

für $x \in K$, $x \neq P$, und aus der Ungleichung (20) folgt, daß $h(x)$ stetig für $x \in K_\varepsilon$, $x \neq P$, ist. Weiter, die Funktion $l(x)$ ist summierbar. Nämlich

$$|l(x)| \leq N \int_{K_\varepsilon} \frac{|q_\varepsilon^{(1)}(s)|^2}{|x-s|^2} ds \quad (x \in K_\varepsilon),$$

wo N eine passende Konstante ist.

Das Integral

$$\int_{K_\varepsilon} |q_\varepsilon^{(1)}(s)|^2 \left[\int_{K_\varepsilon} \frac{dx}{|x-s|^2} \right] ds$$

existiert, weil $\int_{K_\varepsilon} dx/|x-s|^2$ ist für $s \in K_\varepsilon$ begrenzt. Also existiert auch

$$\int_{K_\varepsilon} \left[\int_{K_\varepsilon} \frac{|q_\varepsilon^{(1)}(s)|^2}{|x-s|^2} ds \right] dx.$$

Schließlich, aus der Ungleichung (20) bekommen wir, daß $h(x)$ nicht nur stetig für $x \in K_\varepsilon$, $x \neq P$, ist, sondern auch $\int_{K_\varepsilon} h^2(x) dx < +\infty$. Daraus folgt $h(-) \in B_{y,K}$.

Zum Beweise, daß $F_\lambda^{(e)}(B_y) \subset B_y$ ist, wird die Ungleichung (21) ausgenutzt.

Weiter, aus den Ungleichungen (20) und (21) folgt, daß für hinreichend kleines ε ,

$$(22) \quad \|F_\lambda^{(e)}\|_{B_{y,K}} < 1, \quad \|F_\lambda^{(e)}\|_{B_y} < 1, \quad \|F_\lambda^{(e)}\|_B < 1$$

ist.

Beispielsweise werden wir die Ungleichung $\|F_\lambda^{(e)}\|_{B_{y,K}} < 1$ beweisen.

Es sei $u(x) = \alpha\varphi(x, y) + v(x)$ eine beliebige Funktion, die dem Raume $B_{y,K}$ angehört und $\|u\|_{B_{y,K}} \leq 1$. Dann bekommen wir aus (20):

$$|F_\lambda^{(e)}(u)(x)| \leq L \sqrt{\int_{K_\varepsilon}^{(0)} |H(x, s, \lambda) q_\varepsilon^{(1)}(s)|^2 ds},$$

wo L eine passende, von ε und u unabhängige Konstante ist. Also, wegen der Stetigkeit der Funktion $F_\lambda^{(e)}(u)(x)$ für $x \in K_\varepsilon$, $x \neq P$, folgt, daß

$$\begin{aligned} \|F_\lambda^{(e)}(u)\|_{B_{y,K}} &\leq L \sup_{x \in K_\varepsilon - K} \sqrt{\int_{K_\varepsilon}^{(0)} |H(x, s, \lambda) q_\varepsilon^{(1)}(s)|^2 ds} + \\ &+ L \sqrt{\int_{K_\varepsilon}^{(0)} |H(x, s, \lambda) q_\varepsilon^{(1)}(s)|^2 ds dx}. \end{aligned}$$

Das erste Glied der rechten Seite strebt gegen Null für $\varepsilon \rightarrow 0$, weil $\stackrel{(0)}{H}(x, s, \lambda)$ die einfache Gestalt $\stackrel{(0)}{H}(x, s, \lambda) = h(x, s, \lambda) + \varphi(x, s)$ hat (h stetig in beiden Veränderlichen x und s). Weiter aus dem Beweis, $F_\lambda^{(e)}(B_{y,K}) \subset B_{y,K}$ wissen wir, daß das Integral

$$\int_{K_\varepsilon} \int_{K_\varepsilon} \stackrel{(0)}{H}(x, s, \lambda) q_\varepsilon^{(1)}(s) dx ds < +\infty$$

ist. Daraus folgt, daß auch das zweite Glied der rechten Seite unserer Ungleichung für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen Null strebt, was den Beweis beendet.

Wenn ε so klein ist, daß (22) stattfindet, erhalten wir den

HILFSSATZ 2. Wenn $g(x)$ einem von den Räumen $B_{y,K}$, B_y , B angehört, dann besitzt die Gleichung

$$(23) \quad u(x) = g(x) + F_\lambda^{(e)}(u)(x), \quad \lambda \notin SpA,$$

eine einzige Lösung, die entsprechend in $B_{y,K}$, B_y oder in B liegt.

