ACTA ARITHMETICA
VI (1960)

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln III

von

A. Walfisz (Tiflis)

§ 1. Bezeichnungen, Hilfsbetrachtungen

Im folgenden bezeichnen a, h, l, m ganze Zahlen; d, j, n, q, r positive ganze Zahlen; k ganze Zahlen $\geqslant 2$; u, v positive ungerade Zahlen; w ungerade Zahlen; y, z reelle Zahlen; s, t positive Zahlen; c komplexe Zahlen. Ferner sei $x \geqslant 3$, $0 < \varepsilon < 1$.

Diese Buchstaben werden nötigenfalls mit Indizes versehen. Für die Buchstaben, die als Funktionszeichen benutzt werden, gelten aber die obigen Abmachungen nicht; z. B. braucht die Funktion $r_q(m)$ nicht für alle m und q eine positive ganze Zahl zu sein.

Der Buchstabe B *ohne Indizes* bezeichnet unterschiedslos Zahlen, die ihrem absoluten Betrage nach unterhalb von Schranken liegen, die nur von k abhängen dürfen.

$l|m$ bedeutet, daß l in m als Teiler aufgeht; dagegen bedeutet c_1/c_2 einen Bruch mit dem Zähler c_1 und Nenner c_2.

$\left(\frac{a}{u}\right)$ ist für $u > 1$ das Jacobische Symbol; ist Eins für $u = 1$. Ferner ist $\left(\frac{-1}{-u}\right) = -\left(\frac{-1}{u}\right)$.

Weiter sei

$$e(y) = e^{2\pi i y}.$$

In der Summe $\sum_{a \bmod q}$ durchläuft a ein vollständiges Restsystem $\bmod q$, in der Summe $\sum'_{a \bmod q}$ ein reduziertes System; in der Summe $\sum_{w \bmod 4q}$ durchläuft w alle ungeraden Restklassen $\bmod 4q$. In allen übrigen Summen ist die untere Summationsgrenze, falls sie nicht ausdrücklich angegeben wird, gleich Eins. Ferner sei

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} = \lim_{n=\infty} \sum_{m=-n}^{n}. \tag{1}$$

Dieselbe Vereinbarung gilt auch, wenn auf m noch gewisse zusätzliche Bedingungen auferlegt werden. Leere Summen sind gleich Null zu setzen.

Es sei

$$r_q(y) = \sum_{\substack{a_1,\dots,a_q=-\infty \\ a_1^2+\dots+a_q^2=y}}^{\infty} 1$$

die Anzahl der Darstellungen von y als Summe von q Quadraten ganzer Zahlen;

$$A_q(t) = \sum_{0\leqslant m\leqslant t} r_q(m) = 1+\sum_{n\leqslant t} r_q(n)$$

die Anzahl der Gitterpunkte $(a_1, \dots, a_q)$ in der q-dimensionalen Kugel

$$y_1^2+\dots+y_q^2 \leqslant t.$$

Ferner bezeichne

$$V_q(t) = \frac{\pi^{q/2}}{\Gamma(q/2+1)} t^{q/2}$$

das Volumen dieser Kugel und

$$\mathrm{P}_q(t) = A_q(t)-V_q(t)$$

den Gitterrest. Weiter sei

(2) $$D_q = \frac{\pi^{q/2}}{\Gamma(q/2)};$$

(3) $$\delta(y) = 1 \text{ für ganze } y, \quad \delta_r(y) = \delta(y) \text{ für } r=1,$$
$$= 0 \text{ für nichtganze } y; \quad = 0 \text{ für } r>1.$$

Für $s>1$ sei

(4) $$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad L(s) = \sum_{u=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{u}\right)u^{-s},$$

(5) $$Z(s) = Z(s;k) = \sum_{u=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{u}\right)^k u^{-s},$$

also

(6) $$Z(s) = L(s) \quad (k \text{ ungerade}),$$
$$= (1-2^{-s})\zeta(s) \quad (k \text{ gerade});$$

(7) $$\{Z(s)\}^{-1} = \sum_{u=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{u}\right)^k \mu(u)u^{-s}.$$

Für die Gaußsche Summe

(8) $$S(h,q) = \sum_{a \bmod q} e\left(\frac{ha^2}{q}\right)$$

gelten bekanntlich, sofern $(h,q)=1$, folgende einfache Tatsachen (vgl. z. B. [4], (1.1.2) und (1.1.9)):

(9) $$|S(h,q)| \leqslant (2q)^{1/2};$$

(10) $$S^2(h,q) = \left(\frac{-1}{q}\right)q \quad \text{für} \quad q\equiv 1 \pmod 2,$$
$$= 0 \quad \text{für} \quad q \equiv 2 \pmod 4,$$
$$= 2i^h q \quad \text{für} \quad q \equiv 0 \pmod 4.$$

Ferner ergibt sich aus (8) unmittelbar für beliebige h, q

(11) $$S(dh, dq) = dS(h,q).$$

Die Reihe

(12) $$\mathfrak{S}_k(y) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{h \bmod q}{}' \left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^k e\left(-\frac{hy}{q}\right)$$

konvergiert wegen (9) für $k>4$ absolut. Diese Reihe geht in die bekannten Näherungsausdrücke ein, die G. H. Hardy für die Funktion $r_k(n)$ erhalten hat (vgl. z. B. [4], Hilfssätze 1.4.2 und 4.2.4):

(13) $$r_k(n) = D_k n^{k/2-1}\mathfrak{S}_k(n)+Bn^{k/4} \quad (k>4),$$

(14) $$r_k(n) = D_k n^{k/2-1}\mathfrak{S}_k(n) \quad (k=5,6,7,8).$$

Es sei $B_n(z)$ das n-te Bernoullische Polynom in der üblichen Bezeichnungsweise, also insbesondere

(15) $$B_1(z) = z-\tfrac{1}{2}, \quad B_3(z) = z^3-\tfrac{3}{2}z^2+\tfrac{1}{2}z.$$

Ferner werde

(16) $$\bar{B}_n(y) = B_n(y-[y])$$

gesetzt. Bekanntlich gelten für beliebige y die folgenden Fourierentwicklungen:

(17) $$\bar{B}_r(y) = (-1)^{(r+1)/2}\frac{r!}{2^{r-1}\pi^r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi y}{n^r} - \frac{\delta_r(y)}{2} \quad (r \text{ ungerade}),$$

(18) $$\bar{B}_r(y) = (-1)^{r/2-1}\frac{r!}{2^{r-1}\pi^r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi y}{n^r} \quad (r \text{ gerade}).$$

Wegen (1) und (3) kann man (17) und (18) in die eine Formel zusammenfassen:

(19) $$\bar{B}_r(y) = i^{2-r}\frac{r!}{(2\pi)^r}\sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{\infty}\frac{e(my)}{m^r} - \frac{\delta_r(y)}{2}.$$

Es sei

$$F_r(y) = \bar{B}_r\left(\frac{y}{2}\right) - 2^r \bar{B}_r\left(\frac{y}{4}\right), \tag{20}$$

$$G_r(y) = \bar{B}_r(y) - 2^{r-1}\bar{B}_r\left(\frac{y}{2}\right) - 2^{2r-1}\bar{B}_r\left(\frac{y-1}{4}\right). \tag{21}$$

