Table des matières du tome VI, fascicule 2

Le revue est consacrée à toutes les branches de l'arithmétique et de la théorie des nombres, ainsi qu'aux fonctions ayant de l'importance dans ces domaines.

Prière d'adresser les textes dactylographiés à l'un des redacteurs de la revue ou bien à la Rédaction de

ACTA ARITHMETICA

Warszawa 10 (Pologne), ul. Śniadeckich 8.

La même adresse est valable pour toute correspondance concernant l'échange de Acta Arithmetica.

Les volumes IV et suivants de ACTA ARITHMETICA sont à obtenir chez

Ars Polona, Warszawa 5 (Pologne), Krakowskie Przedmieście 7.

Prix de ce fascicule 2 $.

Les volumes I-III (reédités) sont à obtenir chez

Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Ave., New York, N. Y.

PRINTED IN POLAND

W R O C Ł A W S K A D R U K A R N I A N A U K O W A

ACTA ARITHMETICA
VI (1960)

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln II

von

A. Walfisz (Tiflis)

§ 1. Bezeichnungen. Hilfsbetrachtungen

Im folgenden bezeichnen a, h, m ganze Zahlen; d, j, n, q, r, M positive ganze Zahlen; α, β nichtnegative ganze Zahlen; k ganze Zahlen $\geqslant 3$; u, v, N positive ungerade Zahlen; y reelle Zahlen; s, t positive Zahlen; w, z komplexe Zahlen. Ferner sei $x \geqslant 3$.

Diese Buchstaben werden nötigenfalls mit Indizes versehen. Für die Buchstaben, die als Funktionszeichen benutzt werden, gelten die obigen Abmachungen nicht; z. B. braucht die Funktion $r_q(m)$ nicht für alle m und q eine positive ganze Zahl zu sein.

Der Buchstabe B *ohne Indizes* bezeichnet unterschiedslos Zahlen, die ihrem absoluten Betrage nach unterhalb von Schranken liegen, die nur von k abhängen dürfen.

$d|m$ bedeutet, daß d in m als Teiler aufgeht; dagegen bezeichnet w/z einen Bruch mit dem Zähler w und Nenner z.

$\left(\frac{a}{u}\right)$ ist für $u > 1$ das Jacobische Symbol; ist Eins für $u = 1$.

Weiter sei

$$e(y) = e^{2\pi i y}.$$

In der Summe $\sum\limits_{a \bmod q}$ durchläuft a ein vollständiges Restsystem $\bmod q$, in der Summe $\sum\limits_{a \bmod q}'$ ein reduziertes Restsystem. In allen übrigen Summen ist die untere Summationsgrenze, falls sie nicht ausdrücklich angegeben wird, gleich Eins. Ferner sei

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} = \lim_{M\to\infty} \sum_{m=-M}^{M}. \tag{1}$$

Dieselbe Vereinbarung gilt auch, wenn auf m noch zusätzliche Bedingungen auferlegt werden. Leere Summen sind gleich Null zu setzen.

Es sei

$$r_q(y) = \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_q=-\infty \\ a_1^2+\ldots+a_q^2=y}}^{\infty} 1$$

die Anzahl der Darstellungen von y als Summe von q Quadraten ganzer Zahlen;

$$A_q(t) = \sum_{0\leqslant m\leqslant t} r_q(m) = 1+\sum_{n\leqslant t} r_q(n)$$

die Anzahl der Gitterpunkte $(a_1, \ldots, a_q)$ in der q-dimensionalen Kugel

$$y_1^2+\ldots+y_q^2 \leqslant t.$$

Ferner bezeichne

$$V_q(t) = \frac{\pi^{q/2}}{\Gamma(q/2+1)} t^{q/2}$$

das Volumen dieser Kugel und

$$\mathrm{P}_q(t) = A_q(t)-V_q(t)$$

den Gitterrest. Weiter sei

(2) $$D_q = \frac{\pi^{q/2}}{\Gamma(q/2)};$$

(3) $$\delta(y) = 1 \text{ für ganzes } y, \qquad \delta_r(y) = \delta(y) \text{ für } r=1,$$
$$= 0 \text{ für nichtganzes } y; \qquad = 0 \quad \text{ für } r>1.$$

Aus (3) ergeben sich die Identitäten

(4) $$\delta\left(\frac{y}{2}\right)-2\delta\left(\frac{y}{4}\right) = -\delta(y)\cos\frac{\pi y}{2},$$

(5) $$\delta(y)-\delta\left(\frac{y}{2}\right)-2\delta\left(\frac{y-1}{4}\right) = -\delta(y)\sin\frac{\pi y}{2}.$$

In der Tat haben beide Seiten die Periode 4 und sind Null für nichtganze y; es genügt also, $y = 0, 1, 2, 3$ einzusetzen.

Es sei weiter für $s>1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad L(s) = \sum_{u=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{u}\right)u^{-s},$$

(6) $$Z(s) = Z(s;k) = \sum_{u=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{u}\right)^k u^{-s},$$

also

(7) $$Z(s) = L(s) \qquad (k \text{ ungerade}),$$
$$= (1-2^{-s})\zeta(s) \qquad (k \text{ gerade});$$

(8) $$\{Z(s)\}^{-1} = \sum_{u=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{u}\right)^k \mu(u)u^{-s}.$$

Für die Gaußsche Summe

(9) $$S(h,q) = \sum_{a \bmod q} e\left(\frac{ha^2}{q}\right)$$

gelten bekanntlich, sofern $(h,q)=1$, folgende einfache Tatsachen (vgl. z. B. [5], (1.1.2) und (1.1.9)):

$$|S(h,q)| \leqslant (2q)^{1/2};$$

(10) $$S^2(h,q) = \left(\frac{-1}{q}\right)q \quad \text{für} \quad q\equiv 1 \pmod 2,$$
$$= 0 \qquad \text{für} \quad q \equiv 2 \pmod 4,$$
$$= 2i^h q \qquad \text{für} \quad q \equiv 0 \pmod 4.$$

Die Reihe

$$\mathfrak{S}_k(y) = \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{h \bmod q}{}' \left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^k e\left(-\frac{hy}{q}\right)$$

konvergiert also für $k>4$ absolut. Diese Reihe geht in die bekannten Näherungsausdrücke ein, die G. H. Hardy für die Funktion $r_k(n)$ erhalten hat (vgl. z. B. [5], Hilfssätze 1.4.2 und 4.2.4):