Der Beweis folgt sofort aus dem Banachschen Kontraktionsprinzip.

Die Gleichung (7) kann in der Gestalt

$$(24) \quad \stackrel{(1)}{H}(x, y, \lambda) = \stackrel{(0)}{H}(x, y, \lambda) + F_\lambda^{(e)}(\stackrel{(1)}{H}(-, y, \lambda))(x)$$

geschrieben werden.

Aus (24), (18), (19) und dem Hilfssatz 2 folgern wir, daß die Funktion

$\stackrel{(1)}{H}(x, y, \lambda)$ ($x, y \in K_\varepsilon$) im Raume $B_{y,K}$ die einzige Lösung der Gleichung

$$(25) \quad u(x, y) = \stackrel{(0)}{H}(x, y, \lambda) + F_\lambda^{(e)}(u(-, y))(x)$$

darstellt.

Weiter folgt aus (18) und aus dem Hilfssatz 2, daß (25) im Raume B_y eine und nur eine Lösung besitzt. Wegen (17) ist $\overset{(1)}{H}(x, y, \lambda)$ also auch die einzige Lösung von (25) in B_y . Also

$$(26) \quad \overset{(1)}{H}(-, y, \lambda) \in B_y \quad (y \in K_\varepsilon).$$

Hieraus folgt unmittelbar

Satz 2. $H(x, y, \lambda)$ ist für jedes $y \neq P$ in der Umgebung von P eine bezüglich x stetige Funktion.

Aus Gleichung (24) und aus den allgemeinen Eigenschaften des Resolventenkernes erhalten wir die Gleichung

$$(27) \quad \overset{(1)}{h}(x, y, \lambda) - F_\lambda^{(e)}(\overset{(1)}{h}(-, y, \lambda))(x) = \overset{(0)}{h}(x, y, \lambda) + F_\lambda^{(e)}(\varphi(-, y))(x),$$

wo $\overset{(v)}{h}(x, y, \lambda) = \overset{(v)}{H}(x, y, \lambda) - \varphi(x, y)$ für $v = 1, 0$ und $\overset{(0)}{h}(x, y, \lambda) + F_\lambda^{(e)}(\varphi(-, y))(x) \subset B$ für $y \neq P$.

Aus dem Hilfssatz 2 folgt, daß der Operator $(I - F_\lambda^{(e)})^{-1}$ im ganzen Raum definiert und beschränkt ist. Satz 2 besagt, daß $\overset{(1)}{h}(x, y, \lambda) \in B$ für $x \in K_\varepsilon$, $y \neq P$. Daraus folgt schließlich

$$\overset{(1)}{\|h}(-, y, \lambda)\|_B \leq \|(I - F_\lambda^{(e)})^{-1}\|_B \cdot \|\overset{(0)}{h}(x, y, \lambda) + F_\lambda^{(e)}(\varphi(-, y))(x)\|_B$$

oder

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in K_\varepsilon} \overset{(1)}{|h}(x, y, \lambda)| \\ & \leq \|(I - F_\lambda^{(e)})^{-1}\|_B \cdot \sup_{x \in K_\varepsilon} \left| \overset{(0)}{h}(x, y, \lambda) + \int_{K_\varepsilon} \overset{(0)}{H}(x, s, \lambda) q_s^{(1)}(s) \varphi(s, y) ds \right|. \end{aligned}$$

Hieraus folgt unmittelbar, daß es zwei, nur von λ und ε abhängige Konstanten M und N gibt mit

$$(28) \quad \sup_{x \in K_\varepsilon} \overset{(1)}{|h}(x, y, \lambda)| \leq M + N \int_{K_\varepsilon} \frac{|q(s)|}{|P - s| \cdot |s - y|} ds \quad (y \neq P).$$

Auf Grund der Ungleichung (28) formulieren wir

Satz 3. Es ist

$$|H(x, y, \lambda) - \varphi(x, y)| \leq M + N \int_{K_\varepsilon} \frac{|q(s)|}{|P - s| \cdot |s - y|} ds,$$

wo $x, y \in K_\varepsilon$, $\lambda \in SpA + SpA + SpA$ und M, N nur von λ, ε abhängige Zahlen sind.

Daraus ersieht man, daß das Verhalten der Funktion $H(x, y, \lambda)$ in der Umgebung des beliebigen Punktes P nur von den Lokaleigenschaften der Funktion $q(x)$ in der Umgebung dieses Punktes abhängt.