Für diese Funktionen gelten bei beliebigen y die folgenden Fourierentwicklungen (man vergleiche in [5] die Formeln (21), (22) mit $q=1$ und (26)-(29) mit $d=1$):

$$F_r(y) = (-1)^{(r-1)/2} 2\frac{r!}{\pi^r}\sum_{u=1}^{\infty}\frac{1}{u^r}\sin\frac{u\pi y}{2} + \tag{22}$$

$$+\frac{1}{2}\delta_r(y)\cos\frac{\pi y}{2} \qquad (r \text{ ungerade}),$$

$$F_r(y) = (-1)^{r/2} 2\frac{r!}{\pi^r}\sum_{u=1}^{\infty}\frac{1}{u^r}\cos\frac{u\pi y}{2} \qquad (r \text{ gerade}); \tag{23}$$

$$G_r(y) = (-1)^{(r+1)/2}\frac{2^r r!}{\pi^r}\sum_{u=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{u}\right)\frac{1}{u^r}\cos\frac{u\pi y}{2} + \tag{24}$$

$$+\frac{1}{2}\delta_r(y)\sin\frac{\pi y}{2} \qquad (r \text{ ungerade}),$$

$$G_r(y) = (-1)^{r/2}\frac{2^r r!}{\pi^r}\sum_{u=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{u}\right)\frac{1}{u^r}\sin\frac{u\pi y}{2} \qquad (r \text{ gerade}). \tag{25}$$

Die Formeln (22), (23) einerseits und (24), (25) andererseits lassen sich wie folgt in je eine zusammenfassen:

$$F_r(y) = \frac{r!}{(\pi i)^r}\sum_{w=-\infty}^{\infty}\frac{1}{w^r}e\left(\frac{wy}{4}\right) + \frac{1}{2}\delta_r(y)\cos\frac{\pi y}{2}, \tag{26}$$

$$G_r(y) = i^{3-r}2^{r-1}\frac{r!}{\pi^r}\sum_{w=-\infty}^{\infty}\left(\frac{-1}{w}\right)\frac{1}{w^r}e\left(\frac{wy}{4}\right) + \frac{1}{2}\delta_r(y)\sin\frac{\pi y}{2}. \tag{27}$$

Weiter sei

$$\Psi_{k,r}(y) = \sum_{u=1}^{\infty}u^{r-k-1}\sum_{a \bmod u}\bar{B}_r\left(\frac{y-a^2}{u}\right) + \tag{28}$$

$$+(-1)^{k/2+1}2^{r-k-2}\sum_{d=1}^{\infty}d^{r-k-1}\sum_{a \bmod 4d}F_r\left(\frac{y-a^2}{d}\right) \qquad (k \geqslant 4 \text{ gerade},\ r \leqslant k-2),$$

$$\Phi_{k,r}(y) = \sum_{u=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{u}\right)u^{r-k-1}\sum_{a \bmod u}\bar{B}_r\left(\frac{y-a^2}{u}\right) + \tag{29}$$

$$+(-1)^{(k+1)/2}2^{-k-1}\sum_{d=1}^{\infty}d^{r-k-1}\sum_{a \bmod 4d}G_r\left(\frac{y-a^2}{d}\right) \quad (k \geqslant 3 \text{ ungerade},\ r \leqslant k-2),$$

$$\begin{aligned} \Omega_{k,r}(y) &= \Psi_{k,r}(y) \quad \text{für gerade } k, \\ &= \Phi_{k,r}(y) \quad \text{für ungerade } k. \end{aligned} \tag{30}$$

Die Reihen (28) und (29) konvergieren absolut; ihr allgemeines Glied ist nämlich Bu^{-2} bzw. Bd^{-2}. Es soll jetzt gezeigt werden, daß man (28) auf den Fall $k=2$, $r=1$ und (29) auf den Fall $k=3$, $r=2$ ausdehnen kann. Hierzu reicht es hin, die folgenden Abschätzungen nachzuweisen:

$$\sum_{a \bmod u}\bar{B}_2\left(\frac{y-a^2}{u}\right) = Bu^{1/2}, \tag{31}$$

$$\sum_{a \bmod 4d}G_2\left(\frac{y-a^2}{d}\right) = Bd^{1/2}, \tag{32}$$

$$\sum_{a \bmod u}\bar{B}_1\left(\frac{y-a^2}{u}\right) = Bu^{2/3}, \tag{33}$$

$$\sum_{a \bmod 4d}F_1\left(\frac{y-a^2}{d}\right) = Bd^{2/3}. \tag{34}$$

Zum Beweise werde zunächst

$$T_q = T_q(y) = \sum_{a \bmod q}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}e\left(\frac{m(a^2-y)}{q}\right) \tag{35}$$

gesetzt. Dann ist wegen (8)

$$T_q = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}e\left(-\frac{my}{q}\right)\sum_{a \bmod q}e\left(\frac{ma^2}{q}\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}e\left(-\frac{my}{q}\right)S(m,q),$$

$$|T_q| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty}m^{-2}|S(m,q)| = \sum_{d|q}\sum_{\substack{m=1 \\ (m,q)=d}}^{\infty}m^{-2}|S(m,q)|.$$

Ersetzt man hier m durch dm, so folgt nach (11) und (9)

$$|T_q| \leqslant \sum_{d|q} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,q/d)=1}}^{\infty} (md)^{-2} \left| S\left(md, \frac{q}{d}\, d\right)\right| = \sum_{d|q} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,q/d)=1}}^{\infty} m^{-2} d^{-1} \left| S\left(m, \frac{q}{d}\right)\right| \leqslant \sum_{d|q} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,q/d)=1}}^{\infty} m^{-2} d^{-1} 2 \left(\frac{q}{d}\right)^{1/2} \leqslant 2 \sum_{d=1}^{\infty} d^{-3/2} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2} q^{1/2},$$

also

(36) $$T_q(y) = Bq^{1/2}.$$

Nach (18), (35) und (36) ist

$$\sum_{a \bmod q} \bar{B}_2\left(\frac{y-a^2}{q}\right) = \pi^{-2} \sum_{a \bmod q} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cos \frac{2m\pi(a^2-y)}{q}$$

(37) $$= \pi^{-2} \operatorname{Re} T_q(y) = Bq^{1/2}.$$

Die Abschätzung (31) ist damit bewiesen. Auch (32) läßt sich auf (37) zurückführen. Nach (21) und (16) ist nämlich

$$\sum_{a \bmod 4d} G_2\left(\frac{y-a^2}{d}\right) = \sum_{a \bmod 4d} \bar{B}_2\left(\frac{y-a^2}{d}\right) - 2 \sum_{a \bmod 4d} \bar{B}_2\left(\frac{y-a^2}{2d}\right) - 8 \sum_{a \bmod 4d} \bar{B}_2\left(\frac{y-d-a^2}{4d}\right)$$

$$= 4 \sum_{a \bmod d} \bar{B}_2\left(\frac{y-a^2}{d}\right) - 4 \sum_{a \bmod 2d} \bar{B}_2\left(\frac{y-a^2}{2d}\right) - 8 \sum_{a \bmod 4d} \bar{B}_2\left(\frac{y-d-a^2}{4d}\right) = Bd^{1/2}.$$

Um (33) und (34) nachzuweisen, führe man statt (35) die Summe

(38) $$S_q = S_q(y) = \sum_{a \bmod q} \bar{B}_1\left(\frac{y-a^2}{q}\right) = \sum_{a=1}^{q} \bar{B}_1\left(\frac{y-a^2}{q}\right)$$

ein und wende auf sie den folgenden van der Corputschen Satz an (vgl. z. B. [4], Hilfssatz 2.3.4; die dortige Funktion $\psi(z) = z - [z] - \frac{1}{2}$ fällt wegen (16) und (15) mit $\bar{B}_1(z)$ zusammen):

Es sei $z_1 < z_2$, $f(z)$ im Intervall $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$ reell und zweimal differenzierbar. In diesem Intervall sei beständig $f''(z) \geqslant \varepsilon$ oder beständig $f''(z) \leqslant -\varepsilon$, wo ε von z unabhängig ist. Dann ist

(39) $$\sum_{z_1 \leqslant m \leqslant z_2} \bar{B}_1\{f(m)\} = B|f'(z_2) - f'(z_1)|\,\varepsilon^{-2/3} + B\varepsilon^{-1/2}.$$

Auf die Summe (38) wende man für $q > 2$ die Abschätzung (39) an mit

$$z_1 = 1, \quad z_2 = q, \quad f(z) = \frac{y-z^2}{q}.$$

Es ist dann

$$f'(z) = -\frac{2z}{q}, \quad f''(z) = -\frac{2}{q}.$$

Man kann also $\varepsilon = 2/q$ nehmen und bekommt

$$S_q = B\frac{2(q-1)}{q}\left(\frac{2}{q}\right)^{-2/3} + Bq^{1/2},$$

d. h.