(11) $$r_k(n) = D_k n^{k/2-1}\mathfrak{S}_k(n)+Bn^{k/4} \qquad (k>4),$$

(12) $$r_k(n) = D_k n^{k/2-1}\mathfrak{S}_k(n) \qquad (k=5,6,7,8).$$

Setzt man

(13) $$\sigma_h(n) = \sum_{d|n} d^h,$$

(14) $$\varrho_h(N) = \sum_{u|N}\left(\frac{-1}{u}\right)u^h,$$

so ist bekanntlich nach Hardy (vgl. z. B. [4], Satz 4.1 und Formel (4.27)):

$$Z(k)\mathfrak{S}_{2k}(2^a N) = \sigma_{1-k}(N) \quad \text{für} \quad a=0, \quad k\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2), \tag{15}$$

$$= \{1-2^{2-k}+2^{(1-k)(a+1)}(2^k-1)\}(1-2^{1-k})^{-1}\sigma_{1-k}(N) \quad \text{für} \quad a>0, \quad k\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,4),$$

$$= \{1-2^{(1-k)(a+1)}(2^k-1)\}(1-2^{1-k})^{-1}\sigma_{1-k}(N) \quad \text{für} \quad a>0, \quad k\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,4),$$

$$= \left\{1+\left(\frac{-1}{kN}\right)2^{(1-k)(a+1)}\right\}\varrho_{1-k}(N) \quad \text{für} \quad k\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,2).$$

Es sei $B_n(z)$ das n-te Bernoullische Polynom in der üblichen Bezeichnungsweise, also insbesondere

$$B_1(z) = z-\tfrac{1}{2}, \qquad B_3(z) = z^3-\tfrac{3}{2}z^2+\tfrac{1}{2}z. \tag{16}$$

Ferner werde

$$\bar{B}_n(y) = B_n(y-[y]) \tag{17}$$

gesetzt. Bekanntlich gelten für beliebige y die folgenden Fourierentwicklungen:

$$\bar{B}_r(y) = (-1)^{(r+1)/2}\frac{r!}{2^{r-1}\pi^r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi y}{n^r}-\frac{\delta_r(y)}{2} \quad (r \text{ ungerade}), \tag{18}$$

$$\bar{B}_r(y) = (-1)^{r/2-1}\frac{r!}{2^{r-1}\pi^r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi y}{n^r} \quad (r \text{ gerade}). \tag{19}$$

Um Formeln zusammenzuziehen, die mit Hilfe von (18) und (19) berechnet worden sind, ist es nützlich zu beachten, daß

$$i^{2-r} = i(-1)^{(r-1)/2} \quad \text{für ungerade } r, \tag{20}$$

$$= (-1)^{r/2-1} \quad \text{für gerade } r.$$

Es sei

$$F_r(y,q) = \bar{B}_r\left(\frac{y}{2q}\right)-2^r\bar{B}_r\left(\frac{y}{4q}\right), \tag{21}$$

$$G_r(y,q) = \bar{B}_r\left(\frac{y}{q}\right)-2^{r-1}\bar{B}_r\left(\frac{y}{2q}\right)-2^{2r-1}\bar{B}_r\left(\frac{y-q}{4q}\right), \tag{22}$$

$$\Psi_{k,r}(y) = \sum_{u=1}^{\infty}u^{r-k}\bar{B}_r\left(\frac{y}{u}\right)+(-1)^{k/2+1}2^{r-k}\sum_{d=1}^{\infty}d^{r-k}F_r(y,d) \quad (k \text{ gerade}, \ r\leqslant k-2), \tag{23}$$

$$\Phi_{k,r}(y) = \sum_{u=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{u}\right)u^{r-k}\bar{B}_r\left(\frac{y}{u}\right)+(-1)^{(k+1)/2}2^{1-k}\sum_{d=1}^{\infty}d^{r-k}G_r(y,d) \quad (k \text{ ungerade}, \ r\leqslant k-2), \tag{24}$$

$$\Omega_{k,r}(y) = \Psi_{k,r}(y) \quad \text{für gerade } k, \tag{25}$$

$$= \Phi_{k,r}(y) \quad \text{für ungerade } k.$$

Die Reihen (23) und (24) konvergieren absolut; ihr allgemeines Glied ist nämlich Bu^{-2} bzw. Bd^{-2}. Für spätere Zwecke sollen jetzt die Fourierentwicklungen der Funktionen (21) und (22) hergeleitet werden. Sie lauten:

$$F_r(y,d) = (-1)^{(r-1)/2}2\frac{r!}{\pi^r}\sum_{u=1}^{\infty}\frac{1}{u^r}\sin\frac{u\pi y}{2d}+\frac{1}{2}\delta_r\left(\frac{y}{d}\right)\cos\frac{\pi y}{2d} \quad (r \text{ ungerade}), \tag{26}$$

$$F_r(y,d) = (-1)^{r/2}2\frac{r!}{\pi^r}\sum_{u=1}^{\infty}\frac{1}{u^r}\cos\frac{u\pi y}{2d} \quad (r \text{ gerade}); \tag{27}$$

$$G_r(y,d) = (-1)^{(r+1)/2}\frac{2^r r!}{\pi^r}\sum_{u=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{u}\right)\frac{1}{u^r}\cos\frac{u\pi y}{2d}+\frac{1}{2}\delta_r\left(\frac{y}{d}\right)\sin\frac{\pi y}{2d} \quad (r \text{ ungerade}), \tag{28}$$

$$G_r(y,d) = (-1)^{r/2}\frac{2^r r!}{\pi^r}\sum_{u=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{u}\right)\frac{1}{u^r}\sin\frac{u\pi y}{2d} \quad (r \text{ gerade}). \tag{29}$$

Alle diese Formeln brauchen nur für $d=1$ nachgeprüft zu werden; der allgemeine Fall folgt hieraus, indem man y durch y/d ersetzt und beachtet, daß nach (21) und (22)

$$F_r(y,d) = F_r\left(\frac{y}{d},1\right), \qquad G_r(y,d) = G_r\left(\frac{y}{d},1\right)$$

ist. Es sei $r > 1$ ungerade. Man bekommt die ungeraden Zahlen u, indem man von den Zahlen n die Zahlen $2n$ entfernt. Daher ist nach (18) und (21)

$$\sum_{u=1}^{\infty}\frac{1}{u^r}\sin\frac{u\pi y}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r}\sin\frac{n\pi y}{2} - \frac{1}{2^r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r}\sin n\pi y$$

$$= (-1)^{(r+1)/2}\frac{2^{r-1}\pi^r}{r!}\left\{\bar{B}_r\left(\frac{y}{4}\right) - \frac{1}{2^r}\bar{B}_r\left(\frac{y}{2}\right)\right\}$$

$$= (-1)^{(r-1)/2}\frac{1}{2}\frac{\pi^r}{r!}F_r(y,1),$$

womit (26) wegen (3) für $d = 1$ nachgewiesen ist. Genau so ergibt sich (26) auch für $r = 1$, indem man das Zusatzglied $-\delta(y)/2$ in (18), sowie (4) beachtet. Auch der Beweis von (27) verläuft genau wie der von (26), nur ist (19) statt (18) zu benutzen. Wiederum sei $r > 1$ ungerade. Dann ist nach (22) und (18)

(30) $$G_r(y,1) = (-1)^{(r+1)/2}\pi^{-r}r!\left\{2^{1-r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r}\sin 2n\pi y - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r}\sin n\pi y - 2^r\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r}\sin\frac{n\pi(y-1)}{2}\right\}.$$