Satz 3 bleibt in Kraft, wenn die Menge der Unstetigkeitsstellen $q(x)$ aus einer endlichen Anzahl von Punkten, beschränkten Kurven und beschränkten Flächen besteht. Es genügt K_ε durch eine ε -Umgebung der Singularitätsstellen von $q(x)$ zu ersetzen. Wenn z. B. $q(x)$ für eine endliche Anzahl von Punkten P_μ ($\mu = 1, 2, \dots, n$) unstetig ist, in deren Umgebungen

$$q(s) = O\left(\frac{1}{|P_\mu - s|^{a_\mu}}\right) \quad (\mu = 1, 2, \dots, n),$$

dann ergibt sich aus Satz 3 für $x, y \rightarrow P$ die Abschätzung:

$$|H(x, y, \lambda) - \varphi(x, y)| \leq M + N \cdot \begin{cases} O(1) & \text{für } a_\mu < 1, \\ O(\ln|y - P_\mu|) & \text{für } a_\mu = 1, \\ O\left(\frac{1}{|y - P_\mu|^{a_\mu - 1}}\right) & \text{für } a_\mu > 1, \end{cases}$$

wobei die Konstanten M und N nur von λ abhängen.

Wenn das Verhalten von $\overset{(0)}{H}(x, y, \lambda)$ im Unendlichen bekannt ist, dann kann $H(x, y, \lambda)$ auch für $|x|, |y| \rightarrow \infty$ abgeschätzt werden.

Es sei z. B. $\overset{(0)}{L}(u) = -\Delta u$ und Ω der ganze dreidimensionale Euklidische Raum E . Offenbar ist dann $\overset{(0)}{H}(x, y, \lambda^2) = e^{\pm i\lambda|x-y|/4\pi} |x-y|$ (das Vorzeichen + oder - entspricht $\text{Im}|\lambda| > 0$ oder $\text{Im}|\lambda| < 0$). In diesem Falle strebt $\overset{(0)}{H}$ für $|x| \rightarrow \infty$ oder $|y| \rightarrow \infty$ sehr schnell zum Grenzwert Null und deswegen ist es nicht nötig die Hilfsfunktion $\overset{(1)}{H}(x, y, \lambda)$ einzuführen. Wir können sogleich aus der Beziehung (man erhält sie analog wie die Gleichungen (6) und (7))

$$(29) \quad H(x, y, \lambda^2) = \frac{e^{\pm i\lambda|x-y|}}{4\pi|x-y|} - \int_E \frac{e^{\pm i\lambda|x-s|}}{4\pi|x-s|} q(s) H(s, y, \lambda^2) ds$$

ausgehen.

Wir setzen jetzt voraus, daß $q(x)$ nicht nur begrenzt für $|x| \rightarrow \infty$ ist, aber auch $q(x) = O(1/|x|^a)$, $a > 0$, $|x| \rightarrow \infty$. Weiter werden zwei vollständige Banachsche Räume C_y und C eingeführt. Es soll nämlich N_y die Menge aller Funktionen der Gestalt

$$u(x) = \overset{(0)}{a} H(x, y, \lambda^2) + v(x) = a \frac{e^{\pm i\lambda|x-y|}}{4\pi|x-y|} + v(x)$$

bedeuten, wo a eine komplexe Zahl und $v(x)$ eine stetige, im Unendlichen beschränkte Funktion ist. (Wenn $L = -\Delta$, so besteht M_y aus Funktionen der Gestalt $a/4\pi|x-y|+v(x)$.) Für die Menge der Funktionen N_y führen wir die Norm

$$\|u\|_{C_y} = |a| + \sup_{x \in E} |v(x)|$$

ein. N_y mit der Norm $\|\cdot\|_{C_y}$ ist ein vollständiger Banachraum. Wir bezeichnen ihn durch C_y . Den Unterraum von C_y , für welchen $a = 0$, bezeichnen wir durch C .

Aus unseren bisherigen Untersuchungen folgt, für $y \neq P$,

$$(30) \quad H(-, y, \lambda^2) \in C_y \quad \text{und} \quad h^*(-, y, \lambda^2) = H(-, y, \lambda^2) - \frac{e^{\pm i\lambda|x-y|}}{4\pi|x-y|} \in C.$$

In den Räumen C_y und C erklären wir den Operator

$$(31) \quad F_\lambda(f)(x) = \int_E \frac{e^{\pm i\lambda|x-s|}}{4\pi|x-s|} q(s)f(s) ds.$$