(40) $$S_q(y) = Bq^{2/3}.$$

Für $q = 1$ und $q = 2$ ist (40) wegen (38) auch erfüllt. Damit ist zugleich auch (33) bewiesen. Weiter ist nach (20), (16), (38) und (40)

$$\sum_{a \bmod 4d} F_1\left(\frac{y-a^2}{d}\right) = \sum_{a \bmod 4d} \left\{\bar{B}_1\left(\frac{y-a^2}{2d}\right) - 2\bar{B}_1\left(\frac{y-a^2}{4d}\right)\right\} = 2S_{2d}(y) - 2S_{4d}(y) = Bd^{2/3},$$

also (34) erfüllt.

Schließlich sei

(41) $$\mathfrak{R}_k(x, q, r) = \sum_{h \bmod q}{}' \left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^k \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq -h/q}}^{\infty} \frac{e\{-(h/q+m)x\}}{(h/q+m)^r},$$

(42) $$\mathfrak{R}_k(x, r) = \sum_{q=1}^{\infty} \mathfrak{R}_k(x, q, r) \quad (k > 4,\ r < k/2 - 1).$$

Die Reihe (42) konvergiert absolut und gleichmäßig in x; es ist nämlich (vgl. [4], Hilfssatz 4.1.3)

(43) $$\mathfrak{R}_k(x, q, r) = Bq^{r-k/2} \log 3q.$$

§ 2. Problemstellung

Von Petersson [2] rühren zwei Sätze über die näherungsweise Darstellung der Funktion

$$\tfrac{1}{2}\{\mathrm{P}_k(x+0)+\mathrm{P}_k(x-0)\} \qquad (k>4)$$

her; in der ersten gleichnamigen Arbeit [3] werden sie auf einfachere Art bewiesen (der Beweis ist in [4], § 4.1 und § 4.3 wiedergegeben). Im folgenden sollen nur Kugeln ungerader Dimension $2k+1$ ($\geqslant 5$) betrachtet werden (der Fall gerader Dimensionen $2k\geqslant 6$ bildet den Gegenstand der vorhergehenden Arbeit [5]). Für diese lauten die Peterssonschen Sätze wie folgt:

SATZ 1.

$$\tfrac{1}{2}\{\mathrm{P}_{2k+1}(x+0)+\mathrm{P}_{2k+1}(x-0)\} \tag{44}$$

$$= -\sum_{r\leqslant k/2}\frac{1}{(2\pi i)^r}\,\frac{\pi^{k+1/2}}{\Gamma(k-r+\frac{3}{2})}\,x^{k-r+1/2}\,\mathfrak{N}_{2k+1}(x,r)+Bx^{k/2+1/4}\log x.$$

SATZ 2.

$$\tfrac{1}{2}\{\mathrm{P}_5(x+0)+\mathrm{P}_5(x-0)\} = -\frac{D_5}{2\pi i}x^{3/2}\mathfrak{N}_5(x,1)+Bx, \tag{45}$$

$$\tfrac{1}{2}\{\mathrm{P}_7(x+0)+\mathrm{P}_7(x-0)\} \tag{46}$$

$$= -\frac{D_7}{2\pi i}x^{5/2}\mathfrak{N}_7(x,1)-\frac{5D_7}{2(2\pi i)^2}x^{3/2}\mathfrak{N}_7(x,2)+Bx.$$

Demgegenüber hat Lursmanaschwili [1] folgenden Näherungssatz für $\mathrm{P}_{2k+1}(x)$ ($k\geqslant 4$) bewiesen (er ist in [4], § 5.4 in leicht veränderter Bezeichnung wiedergegeben):

SATZ 3. *Für* $k\geqslant 2j+2$ *ist*

$$\mathrm{P}_{2k+1}(x) = \pi^{k+1/2}\{Z(k)\}^{-1}\sum_{r=1}^{j}\frac{(-1)^r}{r!}\,\frac{x^{k-r+1/2}}{\Gamma(k-r+\frac{3}{2})}\,\Omega_{k,r}(x)+ \tag{47}$$

$$+Bx^{k-j-1/2}\log x.$$

Hier ist zunächst $k\geqslant 4$; die Werte $k=2$ und $k=3$ werden also nicht zugelassen. Nach (28)-(30) sind ferner die Funktionen $\Omega_{k,r}(x)$ in (47) beschränkt, d. h. man hat

$$\Omega_{k,r}(x)=B.$$

Gilt also (47) für ein gewisses $j>1$, so gilt es auch für $j-1$. Für gerade k ist $j=k/2-1$ das größte zulässige j; für ungerade k ist es $j = (k-3)/2$. Wegen (6) und (30) kann man daher den Lursmanaschwilischen Satz 6 so ausdrücken:

SATZ 4. *Für gerade* $k\geqslant 4$ *ist*

$$\mathrm{P}_{2k+1}(x) = \pi^{k+1/2}\{(1-2^{-k})\zeta(k)\}^{-1}\sum_{r=1}^{k/2-1}\frac{(-1)^r}{r!}\,\frac{x^{k-r+1/2}}{\Gamma(k-r+\frac{3}{2})}\,\Psi_{k,r}(x)+ \tag{48}$$

$$+Bx^{(k+1)/2}\log x.$$

Für ungerade $k\geqslant 5$ *ist*

$$P_{2k+1}(x) = \pi^{k+1/2}\{L(k)\}^{-1}\sum_{r=1}^{(k-3)/2}\frac{(-1)^r}{r!}\,\frac{x^{k-r+1/2}}{\Gamma(k-r+\frac{3}{2})}\,\Phi_{k,r}(x)+ \tag{49}$$

$$+Bx^{k/2+1}\log x.$$

In der vorliegenden Arbeit wird ein Zusammenhang zwischen den Peterssonschen Funktionen (42), im Falle eines ungeraden k, und den Lursmanaschwilischen Funktionen (30) hergestellt. Das Hauptziel lautet:

SATZ 5. *Für* $k\geqslant 3$, $r\leqslant k-2$ *und für* $k=2$, $r=1$ *sowie* $k=3$, $r=2$ *ist*

$$\mathfrak{N}_{2k+1}(x,r) = i^{2-r}\{Z(k)\}^{-1}\frac{(2\pi)^r}{r!}\,\Omega_{k,r}(x)+\delta_r(x)\pi i\,\mathfrak{S}_{2k+1}(x). \tag{50}$$

Der Beweis wird in § 3 gebracht. Im Rest des § 2 sollen diejenigen Folgerungen aus Satz 5 gezogen werden, die sich durch Verknüpfung mit den Peterssonschen Sätzen 1 und 2 ergeben.