Nun soll die geschweifte Klammer umgeformt werden. Nimmt man das erste Glied unverändert, von der Summe im zweiten Glied nur die geraden n ($2n$ statt n), von der Summe im dritten Glied nur die durch 4 teilbaren n ($4n$ statt n) und faßt zusammen, so ergibt sich

$$(2^{1-r} - 2^{-r} - 2^{r-2r})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r}\sin 2n\pi y = 0.$$

Faßt man die Glieder $n = u$ der zweiten Summe und $n = 2u$ der dritten zusammen, so ergibt sich

$$-\sum_{u=1}^{\infty}\frac{1}{u^r}\sin u\pi y - 2^{r-r}\sum_{u=1}^{\infty}\frac{1}{u^r}\sin(u\pi y - u\pi)$$

$$= (-1+1)\sum_{u=1}^{\infty}\frac{1}{u^r}\sin u\pi y = 0.$$

Es bleiben also nur die ungeraden Glieder der dritten Summe übrig, d. h. es ist

$$\{\,\} = -2^r\sum_{u=1}^{\infty}\frac{1}{u^r}\sin\frac{u\pi(y-1)}{2} = 2^r\sum_{u=1}^{\infty}\frac{1}{u^r}\sin\frac{u\pi}{2}\cos\frac{u\pi y}{2}$$

$$= 2^r\sum_{u=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{u}\right)\frac{1}{u^r}\cos\frac{u\pi y}{2}.$$

Setzt man dies in (30) ein, so ergibt sich (28) für $d = 1$. Genau so ergibt sich (28) auch für $r = 1$, indem man das Zusatzglied in (18) und (5) beachtet. Auch der Beweis von (29) verläuft genau wie der von (28), nur ist (19) statt (18) zu benutzen.

Schließlich sei

(31) $$\mathfrak{R}_k(x,q,r) = \sum_{h \bmod q}{}' \left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^k \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq -h/q}}^{\infty}\frac{e\{-(h/q+m)x\}}{(h/q+m)^r},$$

(32) $$\mathfrak{N}_k(x,r) = \sum_{q=1}^{\infty}\mathfrak{R}_k(x,q,r) \qquad \left(k > 4,\ r < \frac{k}{2} - 1\right).$$

Die Reihe (32) konvergiert absolut und gleichmäßig in x; es ist nämlich (vgl. [5], Hilfssatz 4.1.3)

(33) $$\mathfrak{R}_k(x,q,r) = Bq^{r-k/2}\log 3q.$$

§ 2. Problemstellung

Von Petersson [2] rühren zwei Sätze über die näherungsweise Darstellung der Funktion

$$\tfrac{1}{2}\{\mathrm{P}_k(x+0) + \mathrm{P}_k(x-0)\} \qquad (k > 4)$$

her; in der ersten gleichnamigen Arbeit [3] werden sie auf einfachere Art bewiesen (der Beweis ist in [5], § 4.1 und § 4.3 wiedergegeben). Im folgenden sollen nur Kugeln gerader Dimension $2k$ ($\geqslant 6$) betrachtet werden. Für diese lauten die Peterssonschen Sätze wie folgt.

Satz 1.

(34) $$\tfrac{1}{2}\{\mathrm{P}_{2k}(x+0) + \mathrm{P}_{2k}(x-0)\}$$

$$= -\sum_{r\leqslant(k-1)/2}\frac{1}{(2\pi i)^r}\cdot\frac{\pi^k}{(k-r)!}x^{k-r}\mathfrak{N}_{2k}(x,r) + Bx^{k/2}\log x.$$

SATZ 2.

$$\frac{1}{2}\{\mathrm{P}_6(x+0)+\mathrm{P}_6(x-0)\} = -\frac{D_6}{2\pi i}x^2\mathfrak{N}_6(x,1)+Bx\log x, \tag{35}$$

$$\frac{1}{2}\{\mathrm{P}_8(x+0)+\mathrm{P}_8(x-0)\} \tag{36}$$

$$= -\frac{D_8}{2\pi i}x^3\mathfrak{N}_8(x,1)-\frac{3D_8}{(2\pi i)^2}x^2\mathfrak{N}_8(x,2)+Bx\log x.$$

Demgegenüber hat Lursmanaschwili [1] folgende Näherungssätze für $\mathrm{P}_{2k}(x)$ $(k\geqslant 4)$ gefunden (sie sind in [5], §§ 5.1-5.3 wiedergegeben):

SATZ 3. *Es sei k gerade, $k\geqslant 2j+2$. Dann ist*

$$\mathrm{P}_{2k}(x) = D_{2k}\{k(1-2^{-k})\zeta(k)\}^{-1}\sum_{r=1}^{j}(-1)^r\binom{k}{r}\Psi_{k,r}(x)x^{k-r}+Bx^{k-j-1}\log x. \tag{37}$$

SATZ 4. *Es sei k ungerade, $k\geqslant 2j+3$. Dann ist*

$$\mathrm{P}_{2k}(x) = D_{2k}\{kL(k)\}^{-1}\sum_{r=1}^{j}(-1)^r\binom{k}{r}\Phi_{k,r}(x)x^{k-r}+Bx^{k-j-1}\log x. \tag{38}$$

Mit Hilfe der Bezeichnungen (7) und (25) kann man (37) und (38) in die eine Formel

$$\mathrm{P}_{2k}(x) \tag{39}$$

$$= D_{2k}\{kZ(k)\}^{-1}\sum_{r=1}^{j}(-1)^r\binom{k}{r}\Omega_{k,r}(x)x^{k-r}+Bx^{k-j-1}\log x \quad (k\geqslant 2j+2)$$

zusammenfassen. Nach (23) und (24) sind die Funktionen (25) beschränkt, d. h. man hat

$$\Omega_{k,r}(y) = B.$$

Gilt also (39) für ein gewisses $j>1$, so gilt es auch für $j-1$. Das größte zulässige j in (37) ist $j=k/2-1$. Für dieses j ist das Restglied $Bx^{k/2}\log x$. Das größte j in (38) ist $(k-3)/2$. Das Restglied ist dann $Bx^{(k+1)/2}\log x$. Man kann daher die Sätze 3 und 4 wie folgt zusammenfassen:

SATZ 5. *Es sei $k\geqslant 4$. Dann ist*

$$P_{2k}(x)-D_{2k}\{kZ(k)\}^{-1}\sum_{r\leqslant k/2-1}(-1)^r\binom{k}{r}\Omega_{k,r}(x)x^{k-r} \tag{40}$$

$$= Bx^{k/2}\log x \qquad \textit{für gerade } k,$$

$$= Bx^{(k+1)/2}\log x \qquad \textit{für ungerade } k.$$

In der vorliegenden Arbeit wird ein Zusammenhang zwischen den Peterssonschen Funktionen (32), im Falle eines geraden k, und den Lursmanaschwilischen Funktionen (25) hergestellt. Das Hauptziel lautet:

SATZ 6. *Für $k\geqslant 3$, $r\leqslant k-2$ ist*

$$\mathfrak{N}_{2k}(x,r) = i^{2-r}\{Z(k)\}^{-1}\frac{(2\pi)^r}{r!}\Omega_{k,r}(x)+\delta_r(x)\pi i\mathfrak{S}_{2k}(x). \tag{41}$$

Der Beweis wird in § 3 gebracht. Im Rest des § 2 sollen diejenigen Folgerungen aus Satz 6 gezogen werden, die sich durch Verknüpfung mit den Peterssonschen Sätzen 1 und 2 ergeben.