Offenbar ist $F_\lambda(C_y) \subset C_y$ und $F_\lambda(C) \subset C$. Aus dem Satz von Arzela über die Kompaktheit gleichstetiger Funktionenfamilien folgt, daß $F_\lambda(f)$ in den Räumen C_y und C ein beschränkter und vollstetiger Operator ist. Nämlich, wenn wir eine Menge M der Funktionen aus C_y (C) nehmen werden, die im Sinne $\|\cdot\|_{C_y}$ ($\|\cdot\|_C$) begrenzt ist, dann überzeugen wir uns leicht, daß $F_\lambda(M)$ eine gleichstetige Funktionenmenge darstellt. Weiter, wegen der Beschränktheit der Menge M im Sinne $\|\cdot\|_{C_y}$ ($\|\cdot\|_C$) sind alle Funktionen $f \in M$ gleichmäßig im Unendlichen begrenzt. Also auf Grund (31) bekommen wir

$$|f(x)| \leq \frac{M}{|x-P|^a}, \quad f \in F_\lambda(M), \quad a > 0,$$

wo M, a von f unabhängige Konstanten sind.

Wir formulieren den

HILFSSATZ 3. Wenn für $f \in C_y$ oder $f \in C$, $f = -F_\lambda f$ erfüllt ist, so ist $f \in D(A)$ (A eine selbstadjungierte Erweiterung des Operators $-\Delta u + q(u)$) und $\Delta f = \lambda^2 f$.

Beweis. Es sei $f \in C_y$ oder $f \in C$, und $f = -F_\lambda f$. Auf Grund $q(s)f(s) = O(1/|s|^a)$, $|s| \rightarrow \infty$ (⁵) erhalten wir durch Abschätzung des Integrals (31), daß $f(s) = O(1/|s|^a)$, $|s| \rightarrow \infty$. Also $q(s)f(s) = O(1/|s|^{2a})$, $|s| \rightarrow \infty$, und durch nochmalige Abschätzung von (31) erhält man $f(s) = O(1/|s|^{2a})$,

(⁵) Aus der Schwarzungleichung folgt, daß $f(s)$ für $|s| \rightarrow \infty$ begrenzt ist.

$|s| \rightarrow \infty$. So fortfahrend erhält man immer bessere Abschätzungen $f(s)$ für $|s| \rightarrow \infty$. Auf diesem Wege können wir uns leicht überzeugen, daß $q(s)f(s) \in L^2(E)$, da aber

$$f = -F_\lambda f = -R_{\lambda^2}^{(0)}(q(-)f(-)),$$

so $f \in D(A)$ und $\Delta f - \lambda^2 f = -qf$.

Aus der wesentlichen Selbstadjungiertheit von A erklärt in D (in unserem Falle besteht D aus der Menge der Funktionen mit stetigen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung einschließlich, welche außerhalb einer hinreichend großen Kugel verschwinden) folgt die Existenz einer Funktionenfolge $f_n \in D$, $f_n \xrightarrow{L^2(E)} f$ und $\Delta f_n - \lambda^2 f_n = -\Delta f_n - \lambda^2 f_n \xrightarrow{L^2(E)} -qf$. Weil zugleich $qf_n \xrightarrow{L^2(E)} qf$ (⁶), also

$$-\Delta f_n + qf_n - \lambda^2 f_n \xrightarrow{L^2(E)} 0.$$

Damit ist der Beweis beendet.

Aus dem Hilfssatz 3 folgt unmittelbar der

HILFSSATZ 4. Wenn λ^2 dem Spektrum des Operators A nicht angehört, so gibt es für jedes $g \in C_y$ oder $g \in C$ genau eine Lösung der Gleichung $f + F_\lambda f = g$, die entsprechend in C_y oder in C liegt.

Aus dem Hilfssatz 4 folgt, daß $H(-, y, \lambda^2)$ die einzige Lösung von (29) in C_y ist. Weiter ist

$$(32) \quad h^*(x, y, \lambda^2) + F_\lambda(h^*(-, y, \lambda^2))(x) = F_\lambda(H^*(-, y, \lambda^2))(x).$$

Aus $h^*(-, y, \lambda^2) \in C$ und auf Grund dessen, daß nach dem Hilfssatz 4 der Operator $(I + F_\lambda)^{-1}$ in C erklärt und beschränkt ist, folgt mit Hilfe von (32)

$$\|h^*(-, y, \lambda^2)\|_C \leq \|(I + F_\lambda)^{-1}\|_C \cdot \|F_\lambda(H^*(-, y, \lambda^2))\|_C$$

oder

$$(33) \quad \sup_{x \in E} |h^*(x, y, \lambda^2)| \leq M \sup_{x \in E} \left| \int_E \frac{e^{\pm i\lambda|x-s|}}{|x-s|} q(s) \frac{e^{\pm i\lambda|s-y|}}{|s-y|} ds \right|.$$