Es sei $k\geqslant 3$, $r\leqslant k-2$, oder $k=2$, $r=1$, oder $k=3$, $r=2$. Aus (50) folgt dann wegen (3) und (2)

$$-\frac{1}{(2\pi i)^r}\,\frac{\pi^{k+1/2}}{\Gamma(k-r+\frac{3}{2})}\,\mathfrak{N}_{2k+1}(x,r)$$

$$= -\frac{i^{2-r}}{(2\pi i)^r}\,\frac{\pi^{k+1/2}}{\Gamma(k-r+\frac{3}{2})}\,\{Z(k)\}^{-1}\frac{(2\pi)^r}{r!}\,\Omega_{k,r}(x)-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\,\frac{\pi^{k+1/2}}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\,\delta_r(x)\pi i\,\mathfrak{S}_{2k+1}(x)$$

$$= \frac{(-1)^r}{r!}\,\frac{\pi^{k+1/2}}{\Gamma(k-r+\frac{3}{2})}\,\{Z(k)\}^{-1}\Omega_{k,r}(x)-\frac{\delta_r(x)}{2}\,D_{2k+1}\mathfrak{S}_{2k+1}(x). \tag{51}$$

Setzt man dies in (44) ein, so ergibt sich für $k \geqslant 3$

$$(52)\quad \frac{1}{2}\{\mathrm{P}_{2k+1}(x+0)+\mathrm{P}_{2k+1}(x-0)\}+\frac{\delta(x)}{2}D_{2k+1}x^{k-1/2}\mathfrak{S}_{2k+1}(x)$$

$$= \{Z(k)\}^{-1}\sum_{r\leqslant k/2}\frac{(-1)^r}{r!}\,\frac{\pi^{k+1/2}}{\Gamma(k-r+\frac{3}{2})}\,\Omega_{k,r}(x)x^{k-r+1/2}+Bx^{k/2+1/4}\log x.$$

Aus (13), (14) und (3) ergibt sich

$$(53)\quad r_{2k+1}(x) = \delta(x)D_{2k+1}x^{k-1/2}\mathfrak{S}_{2k+1}(x)+Bx^{k/2+1/4}\qquad (k\geqslant 2),$$

$$(54)\quad r_{2k+1}(x) = \delta(x)D_{2k+1}x^{k-1/2}\mathfrak{S}_{2k+1}(x)\qquad (k=2,3).$$

Ferner ist nach Definition der Funktionen $\mathrm{P}_q(y)$ und $r_q(y)$

$$\mathrm{P}_{2k+1}(x+0) = \mathrm{P}_{2k+1}(x),\qquad \mathrm{P}_{2k+1}(x-0) = \mathrm{P}_{2k+1}(x)-r_{2k+1}(x),$$

also

$$(55)\quad \tfrac{1}{2}\{\mathrm{P}_{2k+1}(x+0)+\mathrm{P}_{2k+1}(x-0)\} = \mathrm{P}_{2k+1}(x)-\tfrac{1}{2}r_{2k+1}(x).$$

Aus (52), (53) und (55) folgt

Satz 6. *Für $k\geqslant 3$ ist*

$$(56)\quad \mathrm{P}_{2k+1}(x) = \pi^{k+1/2}\{Z(k)\}^{-1}\sum_{r\leqslant k/2}\frac{(-1)^r}{r!}\,\frac{x^{k-r+1/2}}{\Gamma(k-r+\frac{3}{2})}\,\Omega_{k,r}(x)+$$

$$+Bx^{k/2+1/4}\log x.$$

Analog ergibt sich aus (55), (45), (46), (51), (2), (3) und (54)

$$(57)\quad \mathrm{P}_5(x) = -D_5\{Z(2)\}^{-1}\Omega_{2,1}(x)x^{3/2}+Bx,$$

$$(58)\quad \mathrm{P}_7(x) = -D_7\{Z(3)\}^{-1}\big(\Omega_{3,1}(x)x^{5/2}-\tfrac{5}{4}\Omega_{3,2}(x)x^{3/2}\big)+Bx.$$

Hierbei ist nach (2) und (6)

$$(59)\quad D_5 = \frac{\pi^{5/2}}{\Gamma(\frac{5}{2})} = \frac{4\pi^3}{3},\qquad D_7 = \frac{\pi^{7/2}}{\Gamma(\frac{7}{2})} = \frac{8\pi^3}{15},$$

$$(60)\quad Z(2) = (1-2^{-2})\zeta(2) = \frac{\pi^2}{8},\qquad Z(3) = L(3) = \frac{\pi^3}{32}.$$

Der hier benutzte wohlbekannte Wert

$$(61)\quad L(3) = \frac{\pi^3}{32}$$

ergibt sich z. B. folgendermaßen: Setzt man $y=0$, $r=3$ in (24), so bekommt man wegen (5) und (3)

$$G_3(0) = 2^3\pi^{-3}3!\sum_{u=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{u}\right)\frac{1}{u^3} = 48\pi^{-3}L(3).$$

Andererseits ist nach (21), (16) und (15)

$$G_3(0) = \bar{B}_3(0)-2^2\bar{B}_3(0)-2^5\bar{B}_3(-\tfrac{1}{4})$$
$$= -3\bar{B}_3(0)-32\bar{B}_3(\tfrac{3}{4}) = -32\cdot-\tfrac{3}{64} = \tfrac{3}{2},$$

womit (61) nachgewiesen ist.

Aus (57)-(60) und (30) ergibt sich

Satz 7.

$$(62)\quad \mathrm{P}_5(x) = -\tfrac{32}{3}\Psi_{2,1}(x)x^{3/2}+Bx,$$

$$(63)\quad \mathrm{P}_7(x) = -\tfrac{256}{15}\Phi_{3,1}(x)x^{5/2}+\tfrac{64}{3}\Phi_{3,2}(x)x^{3/2}+Bx.$$

6 und 7 sind Sätze vom Lursmanaschwilischen Typus, die den Peterssonschen Sätzen 1 und 2 entsprechen. Satz 6 ist in zweifacher Hinsicht günstiger als Satz 4: einmal wird der Wert $k=3$ zugelassen und sodann enthält die r-Summe ein Glied mehr und das Restglied ist für gerade k um $x^{1/4}$, für ungerade k um $x^{3/4}$ besser.

§ 3. Beweis von Satz 5

Die beiden Fälle

$$(64)\quad k\geqslant 3,\qquad r\leqslant k-2$$

und

$$(65)\quad k=2,\quad r=1;\qquad k=3,\quad r=2$$

von Satz 5 sollen zugleich behandelt werden.