Es sei $k\geqslant 3$, $r\leqslant k-2$. Aus (41) folgt dann wegen (3) und (2)

$$-\frac{1}{(2\pi i)^r}\cdot\frac{\pi^k}{(k-r)!}\mathfrak{N}_{2k}(x,r)$$

$$= -\frac{i^{2-r}}{(2\pi i)^r}\cdot\frac{\pi^k}{(k-r)!}\{Z(k)\}^{-1}\frac{(2\pi)^r}{r!}\Omega_{k,r}(x)-\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{\pi^k}{(k-1)!}\delta_r(x)\pi i\mathfrak{S}_{2k}(x)$$

$$= D_{2k}\{kZ(k)\}^{-1}(-1)^r\binom{k}{r}\Omega_{k,r}(x)-\tfrac{1}{2}\delta_r(x)D_{2k}\mathfrak{S}_{2k}(x). \tag{42}$$

Setzt man dies in (34) ein, so ergibt sich für $k\geqslant 3$

$$\tfrac{1}{2}\{\mathrm{P}_{2k}(x+0)+\mathrm{P}_{2k}(x-0)\}+\tfrac{1}{2}\delta(x)D_{2k}x^{k-1}\mathfrak{S}_{2k}(x) \tag{43}$$

$$= D_{2k}\{kZ(k)\}^{-1}\sum_{r\leqslant (k-1)/2}(-1)^r\binom{k}{r}\Omega_{k,r}(x)x^{k-r}+Bx^{k/2}\log x.$$

Nach Definition der Funktionen $\mathrm{P}_k(x)$ und $r_k(x)$ ist

$$\mathrm{P}_{2k}(x+0) = \mathrm{P}_{2k}(x), \qquad \mathrm{P}_{2k}(x-0) = \mathrm{P}_{2k}(x)-r_{2k}(x),$$

also

$$\tfrac{1}{2}\{\mathrm{P}_{2k}(x+0)+\mathrm{P}_{2k}(x-0)\} = \mathrm{P}_{2k}(x)-\tfrac{1}{2}r_{2k}(x). \tag{44}$$

Andererseits ergibt sich aus (11), (12) und (3) für $k\geqslant 3$

$$r_{2k}(x) = \delta(x)D_{2k}x^{k-1}\mathfrak{S}_{2k}(x)+Bx^{k/2} \qquad (k\geqslant 3), \tag{45}$$

$$r_{2k}(x) = \delta(x)D_{2k}x^{k-1}\mathfrak{S}_{2k}(x) \qquad (k=3,4). \tag{46}$$

Aus (43), (44) und (45) folgt

SATZ 7. *Für $k\geqslant 3$ ist*

$$\mathrm{P}_{2k}(x) = D_{2k}\{kZ(k)\}^{-1}\sum_{r\leqslant (k-1)/2}(-1)^r\binom{k}{r}\Omega_{k,r}(x)x^{k-r}+Bx^{k/2}\log x. \tag{47}$$

Analog ergibt sich aus (44), (35), (36), (42), (2) und (46)

(48) $$\mathrm{P}_6(x) = -D_6\{Z(3)\}^{-1}\Omega_{3,1}(x)x^2+Bx\log x,$$

(49) $$\mathrm{P}_8(x) = -D_8\{Z(4)\}^{-1}\{\Omega_{4,1}(x)x^3-\tfrac{3}{2}\Omega_{4,2}(x)x^2\}+Bx\log x.$$

Hierbei ist nach (2) und (7)

(50) $$D_6 = \frac{\pi^3}{2}, \qquad D_8 = \frac{\pi^4}{6},$$
$$Z(3) = L(3) = \frac{\pi^3}{32}, \qquad Z(4) = \frac{15}{16}\zeta(4) = \frac{\pi^4}{96}.$$

Der hier benutzte wohlbekannte Wert

(51) $$L(3) = \frac{\pi^3}{32}$$

ergibt sich z. B. folgendermaßen: Setzt man $y = 0$, $d = 1$, $r = 3$ in (28), so ergibt sich wegen (6) und (3)

$$G_3(0,1) = 2^3\pi^{-3}3!\sum_{u=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{u}\right)\frac{1}{u^3} = 48\pi^{-3}L(3).$$

Andererseits ist nach (22), (17) und (16)

$$G_3(0,1) = \bar{B}_3(0)-2^2\bar{B}_3(0)-2^5\bar{B}_3(-\tfrac{1}{4})$$
$$= -3\bar{B}_3(0)-32\bar{B}_3(\tfrac{3}{4}) = -32\cdot -\tfrac{3}{64} = \tfrac{3}{2},$$

womit (51) nachgewiesen ist.

Aus (48), (49), (50) und (25) ergibt sich

Satz 8.

(52) $$\mathrm{P}_6(x) = -16\Phi_{3,1}(x)x^2+Bx\log x,$$

(53) $$\mathrm{P}_8(x) = -16\Psi_{4,1}(x)x^3+24\Psi_{4,2}(x)x^2+Bx\log x.$$

7 und 8 sind Sätze vom Lursmanaschwilischen Typus, die den Peterssonschen Sätzen 1 und 2 entsprechen. Satz 7 fällt für gerade k mit Satz 5 zusammen. Für ungerade k ist er in zwiefacher Hinsicht günstiger: einmal wird der Wert $k = 3$ zugelassen und sodann enthält die r-Summe ein Glied mehr und das Restglied ist um $x^{1/2}$ besser.

§ 3. Beweis von Satz 6

Im folgenden sei stets

(54) $$r \leqslant k-2.$$

Nach (31), (9) und (1) ist

(55) $$\mathfrak{R}_{2k}(x,1,r) = -2i\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2m\pi x}{m^r} \quad \text{für ungerade } r,$$
$$= 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2m\pi x}{m^r} \quad \text{für gerade } r.$$

Es sei $q > 1$, $q \equiv 1 \pmod 2$. Nach (31) und (10) ist dann

(56) $$\mathfrak{R}_{2k}(x,q,r) = \left(\frac{-1}{q}\right)^k q^{r-k}\sum_{h \bmod q}{}'\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(h+mq)^r}e\left\{-\frac{(h+mq)x}{q}\right\}$$
$$= \left(\frac{-1}{q}\right)^k q^{r-k}\sum_{h \bmod q}{}'\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\equiv h \pmod q}}^{\infty}\frac{1}{m^r}e\left(-\frac{mx}{q}\right)$$

(57) $$= \left(\frac{-1}{q}\right)^k q^{r-k}\sum_{\substack{m=-\infty\\ (m,q)=1}}^{\infty}\frac{1}{m^r}e\left(-\frac{mx}{q}\right).$$