(⁶) Die Funktionenfolge $f_n(x)$ ist in E gleichmäßig begrenzt. Nämlich $f_n(x) = R_{\lambda^2}^{(0)}(\Delta f_n - \lambda^2 f_n)$ und nach der Schwarzungleichung

$$|f_n(x)| \leq M \sqrt{\int_E \left| \frac{e^{\pm i\lambda|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right|^2 dy}.$$

Daraus erhalten wir

SATZ 4. Es ist

$$\left| H(x, y, \lambda^2) - \frac{e^{\pm i\lambda|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right| \leq L e^{-N|y|} \quad (N > 0),$$

Im $(\lambda^2) \neq 0$, + oder - entspricht $\text{Im}(\lambda) > 0$ oder $\text{Im}(\lambda) < 0$, L und N sind nur von λ abhängige Konstanten.

IV. Eigenschaften der ersten Ableitungen von $H(x, y, \lambda)$

Setzt man (7) in (6), so erhalten wir nach Änderung der Integrationsfolge

$$(34) \quad H(x, y, \lambda) = \overset{(1)}{H}(x, y, \lambda) + \Psi_1(x, y) + \Psi_2(x, y),$$

wo

$$\Psi_1(x, y) = - \int_{\Omega - \bar{K}_{\varepsilon/2}} \overset{(0)}{H}(x, s, \lambda) q_s^{(2)}(s) H(s, y, \lambda) ds,$$

$$\Psi_2(x, y) = \int_{\bar{K}_\varepsilon} \overset{(0)}{H}(x, t, \lambda) q_t^{(1)}(t) \left[\int_{\Omega - \bar{K}_{\varepsilon/2}} \overset{(1)}{H}(t, s, \lambda) q_s^{(2)}(s) H(s, y, \lambda) ds \right] dt.$$

Aus der Eigenschaft (5) des Resolventenkernes und Hilfssatz 1 sehen wir, daß man $\Psi_1(x, y)$ für $x \neq P$ differenzieren kann und $\partial \Psi_1(x, y)/\partial x$ eine stetige Funktion für $x, y \rightarrow P$ ist. Weiter aus dem Hilfssatz 1 folgt, daß

$$\mu(t, y) = \int_{\Omega - \bar{K}_{\varepsilon/2}} \overset{(1)}{H}(t, s, \lambda) q_s^{(2)}(s) H(s, y, \lambda) ds$$

eine für $t, y \in \bar{K}_{\varepsilon/2}$ gleichmäßig stetige Funktion ist. Mit Hilfe der Eigenschaft (b) des Resolventenkernes und nach Aussonderung des Hauptgliedes erhalten wir

$$(35) \quad \frac{\partial \Psi_2(x, y)}{\partial x} \leq M \int_{\bar{K}_\varepsilon} \frac{|q(t)|}{|x-t|^2} dt.$$

Jetzt fehlt uns nur die Abschätzung der Funktion $\partial \overset{(1)}{H}(x, y, \lambda)/\partial x$ für $x \rightarrow P, y \rightarrow P$. Wenn wir die Gleichung (7) differenzieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overset{(1)}{H}(x, y, \lambda)}{\partial x} &= \frac{\partial \overset{(0)}{h}(x, y, \lambda)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} - \\ &- \int_{\bar{K}_\varepsilon} \left[\frac{\partial \overset{(0)}{h}(x, s, \lambda)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(x, s, \lambda)}{\partial x} \right] q_s^{(1)}(s) [\overset{(1)}{h}(s, y, \lambda) + \varphi(s, y)] ds. \end{aligned}$$

Aus der Eigenschaft (b) des Resolventenkernes und dem Satz 3 folgt, wenn wir die allgemeinen Eigenschaften der Grundlösung beachten, daß

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \overset{(1)}{H}(x, y, \lambda)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \right|_{x, y \in \bar{K}_\varepsilon} &\leq M_1 \ln |x-y| + M_2 \int_{\bar{K}_\varepsilon} \ln |x-s| q(s) ds + \\ &+ M_3 \int_{\bar{K}_\varepsilon} \frac{q(s)}{|x-s|^2} ds + M_4 \int_{\bar{K}_\varepsilon} \frac{\ln |x-s| \cdot q(s)}{|s-y|} ds + M_5 \int_{\bar{K}_\varepsilon} \frac{q(s)}{|x-s|^2 |s-y|} ds, \end{aligned}$$

wo M_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) nur von λ, ε abhängige Konstanten sind.