Es sei $q \equiv 1 \pmod 2$. Nach (41), (10) und (8) ist dann

$$\mathfrak{R}_{2k+1}(x, q, r) = \sum_{h \bmod q}' \left(\frac{S(h, q)}{q}\right)^{2k+1} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq -h/q}}^{\infty} \frac{e\{-(h/q+m)x\}}{(h/q+m)^r}$$

(66) $$= \left(\frac{-1}{q}\right)^k q^{r-k-1} \sum_{h \bmod q}' S(h, q) \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq -h/q}}^{\infty} \frac{e\{-(h+mq)x/q\}}{(h+mq)^r}$$

$$= \left(\frac{-1}{q}\right)^k q^{r-k-1} \sum_{h \bmod q}' \sum_{a \bmod q} e\left(\frac{ha^2}{q}\right) \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \equiv h \pmod q,\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{m^r} e\left(-\frac{mx}{q}\right)$$

$$= \left(\frac{-1}{q}\right)^k q^{r-k-1} \sum_{h \bmod q}' \sum_{a \bmod q} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \equiv h \pmod q,\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{m^r} e\left\{\frac{m(a^2-x)}{q}\right\}$$

(67) $$= \left(\frac{-1}{q}\right)^k q^{r-k-1} \sum_{a \bmod q} \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m, q)=1,\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{m^r} e\left\{\frac{m(a^2-x)}{q}\right\}.$$

S sei die in (67) auftretende Doppelsumme. Dann ist

$$S = \sum_{a \bmod q} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{m^r} e\left\{\frac{m(a^2-x)}{q}\right\} \sum_{d|m,\, d|q} \mu(d)$$

$$= \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{a \bmod q} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0,\, d|m}}^{\infty} \frac{1}{m^r} e\left\{\frac{m(a^2-x)}{q}\right\}.$$

Diese Schreibweise ist zulässig, da die m-Reihe, wie sich sofort zeigen wird, für jedes d im Sinne von (1) konvergiert. Ersetzt man nämlich m durch $-md$, so folgt wegen (19)

$$S = \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{a \bmod q} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(md)^r} e\left\{\frac{md(x-a^2)}{q}\right\}$$

$$= i^{2-r} \frac{(2\pi)^r}{r!} \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d^r} \sum_{a \bmod q} \left(\bar{B}_r\left\{\frac{d(x-a^2)}{q}\right\} + \frac{1}{2}\delta_r\left\{\frac{d(x-a^2)}{q}\right\}\right).$$

Wegen (67) ist daher

(68) $$\mathfrak{R}_{2k+1}(x, q, r) = i^{2-r} \frac{(2\pi)^r}{r!} \left(\frac{-1}{q}\right)^k q^{r-k-1} \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d^r} \times$$

$$\times \sum_{a \bmod q} \left(\bar{B}_r\left\{\frac{d(x-a^2)}{q}\right\} + \frac{1}{2}\delta_r\left\{\frac{d(x-a^2)}{q}\right\}\right).$$

Zur weiteren Behandlung dieses Ausdrucks soll die Summe

(69) $$S = \sum_{a \bmod d} \delta\left(\frac{a^2-m}{d}\right) = \sum_{a \bmod d} \delta\left(\frac{m-a^2}{d}\right)$$

umgeformt werden. Wegen (3) ist

(70) $$\delta\left(\frac{l}{d}\right) = \frac{1}{d} \sum_{h \bmod d} e\left(\frac{lh}{d}\right).$$

Somit ist wegen (8)

$$S = \frac{1}{d} \sum_{a \bmod d} \sum_{h \bmod d} e\left\{\frac{(a^2-m)h}{d}\right\}$$

$$= \frac{1}{d} \sum_{h \bmod d} e\left(-\frac{mh}{d}\right) \sum_{a \bmod d} e\left(\frac{a^2 h}{d}\right)$$

$$= \frac{1}{d} \sum_{h \bmod d} S(h, d) e\left(-\frac{mh}{d}\right)$$

$$= \frac{1}{d} \sum_{n|d} \sum_{\substack{h \bmod d \\ (h, d)=n}} S(h, d) e\left(-\frac{mh}{d}\right).$$

Ersetzt man hier h durch nh und beachtet (11), so ergibt sich

$$S = \frac{1}{d} \sum_{n|d} n \sum_{h \bmod d/n}' S\left(h, \frac{d}{n}\right) e\left(-\frac{mnh}{d}\right),$$

oder wegen (69), indem man n durch d/n ersetzt,

(71) $$\sum_{a \bmod d} \delta\left(\frac{m-a^2}{d}\right) = \sum_{n|d} \frac{1}{n} \sum_{h \bmod n}' S(h, n) e\left(-\frac{mh}{n}\right).$$

Wegen (3) kann man (71) auch so schreiben:

$$\sum_{a \bmod d} \delta_r\left(\frac{y-a^2}{d}\right) = \delta_r(y) \sum_{n|d} \frac{1}{n} \sum_{h \bmod n}{}' S(h,n)\, e\left(-\frac{hy}{n}\right). \tag{72}$$

Nach (68) ist, da die Funktionen (3) und (16) die Periode 1 haben,

$$\mathfrak{R}_{2k+1}(x,q,r) = i^{2-r} \frac{(2\pi)^r}{r!} \left(\frac{-1}{q}\right)^k q^{r-k-1} S_1 + \pi i \left(\frac{-1}{q}\right)^k q^{-k} S_2; \tag{73}$$

$$S_1 = S_1(x,q,r) = \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d^{r-1}} \sum_{a \bmod q/d} \bar{B}_r\left\{\frac{d(x-a^2)}{q}\right\}, \tag{74}$$

$$S_2 = S_2(x,q,r) = \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{a \bmod q/d} \delta_r\left\{\frac{d(x-a^2)}{q}\right\}. \tag{75}$$

Wendet man auf (75) die Formel (72) mit x, q/d statt y, d an, so folgt

$$S_2 = \delta_r(x) \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{n|q/d} \frac{1}{n} \sum_{h \bmod n}{}' S(h,n)\, e\left(-\frac{hx}{n}\right)$$

$$= \delta_r(x) \sum_{n|q} \frac{1}{n} \sum_{h \bmod n}{}' S(h,n)\, e\left(-\frac{hx}{n}\right) \sum_{d|q/n} \mu(d)$$

$$= \delta_r(x) \sum_{h \bmod q}{}' \frac{S(h,q)}{q}\, e\left(-\frac{hx}{q}\right). \tag{76}$$

Für S_1 und S_2 hat man nach (74), (76), (33), (31) und (9) die folgenden Abschätzungen:

$$(r>1) \qquad S_1 = B \sum_{d|q} \frac{1}{d^{r-1}} \frac{q}{d} = Bq, \tag{77}$$

$$(r=1 \text{ oder } 2) \qquad S_1 = B \sum_{d|q} \left(\frac{q}{d}\right)^{2/3} = Bq^{2/3} \sum_{d|q} 1 = Bq^{3/4}, \tag{78}$$

$$S_2 = B \sum_{h \bmod q} q^{-1/2} = Bq^{1/2}. \tag{79}$$

Es ist daher nach (73)

$$\sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 1 \pmod 2}}^{\infty} \mathfrak{R}_{2k+1}(x,q,r) = i^{2-r} \frac{(2\pi)^r}{r!} S_3 + \pi i S_4, \tag{80}$$

wobei die Reihen

$$S_3 = S_3(x,r) = \sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 1 \pmod 2}}^{\infty} \left(\frac{-1}{q}\right)^k q^{r-k-1} S_1(x,q,r), \tag{81}$$

$$S_4 = S_4(x,r) = \sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 1 \pmod 2}}^{\infty} \left(\frac{-1}{q}\right)^k q^{-k} S_2(x,q,r) \tag{82}$$

in den beiden Fällen (64), (65) absolut konvergieren. Nach (81) und (74) ist

$$S_3 = \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{u}\right)^k u^{r-k-1} \sum_{v|u} \frac{\mu(v)}{v^{r-1}} \sum_{a \bmod u/v} \bar{B}_r\left\{\frac{v(x-a^2)}{u}\right\}.$$