Es sei r ungerade. Dann ergibt sich aus (57), indem man die Glieder m und $-m$ zusammenfaßt,

$$\mathfrak{R}_{2k}(x,q,r) = -2i\left(\frac{-1}{q}\right)^k q^{r-k}\sum_{\substack{m=1\\ (m,q)=1}}^{\infty}\frac{1}{m^r}\sin\frac{2m\pi x}{q}.$$

Nach (55) gilt das auch für $q = 1$. Da ferner nach (33) und (54) für $q > 0$

(58) $$\mathfrak{R}_{2k}(x,q,r) = Bq^{r-k}\log 3q = Bq^{-2}\log 3q$$

ist, kann man über die ungeraden q summieren und bekommt

(59) $$\sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 1 \pmod 2}}^{\infty}\mathfrak{R}_{2k}(x,q,r) = -2i\sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 1 \pmod 2}}^{\infty}\left(\frac{-1}{q}\right)^k q^{r-k}\sum_{\substack{m=1\\ (m,q)=1}}^{\infty}\frac{1}{m^r}\sin\frac{2m\pi x}{q}.$$

Setzt man

$$S(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} \sin \frac{2n\pi x}{u}, \tag{60}$$

so ist

$$S(u) = B; \tag{61}$$

für $r > 1$ ist es nämlich klar und für $r = 1$ folgt es aus (18) und (3). Die Reihe

$$S = \sum_{u,v=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{uv}\right)^k \mu(v) v^{-k} u^{r-k} S(u) \tag{62}$$

konvergiert also absolut, und es ist

$$S = \sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 1 \pmod 2}}^{\infty} \left(\frac{-1}{q}\right)^k q^{r-k} \sum_{uv=q} \frac{\mu(v)}{v^r} S(u). \tag{63}$$

Hierin ist wegen (60)

$$\sum_{uv=q} \frac{\mu(v)}{v^r} S(u) = \sum_{v|q} \frac{\mu(v)}{v^r} S\left(\frac{q}{v}\right)$$

$$= \sum_{v|q} \frac{\mu(v)}{v^r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} \sin \frac{2nv\pi x}{q}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v|q} \frac{\mu(v)}{(nv)^r} \sin \frac{2nv\pi x}{q}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^r} \sin \frac{2m\pi x}{q} \sum_{v|(q,m)} \mu(v)$$

$$= \sum_{\substack{m=1\\ (m,q)=1}}^{\infty} \frac{1}{m^r} \sin \frac{2m\pi x}{q}. \tag{64}$$

Aus (63), (64) und (59) ergibt sich

$$\sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 1 \pmod 2}}^{\infty} \mathfrak{R}_{2k}(x, q, r) = -2iS.$$

Andererseits ist nach (62), (60), (61), (8) und (18)

$$S = \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{v}\right)^k \mu(v) v^{-k} \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{u}\right)^k u^{r-k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} \sin \frac{2n\pi x}{u}$$

$$= \{Z(k)\}^{-1} \sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 1 \pmod 2}}^{\infty} \left(\frac{-1}{q}\right)^k q^{r-k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} \sin \frac{2n\pi x}{q}$$

$$= \{Z(k)\}^{-1} \sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 1 \pmod 2}}^{\infty} \left(\frac{-1}{q}\right)^k q^{r-k} (-1)^{(r+1)/2} \frac{2^{r-1}\pi^r}{r!} \left\{\bar{B}_r\left(\frac{x}{q}\right) + \frac{1}{2}\delta_r\left(\frac{x}{q}\right)\right\}.$$

Wegen (3) ist somit

$$\sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 1 \pmod 2}}^{\infty} \mathfrak{R}_{2k}(x, q, r) = i(-1)^{(r-1)/2}\{Z(k)\}^{-1} \frac{(2\pi)^r}{r!} \times$$

$$\times \sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 1 \pmod 2}}^{\infty} \left(\frac{-1}{q}\right)^k q^{r-k} \bar{B}_r\left(\frac{x}{q}\right) + \pi i \{Z(k)\}^{-1} \sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 1 \pmod 2}}^{\infty} \left(\frac{-1}{q}\right)^k q^{1-k} \delta_r\left(\frac{x}{q}\right).$$

Für nichtganze x ist die zweite q-Summe rechts nach (3) gleich Null. Es genügt daher, die Summe

$$S_1(n) = \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{u}\right)^k u^{1-k} \delta\left(\frac{n}{u}\right)$$

zu betrachten. Nach (3) ist

$$S_1(n) = \sum_{u|n} \left(\frac{-1}{u}\right)^k u^{1-k}.$$

Somit ist für ungerade r

$$\sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 1 \pmod 2}}^{\infty} \mathfrak{R}_{2k}(x, q, r) = i(-1)^{(r-1)/2}\{Z(k)\}^{-1} \frac{(2\pi)^r}{r!} \times \tag{65}$$

$$\times \sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 1 \pmod 2}}^{\infty} \left(\frac{-1}{q}\right)^k q^{r-k} \bar{B}_r\left(\frac{x}{q}\right) + \delta_r(x) \pi i \{Z(k)\}^{-1} \sum_{u|x} \left(\frac{-1}{u}\right)^k u^{1-k}.$$

Es sei r gerade. Dann ergibt sich auf genau die gleiche Weise, indem man die zweite Zeile von (55) und (19) statt der ersten Zeile und (18) benutzt,

$$(66)\quad \sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)}}^{\infty} \mathfrak{R}_{2k}(x, q, r)$$

$$= (-1)^{r/2-1}\{Z(k)\}^{-1}\frac{(2\pi)^r}{r!}\sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)}}^{\infty}\left(\frac{-1}{q}\right)^k q^{r-k}\bar{B}_r\left(\frac{x}{q}\right).$$

Wegen (20) und (3) kann man (65) und (66) in die eine Formel zusammenfassen:

$$\sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)}}^{\infty} \mathfrak{R}_{2k}(x, q, r) = i^{2-r}\{Z(k)\}^{-1}\frac{(2\pi)^r}{r!}\sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)}}^{\infty}\left(\frac{-1}{q}\right)^k q^{r-k}\bar{B}_r\left(\frac{x}{q}\right)+$$

$$+\delta_r(x)\pi i\{Z(k)\}^{-1}\sum_{u|x}\left(\frac{-1}{u}\right)^k u^{1-k}.$$

Nach (31) und (10) ist

$$(67)\quad \sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)}}^{\infty} \mathfrak{R}_{2k}(x, q, r) = 0.$$

Es sei jetzt $q\equiv 0 \pmod 4$. Nach (31) und (10) ist dann, analog zu (57),

$$\mathfrak{R}_{2k}(x, q, r) = 2^k q^{r-k}\sum_{h \bmod q}{}' i^{hk}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(h+mq)^r}e\left\{-\frac{(h+mq)x}{q}\right\}$$

$$= 2^k q^{r-k}\sum_{h \bmod q}{}'\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{i^{(h+mq)k}}{(h+mq)^r}e\left\{-\frac{(h+mq)x}{q}\right\}$$

$$(68)\quad = 2^k q^{r-k}\sum_{\substack{m=-\infty\\ (m,q)=1}}^{\infty}\frac{i^{mk}}{m^r}e\left(-\frac{mx}{q}\right).$$

Die Fälle eines ungeraden und geraden k sollen jetzt getrennt behandelt werden.