Die erhaltene Abschätzungen für $\partial \Psi_1/\partial x$, $\partial \Psi_2/\partial x$ und $\partial \overset{(1)}{H}/\partial x$ ergeben nach Aussonderung des Hauptgliedes den

SATZ 5. Wir haben

$$\left| \frac{\partial H(x, y, \lambda)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \right| \leq K + M \int_{\bar{K}_\varepsilon} \frac{|q(t)|}{|x-t|^2} dt + N \int_{\bar{K}_\varepsilon} \frac{|q(s)|}{|x-s|^2 |s-y|} ds$$

für $x, y \in \bar{K}_\varepsilon$, wo K, M, N nur von λ, ε abhängige Konstanten sind.

Jetzt können wir die ersten Ableitungen der Eigenfunktionen f ($Af_\lambda = \lambda f_\lambda$ oder $f_\lambda = (\lambda - \mu) R_\mu f_\lambda$) abschätzen.

Für $x \neq P$ ist

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial x} = (\lambda - \mu) \int_{\Omega} \frac{\partial H(x, y, \mu)}{\partial x} f_\lambda(y) dy.$$

Mit Hilfe von (34) erhalten wir

$$(36) \quad \frac{\partial f_\lambda}{\partial x} = (\lambda - \mu) \left[\int_{\Omega} \frac{\partial \overset{(1)}{H}}{\partial x} f_\lambda dy + \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} f_\lambda dy + \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} f_\lambda dy \right].$$

Aus der Gleichung (7) erhalten wir

$$(37) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial \overset{(1)}{H}}{\partial x} f_\lambda dy = \int_{\Omega} \frac{\partial \overset{(0)}{H}}{\partial x} f_\lambda dy + \int_{\bar{K}_\varepsilon} \frac{\partial \overset{(0)}{H}}{\partial x} q_s^{(1)}(s) \tau(s) ds,$$

wo $\tau(s) = \int_{\Omega} \overset{(1)}{H}(s, y, \lambda) f_\lambda(y) dy$ eine nach dem Hilfssatz 1 für $s \rightarrow P$ stetige Funktion ist. Das erste Glied auf der rechten Seite ist auf Grund

der Eigenschaft (5) des Resolventenkernes eine stetige Funktion von x . Nach Aussonderung des Hauptgliedes erhalten wir

$$(38) \quad \left| \int_{\Omega} \frac{\partial H}{\partial x} f_{\lambda} dy \right| \leq M + N \int_{K_{\varepsilon}} \frac{|q(s)|}{|x-s|^2} ds.$$

Weiter

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} f_{\lambda} dy = - \int_{\Omega - K_{\varepsilon/2}} \frac{\partial H(x, s, \mu)}{\partial x} q_{\varepsilon}^{(2)}(s) [R_{\mu}(f_{\lambda})(s)] ds$$

oder, wegen $f_{\lambda} = (\lambda - \mu) R_{\mu} f_{\lambda}$,

$$(39) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} f_{\lambda} dy = - \int_{\Omega - K_{\varepsilon/2}} \frac{\partial H(x, s, \mu)}{\partial x} q_{\varepsilon}^{(2)}(s) \frac{f_{\lambda}(s)}{\lambda - \mu} ds.$$

Aus der Eigenschaft (5) des Resolventenkernes folgt, daß die rechte Seite von (39) eine stetige Funktion von x ist. Endlich ist

$$(40) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} f_{\lambda} dy = \int_{K_{\varepsilon}} \frac{\partial H(x, t, \mu)}{\partial x} q_{\varepsilon}^{(1)}(s) \omega(t) dt,$$

wo

$$\omega(t) = \int_{\Omega - K_{\varepsilon/2}} \frac{H(t, s, \mu) q_{\varepsilon}^{(2)}(s)}{\lambda - \mu} f_{\lambda}(s) ds$$

eine nach dem Hilfssatz 1 für $t \rightarrow P$ stetige Funktion ist. Für (40) gilt also die Abschätzung (38). Wir formulieren also den

SATZ 6. Wenn $Af_{\lambda} = \lambda f_{\lambda}$, so

$$\left| \frac{\partial f_{\lambda}}{\partial x} \right| \leq M + N \int_{K_{\varepsilon}} \frac{|q(s)|}{|x-s|^2} ds;$$

M und N sind nur von λ, ε abhängige Konstanten.

V. Die Eigenschaften der zweiten Ableitungen von $H(x, y, \lambda)$

Durch zweimaliges Differenzieren von (6), (7) und ihrer Superpositionen, können wir die Abschätzungen für die zweiten Ableitungen des Resolventenkernes und der Eigenfunktionen erhalten.