Ersetzt man hier u durch uv, so ergibt sich wegen (7)

$$S_3 = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\mu(v)}{v^{r-1}} \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{uv}\right)^k (uv)^{r-k-1} \sum_{a \bmod u} \bar{B}_r\left(\frac{x-a^2}{u}\right)$$

$$= \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{v}\right)^k \mu(v) v^{-k} \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{u}\right)^k u^{r-k-1} \sum_{a \bmod u} \bar{B}_r\left(\frac{x-a^2}{u}\right)$$

$$= \{Z(k)\}^{-1} \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{u}\right)^k u^{r-k-1} \sum_{a \bmod u} \bar{B}_r\left(\frac{x-a^2}{u}\right). \tag{83}$$

Weiter folgt aus (82), (76) und (10)

$$S_4 = \delta_r(x) \sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 1 \pmod 2}}^{\infty} \sum_{h \bmod q}{}' \left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^{2k+1} e\left(-\frac{hx}{q}\right). \tag{84}$$

Nach (41) und (10) ist

$$\sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 2 \pmod 4}}^{\infty} \mathfrak{R}_{2k+1}(x,q,r) = 0. \tag{85}$$

Es sei jetzt $q \equiv 0 \pmod 4$. Nach (41) und (10) ist dann, statt (66),

$$\mathfrak{R}_{2k+1}(x,q,r) = 2^k q^{r-k-1} \sum_{h \bmod q}{}' i^{hk} S(h,q) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e\{-(h+mq)x/q\}}{(h+mq)^r}.$$

Hier ist, da h ungerade ist,

$$i^{hk} = i^k \left(\frac{-1}{h}\right)^k. \tag{86}$$

Schließt man jetzt so, wie beim Übergang von (66) zu (67), so ergibt sich

$$\mathfrak{R}_{2k+1}(x, q, r) = (2i)^k q^{r-k-1} \sum_{a \bmod q} \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m,q)=1}}^{\infty} \left(\frac{-1}{m}\right)^k \frac{1}{m^r} e\left\{\frac{m(a^2-x)}{q}\right\}. \tag{87}$$

Die hier auftretende Doppelsumme S wird ähnlich, wie die in (67) auftretende Doppelsumme behandelt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} S &= \sum_{a \bmod q} \sum_{w=-\infty}^{\infty} \left(\frac{-1}{w}\right)^k \frac{1}{w^r} e\left\{\frac{w(a^2-x)}{q}\right\} \sum_{u \mid w,\, u \mid q} \mu(u) \\ &= \sum_{u \mid q} \mu(u) \sum_{a \bmod q} \sum_{\substack{w=-\infty \\ u \mid w}}^{\infty} \left(\frac{-1}{w}\right)^k \frac{1}{w^r} e\left\{\frac{w(a^2-x)}{q}\right\} \\ &= \sum_{u \mid q} \mu(u) \sum_{a \bmod q} \sum_{w=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+r} \left(\frac{-1}{uw}\right)^k \frac{1}{(uw)^r} e\left\{\frac{uw(x-a^2)}{q}\right\} \end{aligned}$$

$$= (-1)^{k+r} \sum_{u \mid q} \left(\frac{-1}{u}\right)^k \mu(u) u^{-r} \sum_{a \bmod q} \sum_{w=-\infty}^{\infty} \left(\frac{-1}{w}\right)^k \frac{1}{w^r} e\left\{\frac{uw(x-a^2)}{q}\right\}. \tag{88}$$

Die Fälle eines geraden und ungeraden k sollen jetzt getrennt behandelt werden.

1) Es sei k gerade. Dann folgt aus (88) und (26)

$$\begin{aligned} S &= (-1)^r \sum_{u \mid q} \mu(u) u^{-r} \sum_{a \bmod q} \sum_{w=-\infty}^{\infty} \frac{1}{w^r} e\left\{\frac{uw(x-a^2)}{q}\right\} \\ &= \frac{(-\pi i)^r}{r!} \sum_{u \mid q} \mu(u) u^{-r} \sum_{a \bmod q} \left(F_r\left\{\frac{4u(x-a^2)}{q}\right\} - \right. \\ &\qquad \left. - \frac{1}{2}\delta_r\left\{\frac{4u(x-a^2)}{q}\right\} \cos \frac{2u\pi(x-a^2)}{q}\right). \end{aligned}$$

Wegen (87) ist daher

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{2k+1}(x, q, r) &= i^{k-r} 2^k \frac{\pi^r}{r!} q^{r-k-1} \sum_{u \mid q} \mu(u) u^{-r} \times \\ &\times \sum_{a \bmod q} \left(F_r\left\{\frac{4u(x-a^2)}{q}\right\} - \frac{1}{2}\delta_r\left\{\frac{4u(x-a^2)}{q}\right\} \cos \frac{2u\pi(x-a^2)}{q}\right). \end{aligned} \tag{89}$$

Zur weiteren Behandlung dieses Ausdrucks soll die Summe

$$S = \sum_{a \bmod 4d} \delta\left(\frac{a^2-m}{d}\right) \cos \frac{\pi(a^2-m)}{2d} = \sum_{a \bmod 4d} \delta\left(\frac{m-a^2}{d}\right) \cos \frac{\pi(m-a^2)}{2d} \tag{90}$$

umgeformt werden. Zunächst ist wegen (70)

$$S = \frac{1}{2d} \sum_{a \bmod 4d} \sum_{h \bmod d} e\left\{\frac{(a^2-m)h}{d}\right\} \left(e\left(\frac{a^2-m}{4d}\right) + e\left(\frac{m-a^2}{4d}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2d} \sum_{a \bmod 4d} \sum_{h \bmod d} \left(e\left\{\frac{(a^2-m)(4h+1)}{4d}\right\} + e\left\{\frac{(a^2-m)(4h-1)}{4d}\right\}\right). \tag{91}$$

Die Zahlen $4h+1$, $4h-1$ durchlaufen hier die ungeraden Restklassen w mod $4d$. Daher ist, mit Rücksicht auf (8),

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2d} \sum_{a \bmod 4d} \sum_{w \bmod 4d} e\left\{\frac{(a^2-m)w}{4d}\right\} \\ &= \frac{1}{2d} \sum_{w \bmod 4d} S(w, 4d) e\left(-\frac{mw}{4d}\right) \\ &= \frac{1}{2d} \sum_{u \mid d} \sum_{\substack{w \bmod 4d \\ (w,4d)=u}} S(w, 4d) e\left(-\frac{mw}{4d}\right) \\ &= \frac{1}{2d} \sum_{u \mid d} \sum_{\substack{h \bmod 4d \\ (h,4d)=u}} S(h, 4d) e\left(-\frac{mh}{4d}\right). \end{aligned}$$

Ersetzt man hier h durch uh und beachtet (11), so ergibt sich

$$S = \frac{1}{2d} \sum_{u \mid d} u \sum_{h \bmod 4d/u}' S\left(h, \frac{4d}{u}\right) e\left(-\frac{muh}{4d}\right),$$

oder, indem man $d/u = n$ setzt,

$$(92)\qquad S = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n|d \\ d/n\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)}} \frac{1}{n} \sum_{h \bmod 4n}' S(h, 4n)) e\left(-\frac{mh}{4n}\right).$$

Aus (90), (92) und (3) ergibt sich die zu (72) analoge Formel

$$(93)\qquad \sum_{a \bmod 4d} \delta_r\left(\frac{y-a^2}{d}\right) \cos\frac{\pi(y-a^2)}{2d}$$

$$= \frac{1}{2}\delta_r(y) \sum_{\substack{n|d \\ d/n\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)}} \frac{1}{n} \sum_{h \bmod 4n}' S(h, 4n) e\left(-\frac{hy}{4n}\right).$$