I. Es sei k ungerade. In (68) ist dann

$$i^{mk} = i(-1)^{(mk-1)/2} = i\left(\frac{-1}{k}\right)(-1)^{(m-1)/2},$$

und es ist

$$(69)\quad \mathfrak{R}_{2k}(x, q, r) = i\left(\frac{-1}{k}\right)2^k q^{r-k}\sum_{\substack{m=-\infty\\ (m,q)=1}}^{\infty}(-1)^{(m-1)/2}\frac{1}{m^r}e\left(-\frac{mx}{q}\right).$$

1) Es sei r ungerade. Dann ergibt sich aus (69), indem man die Glieder m und $-m$ zusammenfaßt,

$$(70)\quad \mathfrak{R}_{2k}(x, q, r) = i\left(\frac{-1}{k}\right)2^{k+1}q^{r-k}\sum_{\substack{m=1\\ (m,q)=1}}^{\infty}\left(\frac{-1}{m}\right)\frac{1}{m^r}\cos\frac{2m\pi x}{q}.$$

Wegen (58) kann man über die $q\equiv 0 \pmod 4$ summieren und bekommt

$$(71)\quad \sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)}}^{\infty} \mathfrak{R}_{2k}(x, q, r)$$

$$= i\left(\frac{-1}{k}\right)2^{k+1}\sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)}}^{\infty} q^{r-k}\sum_{\substack{u=1\\ (u,q)=1}}^{\infty}\left(\frac{-1}{u}\right)\frac{1}{u^r}\cos\frac{2u\pi x}{q}.$$

Nun folgt eine ähnliche Überlegung, wie sie im Anschluß an (59) gemacht worden ist. Setzt man

$$(72)\quad S(n) = \sum_{u=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{u}\right)\frac{1}{u^r}\cos\frac{2u\pi x}{n},$$

so ist

$$S(n) = B;$$

für $r>1$ ist es nämlich klar und für $r=1$ folgt es aus (28), (22) und (3). Die Reihe

$$(73)\quad S = \sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)}}^{\infty} q^{r-k}\sum_{vn=q}\left(\frac{-1}{v}\right)\frac{\mu(v)}{v^r}S(n)$$

konvergiert also absolut, und es ist

$$\sum_{vn=q}\left(\frac{-1}{v}\right)\frac{\mu(v)}{v^r}S(n)=\sum_{v|q}\left(\frac{-1}{v}\right)\frac{\mu(v)}{v^r}S\left(\frac{q}{v}\right)$$

$$=\sum_{v|q}\left(\frac{-1}{v}\right)\frac{\mu(v)}{v^r}\sum_{u=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{u}\right)\frac{1}{u^r}\cos\frac{2uv\pi x}{q}$$

$$=\sum_{u=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{u}\right)\frac{1}{u^r}\sum_{v|q}\left(\frac{-1}{v}\right)\frac{\mu(v)}{v^r}\cos\frac{2uv\pi x}{q}$$

$$=\sum_{u=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{u}\right)\frac{1}{u^r}\cos\frac{2u\pi x}{q}\sum_{v|(q,u)}\mu(v)$$

(74) $$=\sum_{\substack{u=1\\(u,q)=1}}^{\infty}\left(\frac{-1}{u}\right)\frac{1}{u^r}\cos\frac{2u\pi x}{q}.$$

Aus (71), (73) und (74) ergibt sich

(75) $$\sum_{\substack{q=1\\q\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 4)}}^{\infty}\mathfrak{R}_{2k}(x,q,r)=i\left(\frac{-1}{k}\right)2^{k+1}S.$$

Andererseits ist nach (73), wenn man n durch $4n$ und q durch $4vn$ ersetzt, wegen (8), (72) und (28),

$$S=\sum_{v=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(4vn)^{r-k}\left(\frac{-1}{v}\right)\frac{\mu(v)}{v^r}S(4n)$$

$$=2^{2r-2k}\sum_{v=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{v}\right)\frac{\mu(v)}{v^k}\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-k}S(4n)$$

(76) $$=2^{2r-2k}\{Z(k)\}^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-k}\sum_{u=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{u}\right)\frac{1}{u^r}\cos\frac{u\pi x}{2n}$$

$$=(-1)^{(r+1)/2}\frac{2^{r-2k}\pi^r}{r!}\{Z(k)\}^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-k}\left\{G_r(x,n)-\frac{1}{2}\delta_r\left(\frac{x}{n}\right)\sin\frac{\pi x}{2n}\right\}.$$

Setzt man dies in (75) ein, so ergibt sich wegen (3)

(77) $$\sum_{\substack{q=1\\q\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 4)}}^{\infty}\mathfrak{R}_{2k}(x,q,r)$$

$$=i(-1)^{(r+k)/2}2^{r+1-k}\frac{\pi^r}{r!}\{Z(k)\}^{-1}\sum_{d=1}^{\infty}d^{r-k}G_r(x,d)+$$

$$+\pi i\left(\frac{-1}{k}\right)2^{1-k}\{Z(k)\}^{-1}\sum_{d=1}^{\infty}d^{1-k}\delta_r\left(\frac{x}{d}\right)\sin\frac{\pi x}{2d}.$$

Für $r>1$ und für $r=1$, nichtganze x ist die zweite d-Summe nach (3) gleich Null. Es genügt daher, die Summe

$$S_2(n)=\sum_{d=1}^{\infty}d^{1-k}\delta\left(\frac{n}{d}\right)\sin\frac{\pi n}{2d}$$

zu betrachten. Nach (3) ist

$$S_2(n)=\sum_{d|n}d^{1-k}\sin\frac{\pi n}{2d}.$$

Somit ist für ungerade r

(78) $$\sum_{\substack{q=1\\q\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 4)}}^{\infty}\mathfrak{R}_{2k}(x,q,r)$$

$$=i(-1)^{(r+k)/2}2^{r+1-k}\frac{\pi^r}{r!}\{Z(k)\}^{-1}\sum_{d=1}^{\infty}d^{r-k}G_r(x,d)+$$

$$+\delta_r(x)\pi i\{Z(k)\}^{-1}\left(\frac{-1}{k}\right)2^{1-k}\sum_{d|x}d^{1-k}\sin\frac{\pi x}{2d}.$$

Aus (65), (67), (78), (32), (54), (24) und (20) ergibt sich für ungerade r

(79) $$\mathfrak{R}_{2k}(x,r)=i^{2-r}\frac{(2\pi)^r}{r!}\{Z(k)\}^{-1}\Phi_{k,r}(x)+$$

$$+\delta_r(x)\pi i\{Z(k)\}^{-1}\left(\sum_{u|x}\left(\frac{-1}{u}\right)u^{1-k}+\left(\frac{-1}{k}\right)2^{1-k}\sum_{d|x}d^{1-k}\sin\frac{\pi x}{2d}\right).$$