Wir untersuchen insbesondere den Fall, wo $L(u)$ auf begrenzten Gebieten Ω erklärt ist und auf $\partial\Omega$ die Bedingung $u/\partial\Omega = 0$ erfüllt sein soll. Ähnlich kann man andere homogene Randwertaufgaben behandeln. Als Ausgangspunkt nehmen wir

$$(41) \quad H(x, y, \lambda) = H^{(0)}(x, y, \lambda) - \int_{\Omega} H^{(0)}(x, s, \lambda) q(s) H(s, y, \lambda) ds.$$

Diese Gleichung erhält man ähnlich wie (6) und (7) (wegen der Begrenztheit des Gebietes Ω ist es nicht nötig $H^{(1)}(x, y, \lambda)$ einzuführen). (41) nach x differenzierend, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(x, y, \lambda)}{\partial x_{\mu}} &= \frac{\partial H^{(0)}(x, y, \lambda)}{\partial x_{\mu}} - \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi(x, s)}{\partial x_{\mu}} q(s) H(s, y, \lambda) ds - \\ &- \int_{\Omega} \frac{\partial h(x, s, \lambda)}{\partial x_{\mu}} q(s) H(s, y, \lambda) ds. \end{aligned}$$

Auf Grund

$$\frac{\partial \varphi(x, s)}{\partial x_{\mu}} = - \frac{\partial \varphi(x, s)}{\partial s_{\mu}} + O\left(\frac{1}{|x-s|}\right)$$

(Eigenschaft (α) der Fundamentallösung) erhalten wir

$$(42) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi(x, s)}{\partial x_{\mu}} q(s) H(s, y, \lambda) ds &= \int_{\Omega} O\left(\frac{1}{|x-s|}\right) q(s) H(s, y, \lambda) ds + \\ &+ \int_{\Omega - K_{\varepsilon}} \varphi(x, s) \frac{\partial (q(s) H(s, y, \lambda))}{\partial s_{\mu}} ds - \int_{\partial\Omega} \varphi(x, s) q(s) H(s, y, \lambda) \cos(\vec{n}, s_{\mu}) ds - \\ &- \int_{\partial K_{\varepsilon}} \varphi(x, s) q(s) H(s, y, \lambda) \cos(\vec{n}, s_{\mu}) ds + \int_{K_{\varepsilon}} \frac{\partial \varphi(x, s)}{\partial x_{\mu}} q(s) H(s, y, \lambda) ds \end{aligned}$$

(K_{ε} ist eine Kugel mit dem Zentrum in P und dem Radius ε).

Das Integral über $\partial\Omega$ fällt aus, denn $H/\partial\Omega = 0$. Bei zusätzlicher Voraussetzung $\int_{\partial K_{\varepsilon}} q(s) ds \rightarrow 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ erhalten wir mit Hilfe der Abschätzung von Satz 2, daß das Integral über ∂K_{ε} der rechten Seite der Gleichung (42) für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen Null strebt. Dasselbe erhält man für das Integral über K_{ε} .

Danach erhält man durch nochmaliges Differenzieren von (41) nach x

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial x_\mu} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial x_\mu} &= \frac{\partial^2 h^{(0)}}{\partial x \partial x_\mu} - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 h^{(0)}}{\partial x \partial x_\mu} q(s) H(s, y, \lambda) ds + \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \left[\frac{\partial q}{\partial s_\mu} H(s, y, \lambda) + q(s) \frac{\partial H}{\partial s_\mu} \right] ds + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left[\int_{\Omega} O\left(\frac{1}{|x-s|}\right) q(s) H(s, y, \lambda) ds \right]. \end{aligned}$$

Wendet man die Sätze 2, 3 und 5 an, so erhält man nach der Aussonderung des Hauptteiles (offenbar ist $\partial \varphi(x, y)/\partial x = O(1/|x-y|^2)$) den

SATZ 7. Wir haben

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 H(x, y, \lambda)}{\partial x \partial x_\mu} - \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial x_\mu} \right| &\leq M + N \int_{\Omega} \frac{|q(s)|}{|x-s|^2 |s-y|^2} ds + \\ &+ L \int_{\Omega} \frac{|\partial q/\partial s_\mu|}{|x-s|^2 |s-y|} ds + Q \left[\int_{\Omega} \frac{|\partial q/\partial s_\mu|}{|x-s|^2} ds \right] \left[\int_{\Omega} \frac{|q(s)|}{|P-s| |s-y|} ds \right] \end{aligned}$$

für $x, y \rightarrow P$, wo M, N, Z, Q nur von λ abhängige Konstanten sind.