Nach (89) ist, da die Funktion $\delta_r(y)$ die Periode 1 hat und die Funktion (20) die Periode 4 hat,

$$(94)\qquad \mathfrak{R}_{2k+1}(x, q, r) = i^{k-r} 2^k \frac{\pi^r}{r!} q^{r-k-1} S_5 + i^{k+1} 2^{k-1} \pi q^{-k} S_6;$$

$$(95)\qquad S_5 = S_5(x, q, r) = \sum_{u|q} \frac{\mu(u)}{u^{r-1}} \sum_{a \bmod q/u} F_r\left\{\frac{4u(x-a^2)}{q}\right\},$$

$$(96)\qquad S_6 = S_6(x, q, r) = \sum_{u|q} \mu(u) \sum_{a \bmod q/u} \delta_r\left\{\frac{4u(x-a^2)}{q}\right\} \cos\frac{2u\pi(x-a^2)}{q}.$$

Wendet man auf (96) die Formel (93) mit x, $q/4u$ statt y, d an, so folgt

$$S_6 = \frac{1}{2}\delta_r(x) \sum_{u|q} \mu(u) \sum_{\substack{n|q/4u \\ q/4un\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)}} \frac{1}{n} \sum_{h \bmod 4n}' S(h, 4n) e\left(-\frac{hx}{4n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\delta_r(x) \sum_{\substack{n|q/4 \\ q/4n\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)}} \frac{1}{n} \sum_{h \bmod 4n}' S(h, 4n) e\left(-\frac{hx}{4n}\right) \sum_{u|q/4n} \mu(u)$$

$$(97)\qquad = \frac{1}{2}\delta_r(x) \frac{4}{q} \sum_{h \bmod q}' S(h, q) e\left(-\frac{hx}{q}\right).$$

Für S_5 und S_6 hat man auf Grund von (95), (97), (20), (34) und (9) genau dieselben Abschätzungen (77)-(79), die oben für S_1 und S_2 erhalten waren; dabei ist zu beachten, daß der zweite Fall (65) hier wegfällt,

also die zu (78) analoge Formel für S_5 nur für $r = 1$ aufzustellen ist. Es ist daher nach (94)

$$(98)\qquad \sum_{\substack{q=1 \\ q\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)}}^{\infty} \mathfrak{R}_{2k+1}(x, q, r) = i^{k-r} 2^k \frac{\pi^r}{r!} S_7 + i^{k+1} 2^{k-1} \pi S_8,$$

wobei die Reihen

$$(99)\qquad S_7 = S_7(x, r) = \sum_{\substack{q=1 \\ q\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)}}^{\infty} q^{r-k-1} S_5(x, q, r),$$

$$(100)\qquad S_8 = S_8(x, r) = \sum_{\substack{q=1 \\ q\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)}}^{\infty} q^{-k} S_6(x, q, r)$$

im Falle (64) und dem ersten Fall (65) absolut konvergieren. Diese Reihen werden jetzt ebenso behandelt, wie oben die Reihen (81) und (82). Nach (99), (95) und (7) ist

$$S_7 = 2^{2r-2k-2} \sum_{d=1}^{\infty} d^{r-k-1} S_5(x, 4d, r)$$

$$(101)\qquad = 2^{2r-2k-2} \sum_{d=1}^{\infty} d^{r-k-1} \sum_{u|d} \frac{\mu(u)}{u^{r-1}} \sum_{a \bmod 4d/u} F_r\left\{\frac{u(x-a^2)}{d}\right\}$$

$$= 2^{2r-2k-2} \sum_{u=1}^{\infty} \frac{\mu(u)}{u^{r-1}} \sum_{d=1}^{\infty} (du)^{r-k-1} \sum_{a \bmod 4d} F_r\left(\frac{x-a^2}{d}\right)$$

$$= 2^{2r-2k-2} \sum_{u=1}^{\infty} \mu(u) u^{-k} \sum_{d=1}^{\infty} d^{r-k-1} \sum_{a \bmod 4d} F_r\left(\frac{x-a^2}{d}\right)$$

$$(102)\qquad = 2^{2r-2k-2} \{Z(k)\}^{-1} \sum_{d=1}^{\infty} d^{r-k-1} \sum_{a \bmod 4d} F_r\left(\frac{x-a^2}{d}\right).$$

Andererseits ist nach (100), (97), (10) und (86)

$$(103)\qquad i^k 2^{k-1} S_8 = \delta_r(x) \sum_{\substack{q=1 \\ q\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)}}^{\infty} \sum_{h \bmod q}' \left(\frac{S(h, q)}{q}\right)^{2k+1} e\left(-\frac{hx}{q}\right).$$

Aus (42), (80), (83), (84), (85), (98), (102), (103), (10), (12) und (28) ergibt sich

$$\mathfrak{R}_{2k+1}(x,r) = i^{2-r}\frac{(2\pi)^r}{r!}\{Z(k)\}^{-1}\sum_{u=1}^{\infty}u^{r-k-1}\sum_{a \bmod u}\bar{B}_r\left(\frac{x-a^2}{u}\right)+$$

$$+i^{k-r}2^k\frac{\pi^r}{r!}2^{2r-2k-2}\{Z(k)\}^{-1}\sum_{d=1}^{\infty}d^{r-k-1}\sum_{a \bmod 4d}F_r\left(\frac{x-a^2}{d}\right)+$$

$$+\delta_r(x)\pi i\mathfrak{S}_{2k+1}(x)$$

$$= i^{2-r}\{Z(k)\}^{-1}\frac{(2\pi)^r}{r!}\Psi_{k,r}(x)+\delta_r(x)\pi i\mathfrak{S}_{2k+1}(x).$$

Wegen (30) ist damit Satz 5 für gerade k bewiesen.

2) Es sei k ungerade. Dieser Fall wird nach demselben Verfahren wie der Fall eines geraden k behandelt, nur benutzt man naturgemäß (21), (27), (29), (32) statt (20), (26), (28), (34).

Für die in (87) auftretende Doppelsumme S folgt aus (88) und (27)

$$S = (-1)^{r+1}\sum_{u|q}\left(\frac{-1}{u}\right)\mu(u)u^{-r}\sum_{a \bmod q}\sum_{w=-\infty}^{\infty}\left(\frac{-1}{w}\right)\frac{1}{w^r}e\left\{\frac{uw(x-a^2)}{q}\right\}$$

$$= i^{3-r}2^{1-r}\frac{\pi^r}{r!}\sum_{u|q}\left(\frac{-1}{u}\right)\mu(u)u^{-r}\sum_{a \bmod q}\left(G_r\left\{\frac{4u(x-a^2)}{q}\right\}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\delta_r\left\{\frac{4u(x-a^2)}{q}\right\}\sin\frac{2u\pi(x-a^2)}{q}\right).$$

Wegen (87) ist daher

$$\mathfrak{R}_{2k+1}(x,q,r) = i^{k-r-1}2^{k-r+1}\frac{\pi^r}{r!}q^{r-k-1}\sum_{u|q}\left(\frac{-1}{u}\right)\mu(u)u^{-r}\times \tag{104}$$

$$\times\sum_{a \bmod q}\left(G_r\left\{\frac{4u(x-a^2)}{q}\right\}-\frac{1}{2}\delta_r\left\{\frac{4u(x-a^2)}{q}\right\}\sin\frac{2u\pi(x-a^2)}{q}\right).$$