Es sei $n=2^{a}N$. Dann ist nach (14)

$$\sum_{u|n}\left(\frac{-1}{u}\right)u^{1-k}=\sum_{u|N}\left(\frac{-1}{u}\right)u^{1-k}=\varrho_{1-k}(N). \tag{80}$$

Ferner ist

$$\sum_{d|n}d^{1-k}\sin\frac{\pi n}{2d}=\sum_{\substack{d|n\\ n/d\equiv 1 \pmod 2}}.$$

Ersetzt man daher d durch $2^{a}u$, n durch $2^{a}N$, so folgt

$$\sum_{d|n}d^{1-k}\sin\frac{\pi n}{2d}=2^{(1-k)a}\sum_{u|N}u^{1-k}\left(\frac{-1}{N/u}\right)$$

$$=\left(\frac{-1}{N}\right)2^{(1-k)a}\sum_{u|N}\left(\frac{-1}{u}\right)u^{1-k}$$

$$=\left(\frac{-1}{N}\right)2^{(1-k)a}\varrho_{1-k}(N). \tag{81}$$

Für $r>1$ und für $r=1$, nichtganze x ist das zweite Glied rechts in (79) gleich Null. Für $r=1$, $x=n$ ist es nach (80), (81) und (15) gleich

$$\pi i\{Z(k)\}^{-1}\left\{1+\left(\frac{-1}{kN}\right)2^{(1-k)(a+1)}\right\}\varrho_{1-k}(N)=\pi i\mathfrak{S}_{2k}(2^{a}N)=\pi i\mathfrak{S}_{2k}(n).$$

Im ersten Gliede rechts in (79) wende man (25) an. Damit ist Satz 6 in unserem Falle (k, r ungerade) bewiesen.

2) Es sei r gerade. Aus (69) folgt dann

$$\mathfrak{R}_{2k}(x,q,r)=\left(\frac{-1}{k}\right)2^{k+1}q^{r-k}\sum_{\substack{m=1\\ (m,q)=1}}^{\infty}\left(\frac{-1}{m}\right)\frac{1}{m^{r}}\sin\frac{2m\pi x}{q}.$$

Führt man jetzt genau dieselbe Überlegung durch, wie im Falle 1) im Anschluß an (70), so ergibt sich, statt (75) und (76),

$$\sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 0 \pmod 4}}^{\infty}\mathfrak{R}_{2k}(x,q,r)=\left(\frac{-1}{k}\right)2^{k+1}S, \tag{82}$$

$$S=2^{2r-2k}\{Z(k)\}^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-k}\sum_{u=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{u}\right)\frac{1}{u^{r}}\sin\frac{u\pi x}{2n}. \tag{83}$$

Aus (82), (83) und (29) ergibt sich, statt (77),

$$\sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 0 \pmod 4}}^{\infty}\mathfrak{R}_{2k}(x,q,r)=(-1)^{(r+k-1)/2}2^{r+1-k}\frac{\pi^{r}}{r!}\{Z(k)\}^{-1}\sum_{d=1}^{\infty}d^{r-k}G_{r}(x,d),$$

und daraus folgt, wie im Falle 1),

$$\mathfrak{R}_{2k}(x,r)=i^{2-r}\frac{(2\pi)^{r}}{r!}\{Z(k)\}^{-1}\Phi_{k,r}(x).$$

Wegen (25) und (3) ist damit Satz 6 auch in diesem Falle bewiesen.

II. Es sei k gerade. In (68) ist dann

$$i^{mk}=(-1)^{k/2},$$

und es folgt, statt (69),

$$\mathfrak{R}_{2k}(x,q,r)=(-1)^{k/2}2^{k}q^{r-k}\sum_{\substack{m=-\infty\\ (m,q)=1}}^{\infty}\frac{1}{m^{r}}e\left(-\frac{mx}{q}\right). \tag{84}$$

1) Es sei r ungerade. Dann ergibt sich aus (84), indem man die Glieder m und $-m$ zusammenfaßt,

$$\mathfrak{R}_{2k}(x,q,r)=i(-1)^{k/2+1}2^{k+1}q^{r-k}\sum_{\substack{m=1\\ (m,q)=1}}^{\infty}\frac{1}{m^{r}}\sin\frac{2m\pi x}{q}.$$

Behandelt man dies, wie oben (70), so ergibt sich weiter, statt (75) und (76),

$$\sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 0 \pmod 4}}^{\infty}\mathfrak{R}_{2k}(x,q,r)=i(-1)^{k/2+1}2^{k+1}S, \tag{85}$$

$$S=2^{2r-2k}\{Z(k)\}^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-k}\sum_{u=1}^{\infty}\frac{1}{u^{r}}\sin\frac{u\pi x}{2n}. \tag{86}$$

Wendet man jetzt (26) statt (28) an, so folgt

$$S=(-1)^{(r-1)/2}2^{2r-2k-1}\frac{\pi^{r}}{r!}\{Z(k)\}^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-k}\left\{F_{r}(x,n)-\frac{1}{2}\delta_{r}\left(\frac{x}{n}\right)\cos\frac{\pi x}{2n}\right\}.$$

Setzt man dies in (85) ein, so ergibt sich wegen (3)

$$\sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 0 \pmod 4}}^{\infty}\mathfrak{R}_{2k}(x,q,r)=i(-1)^{(r+1+k)/2}2^{2r-k}\frac{\pi^{r}}{r!}\{Z(k)\}^{-1}\sum_{d=1}^{\infty}d^{r-k}F_{r}(x,d)+$$

$$+\pi i(-1)^{k/2}2^{1-k}\{Z(k)\}^{-1}\sum_{d=1}^{\infty}d^{1-k}\delta_{r}\left(\frac{x}{d}\right)\cos\frac{\pi x}{2d}.$$

Für $r > 1$ und für $r = 1$, nichtganze x ist die zweite d-Summe nach (3) gleich Null. Es genügt daher, die Summe

$$S_3(n) = \sum_{d=1}^{\infty} d^{1-k}\delta\left(\frac{n}{d}\right)\cos\frac{\pi n}{2d}$$

zu betrachten. Nach (3) ist

$$S_3(n) = \sum_{d|n} d^{1-k}\cos\frac{\pi n}{2d}. \tag{87}$$

Somit ist für ungerade r

$$\sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)}}^{\infty} \mathfrak{N}_{2k}(x, q, r) \tag{88}$$

$$= i(-1)^{(r+1+k)/2}2^{2r-k}\frac{\pi^r}{r!}\{Z(k)\}^{-1}\sum_{d=1}^{\infty} d^{r-k}F_r(x, d)+$$

$$+\delta_r(x)\pi i\{Z(k)\}^{-1}(-1)^{k/2}2^{1-k}\sum_{d|x} d^{1-k}\cos\frac{\pi x}{2d}.$$