Durch Anwendung des Satzes 7 erhält man leicht, aus der Formel $f_\lambda = (\lambda - \mu) R_\mu f_\lambda$ ausgehend, den

SATZ 8. Für jede Eigenfunktion des Operators A ($A f_\lambda = \lambda f_\lambda$) gibt es Konstanten M, N, L für die

$$\left| \frac{\partial^2 f_\lambda}{\partial x \partial x_\mu} \right| \leq M + N \int_{\Omega} \frac{|q(s)|}{|x-s|^2} ds + L \int_{\Omega} \frac{|\partial q/\partial s_\mu|}{|x-s|^2} ds.$$

Die Abschätzungen des Satzes 8 gehen von den bestmöglichen nicht weit ab. Es ist bekannt, daß im Falle der Schrödingergleichung für ein Wasserstoffatom die Eigenfunktionen die einfache Gestalt e^{-ar} ($r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$) besitzen und $q(x) = 1/r$. Die Ableitungen zweiter Ordnung der Eigenfunktionen besitzen eine Singularität vom Typus $1/r$. Dieselben Abschätzungen erhält man aus Satz 8.

Schlußbemerkung. Betrachten wir die nichthomogene Aufgabe

$$Lu - \lambda u = \overset{(0)}{L}u + (q - \lambda)u = f.$$

Dann $u = R_\lambda f$. Also aus oben bewiesenen Sätzen 3, 5 und 7 kann man unmittelbar Abschätzungen für die Lösung der nichthomogenen Aufgabe angeben, und zwar in Abhängigkeit von dem Verhalten der Funktionen q und f .

Literaturnachweis

- [1] M. Burnat, Über die Lösung einer Aufgabe für die Schrödingergleichung im unendlichen, dreidimensionalen Raume (Russisch), Dokl. AN SSSR 112 (1957), S. 224-227.
 [2] T. Carleman, Sur la théorie mathématique de l'équation de Schrödinger, Arkiv för Math. Astr. Fysik 24, Nr 11 (1955), S. 1-7.
 [3] K. Friedrichs, Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren, Math. Annalen 109 (1934), SS. 465-487 und 685-713.
 [4] — On differential operators in Hilbert spaces, Amer. J. Math. 61 (1939), S. 523-544.
 [5] M. S. Fleckser, Über die Spektralfunktion des Operators

$$- \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{ik}(x_1, x_2, x_3) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right] + c(x_1, x_2, x_3) u$$

(Russisch), Mat. Sbornik 40 (82), 1 (1956), S. 1-22.

[6] J. M. Glasman, Über das Spektrum der eindimensionalen Randaufgaben (Russisch), Dokl. AN SSSR 87 (1) (1952), S. 5-8.

[7] — Über das Spektrum der mehrdimensionalen Randaufgaben (Russisch), ibidem 87, 2 (1952), S. 171-174.

[8] — Die Anwendung der Zerspaltungsmethode auf mehrdimensionale singuläre Randaufgaben, Mat. Sbornik 35 (77), 2 (1954), S. 231-246.

[9] L. Gårding, Eigenfunctions expansions connected with elliptic differential operators, Comptes Rendus du Douzième Congrès des Math. Scand., Lund 10-15 août 1953.

[10] T. Kato, Fundamental properties of Hamiltonian operators of Schrödinger type, Trans. Amer. Math. Soc. 70 (1951), S. 195-211.

[11] — On the eigenfunctions of many-particle systems in quantum mechanics, Comm. Pure and Appl. Math. 10 (1957), S. 151-177.

[12] A. Povsner, On the expansion of arbitrary functions in terms of characteristic functions of the operator $-Aw + cw$ (Russisch), Mat. Sbornik 32 (74), 1 (1953), S. 109-156.

[13] D. B. Sears, Note on the uniqueness of the Greens functions associated with certain differential equations, Can. J. Math. 2.

[14] W. Sternberg, Über die lineare elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung, mit drei unabhängigen Veränderlichen, Math. Zeitschrift 21 (1924), S. 226-311.

[15] F. Stummel, Singuläre elliptische Differentialoperatoren in Hilbertschen Räumen, Math. Annalen 132 (1956), S. 150-176.

[16] E. C. Titchmarsh, Eigenfunction expansions associated with partial differential equations I, II, III, Proc. London Math. Soc. 3.1 (1951), 3 (1953), 9.3 (1953).

[17] — On the uniqueness of the Green's function associated with a second order differential equations, Can. J. Math. 1 (1949).

Reçu par la Rédaction le 20. 6. 1958