Zur weiteren Behandlung dieses Ausdrucks soll die Summe

$$S = \sum_{a \bmod 4d}\delta\left(\frac{a^2-m}{d}\right)\sin\frac{\pi(a^2-m)}{2d} = -\sum_{a \bmod 4d}\delta\left(\frac{m-a^2}{d}\right)\sin\frac{\pi(m-a^2)}{2d} \tag{105}$$

nach demselben Verfahren wie die Summe (90) umgeformt werden. Hier bekommt man statt (91)

$$S = \frac{1}{2di}\sum_{a \bmod 4d}\sum_{h \bmod d}\left(e\left\{\frac{(a^2-m)(4h+1)}{4d}\right\}-e\left\{\frac{(a^2-m)(4h-1)}{4d}\right\}\right)$$

und daraus ergibt sich weiter, wie beim Übergang von (91) zu (92),

$$S = \frac{1}{2di}\sum_{a \bmod 4d}\sum_{w \bmod 4d}\left(\frac{-1}{w}\right)e\left\{\frac{(a^2-m)w}{4d}\right\}$$

$$= \frac{1}{2di}\sum_{v|d}\sum_{\substack{h \bmod 4d\\(h,4d)=v}}\left(\frac{-1}{h}\right)S(h,4d)e\left(-\frac{mh}{4d}\right)$$

$$= \frac{1}{2di}\sum_{v|d}\left(\frac{-1}{v}\right)v\sum_{h \bmod 4d/v}{}'\left(\frac{-1}{h}\right)S\left(h,\frac{4d}{v}\right)e\left(-\frac{mvh}{4d}\right).$$

Setzt man hier $d/v=n$, so folgt

$$S = \frac{1}{2i}\sum_{\substack{n|d\\d/n\equiv 1 \pmod 2}}\left(\frac{-1}{d/n}\right)\frac{1}{n}\sum_{h \bmod 4n}{}'\left(\frac{-1}{h}\right)S(h,4n)e\left(-\frac{mh}{4n}\right).$$

In Verbindung mit (105) und (3), ergibt dies die zu (93) analoge Formel

$$\sum_{a \bmod 4d}\delta_r\left(\frac{y-a^2}{d}\right)\sin\frac{\pi(y-a^2)}{2d} \tag{106}$$

$$= \frac{i}{2}\delta_r(y)\sum_{\substack{n|d\\d/n\equiv 1 \pmod 2}}\left(\frac{-1}{d/n}\right)\frac{1}{n}\sum_{h \bmod 4n}{}'\left(\frac{-1}{h}\right)S(h,4n)e\left(-\frac{hy}{4n}\right).$$

Nach (104) ist, da die Funktion $\delta_r(y)$ die Periode 1 hat und die Funktion (21) die Periode 4 hat,

$$\mathfrak{R}_{2k+1}(x,q,r) = i^{k-r-1}2^{k-r+1}\frac{\pi^r}{r!}q^{r-k-1}S_9+i^k2^{k-1}\pi q^{-k}S_{10}; \tag{107}$$

$$S_9 = S_9(x,q,r) = \sum_{u|q}\left(\frac{-1}{u}\right)\frac{\mu(u)}{u^{r-1}}\sum_{a \bmod q/u}G_r\left\{\frac{4u(x-a^2)}{q}\right\}, \tag{108}$$

(109)

$$S_{10} = S_{10}(x,q,r) = \sum_{u|q}\left(\frac{-1}{u}\right)\mu(u)\sum_{a \bmod q/u}\delta_r\left\{\frac{4u(x-a^2)}{q}\right\}\sin\frac{2u\pi(x-a^2)}{q}.$$

Wendet man auf (109) die Formel (106) mit x, $q/4u$ statt y, d an und beachtet, daß dabei

$$\left(\frac{-1}{d/n}\right) = \left(\frac{-1}{q/4un}\right) = \left(\frac{-1}{u}\right)\left(\frac{-1}{q/4n}\right)$$

ist, so folgt

$$S_{10} = \frac{i}{2}\delta_r(x)\sum_{u|q}\mu(u)\sum_{\substack{n|q/4u\\ q/4un\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)}}\left(\frac{-1}{q/4n}\right)\frac{1}{n}\sum_{h \bmod 4n}{}'\left(\frac{-1}{h}\right)S(h, 4n)e\left(-\frac{hx}{4n}\right)$$

$$(110)\quad = \frac{i}{2}\delta_r(x)\sum_{\substack{n|q/4\\ q/4n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)}}\left(\frac{-1}{q/4n}\right)\frac{1}{n}\sum_{h \bmod 4n}{}'\left(\frac{-1}{h}\right)S(h, 4n)e\left(-\frac{hx}{4n}\right)\sum_{u|q/4n}\mu(u)$$

$$(111)\quad = \frac{i}{2}\delta_r(x)\cdot\frac{4}{q}\sum_{h \bmod q}{}'\left(\frac{-1}{h}\right)S(h, q)e\left(-\frac{hx}{q}\right).$$

Für S_9 und S_{10} hat man auf Grund von (108), (110), (21), (32) und (9) dieselben Abschätzungen (77)-(79), die oben für S_1 und S_2 erhalten waren; dabei ist zu beachten, daß der erste Fall (65) hier wegfällt, also die zu (78) analoge Formel für S_9 nur für $r = 2$ aufzustellen ist. Es ist daher nach (107)

$$(112)\quad \sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)}}^{\infty}\Re_{2k+1}(x, q, r) = i^{k-r-1}2^{k-r+1}\frac{\pi^r}{r!}S_{11} + i^k 2^{k-1}\pi S_{12},$$

wobei die Reihen

$$(113)\quad S_{11} = \sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)}}^{\infty} q^{r-k-1}S_9(x, q, r),\qquad S_{12} = \sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)}}^{\infty} q^{-k}S_{10}(x, q, r)$$

im Falle (64) und dem zweiten Fall (65) absolut konvergieren. Nach (113) und (108) ist

$$S_{11} = 2^{2r-2k-2}\sum_{d=1}^{\infty}d^{r-k-1}S_9(x, 4d, r)$$

$$= 2^{2r-2k-2}\sum_{d=1}^{\infty}d^{r-k-1}\sum_{u|d}\left(\frac{-1}{u}\right)\frac{\mu(u)}{u^{r-1}}\sum_{a \bmod 4d/u}G_r\left\{\frac{u(x-a^2)}{d}\right\}.$$

Daraus ergibt sich wegen (7), wie beim Übergang von (101) zu (102),

$$(114)\quad S_{11} = 2^{2r-2k-2}\{Z(k)\}^{-1}\sum_{d=1}^{\infty}d^{r-k-1}\sum_{a \bmod 4d}G_r\left(\frac{x-a^2}{d}\right).$$

Andererseits ist nach (113), (111), (10) und (86)

$$(115)\quad i^k 2^{k-1}\pi S_{12} = \pi i\delta_r(x)\sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)}}^{\infty}\sum_{h \bmod q}{}'\left(\frac{S(h, q)}{q}\right)^{2k+1}e\left(-\frac{hx}{q}\right).$$

Aus (42), (80), (83), (84), (85), (112), (114), (115), (10), (12), (29) und (30) folgt die Richtigkeit von Satz 5 für ungerade k.

TIFLIS, DEN 14. JANUAR 1960
MATHEMATISCHES INSTITUT

Literatur

[1] А. П. Лурсманашвили, *О числе целых точек в многомерных шарах нечетной размерности*, Сообщения Академии Наук Грузинской ССР 14 (1953), 513-520.

[2] H. Petersson, *Über die Anzahl der Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 5 (1926), 116-150.

[3] A. Walfisz, *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln*, Mathematische Zeitschrift 27 (1927), 469-480.

[4] — *Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln*, Warszawa 1957.

[5] — *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln* II, Acta Arithmetica 6 (1960), 115-136.

Reçu par la Rédaction le 10. 2. 1960