Aus (65), (67), (88), (32), (54), (23) und (20) ergibt sich für ungerade r

$$\mathfrak{N}_{2k}(x, r) = i^{2-r}\frac{(2\pi)^r}{r!}\{Z(k)\}^{-1}\Psi_{k,r}(x)+ \tag{89}$$

$$+\delta_r(x)\pi i\{Z(k)\}^{-1}\left(\sum_{u|x} u^{1-k}+(-1)^{k/2}2^{1-k}\sum_{d|x} d^{1-k}\cos\frac{\pi x}{2d}\right).$$

Es sei $n = 2^\alpha N$. Dann ist nach (13)

$$\sum_{u|n} u^{1-k} = \sum_{u|N} u^{1-k} = \sigma_{1-k}(N). \tag{90}$$

Ferner ist nach (87)

$$S_3(n) = \sum_{\substack{d|n\\ n/d\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)}} d^{1-k}\cos\frac{\pi n}{2d}. \tag{91}$$

Hieraus folgt zunächst

$$S_3(N) = 0. \tag{92}$$

Es sei jetzt $\alpha > 0$. In (91) ist dann $d = 2^\beta u$; $u|N$; $\beta = 0, \ldots, \alpha-1$, und man bekommt

$$S_3(n) = S_3(2^\alpha N) = \sum_{\beta=0}^{\alpha-1}\sum_{u|N}(2^\beta u)^{1-k}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2^{\alpha-\beta}\frac{N}{u}\right)$$

$$= \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} 2^{(1-k)\beta}\sum_{u|N} u^{1-k}\cos(2^{\alpha-\beta-1}\pi)$$

$$= \sum_{0\leqslant\beta<\alpha-1} 2^{(1-k)\beta}\sum_{u|N} u^{1-k} - 2^{(1-k)(\alpha-1)}\sum_{u|N} u^{1-k}$$

$$= \Big\{\sum_{0\leqslant\beta<\alpha-1} 2^{(1-k)\beta} - 2^{(1-k)(\alpha-1)}\Big\}\sigma_{1-k}(N)$$

$$= \{1-2^{(1-k)\alpha}(2^k-1)\}(1-2^{1-k})^{-1}\sigma_{1-k}(N). \tag{93}$$

Für $r > 1$ und für $r = 1$, nichtganze x ist das zweite Glied rechts in (89) gleich Null. Für $r = 1$, $x = n = 2^\alpha N$ ist es nach (90), (87), (92), (93) und (15) gleich

$$\pi i\{Z(k)\}^{-1}\{\sigma_{1-k}(N)+(-1)^{k/2}2^{1-k}S_3(n)\} = \pi i\mathfrak{S}_{2k}(2^\alpha N) = \pi i\mathfrak{S}_{2k}(n).$$

Im ersten Gliede rechts in (89) wende man (25) an. Damit ist Satz 6 in unserem Falle bewiesen.

2) Es sei r gerade. Aus (84) folgt dann

$$\mathfrak{N}_{2k}(x, q, r) = (-1)^{k/2}2^{k+1}q^{r-k}\sum_{\substack{m=1\\ (m,q)=1}}^{\infty}\frac{1}{m^r}\cos\frac{2m\pi x}{q}.$$

Schließt man jetzt wie im Falle 1), so ergibt sich statt (85) und (86)

$$\sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)}}^{\infty}\mathfrak{N}_{2k}(x, q, r) = (-1)^{k/2}2^{k+1}S, \tag{94}$$

$$S = 2^{2r-2k}\{Z(k)\}^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-k}\sum_{u=1}^{\infty}\frac{1}{u^r}\cos\frac{u\pi x}{2n}. \tag{95}$$

Aus (94), (95) und (27) ergibt sich

$$\sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)}}^{\infty}\mathfrak{N}_{2k}(x, q, r) = (-1)^{(k+r)/2}2^{2r-k}\frac{\pi^r}{r!}\{Z(k)\}^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-k}F_r(x, n),$$

und daraus folgt, wie im Falle 1),

$$\mathfrak{N}_{2k}(x, r) = i^{2-r}\frac{(2\pi)^r}{r!}\{Z(k)\}^{-1}\Psi_{k,r}(x).$$

Wegen (25) und (3) ist Satz 6 auch in diesem letzten Fall bewiesen.

TIFLIS, DEN 5. NOVEMBER 1959
MATHEMATISCHES INSTITUT

Literatur

[1] А. П. Лурсманашвили, *О числе целых точек в многомерных шарах*, Труды Тбилисского Математического Института 19 (1953), 79-120.

[2] H. Petersson, *Über die Anzahl der Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 5 (1926), 116-150.

[3] A. Walfisz, *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln*, Mathematische Zeitschrift 27 (1927), 469-480.

[4] — *О представлении чисел суммами квадратов. Асимптотические формулы*, Успехи математических наук 7 (1952), 97-178. Auch englisch: *On the representation of numbers by sums of squares. Asymptotic formulas*, American Mathematical Society Translations, Series 2, 3 (1956), 163-248.

[5] — *Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln*, Warszawa 1957.

Reçu par la Rédaction le 17. 11. 1959

ACTA ARITHMETICA
VI (1960)

On a Pellian equation conjecture

by

L. J. Mordell (Boulder, Colo.)

In a joint paper by Ankeny, Artin, and Chowla (see [1]), there is enunciated the following:

CONJECTURE. *Let p be a prime $\equiv 1 \pmod 4$, and let $\varepsilon = \frac{1}{2}(t+u\sqrt{p}) > 1$ be the fundamental unit in the quadratic field $K(\sqrt{p})$ over the rational field K. Then $u \not\equiv 0 \pmod p$.*

Here $(y, x) = (t, u)$ is that solution of

$$y^2 - px^2 = -4 \tag{1}$$

with $y > 0$ and with least positive integer value for x. The equation is of course known to be solvable and an explicit solution is given in (8) and (11) below. It is also stated that when $p \equiv 5 \pmod 8$, the conjecture has been verified for all $p < 2000$. The only further explicit result about the conjecture seems to be that Professor Taussky-Todd has had it verified for $p \equiv 1 \pmod 4$ with $p < 100{,}000$ by Dr. Goldman.

I prove here the

THEOREM I. *If p is a regular prime, i. e. the number of classes of ideals in the cyclotomic field $K(e^{2\pi i/p})$ is not divisible by p, then $u \not\equiv 0 \pmod p$, i. e. the conjecture is true.*

As is well known, Kummer has proved that p is regular if and only if none of the numerators of the first $\frac{1}{2}(p-3)$ Bernoulli numbers as defined in (2) is divisible by p. He has shown that the only non-regular primes < 100 are 37, 59, 67.

Theorem IV of the joint paper contains the result that if h is the class number for the quadratic field $K(\sqrt{p})$, then if $p \equiv 5 \pmod 8$,

$$-2h\frac{u}{t} \equiv C_{(p-3)/2} \pmod p, \tag{1a}$$

where for this particular case, $C_{(p-3)/2}$ is defined by

$$\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{C_n t^n}{n!} = 1 + \frac{1}{e^t - 1}.$$