[4] C. Olech et Z. Opial, *Sur une inégalité différentielle*, Ann. Polon. Math. 7 (1959), p. 247-254.

[5] G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte seconda, Bologna 1949.

[6] G. Scorza-Dragoni, *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile*, Rend. Sem. Mat. Padova 17 (1948), p. 102-106.

[7] — *Una applicazione della quasi-continuità semiregolare delle funzioni misurabili rispetto ad una e continue rispetto ad un'altra variabile*, Atti Acc. Naz. Lincei XII, 1 (1952), p. 55-61.

Reçu par la Rédaction le 29. 12. 1958

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VIII (1960)

Sur une inégalité

par Z. Opial (Kraków)

1. Soit $x(t)$ une fonction de classe C^1 définie dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ $(h > 0)$ et telle que

$$x(0) = x(h) = 0, \quad x(t) > 0 \quad \text{pour} \quad 0 < t < h. \tag{1}$$

On a alors (v. [1], p. 185):

$$\int_0^h x^2(t)\,dt \leqslant \frac{h^2}{\pi^2}\int_0^h x'^2(t)\,dt. \tag{2}$$

Grâce à l'inégalité (2) il est facile d'évaluer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^h |x(t)x'(t)|\,dt. \tag{3}$$

En effet, en appliquant à l'intégrale (3) d'abord l'inégalité de Schwarz, puis l'inégalité (2), on obtient

$$\int_0^h |x(t)x'(t)|\,dt \leqslant \frac{h}{\pi}\int_0^h x'^2(t)\,dt, \tag{4}$$

inégalité que nous avons utilisée dans notre note [2].

La question se pose de savoir si l'inégalité (4) est la plus précise de ce type ou, autrement dit, si le coefficient h/π est le plus petit possible. Le théorème suivant nous fournit la réponse.

Pour toute fonction $x(t)$ de classe C^1 satisfaisant aux conditions (1) *on a*

$$\int_0^h |x(t)x'(t)|\,dt \leqslant \frac{h}{4}\int_0^h x'^2(t)\,dt. \tag{5}$$

Le coefficient $h/4$ est le plus petit possible.

2. Avant de passer à la démonstration de l'inégalité (5) nous allons démontrer le lemme suivant:

icm©

LEMME. *Soit* $p_0 = 0, p_1, p_2, \ldots, p_{2n+1}$ *une suite de nombres non négatifs et tels que*

$$p_{2i} \leqslant p_{2i-1} \quad \text{et} \quad p_{2i} \leqslant p_{2i+1} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Dans ces hypothèses on a l'inégalité

$$\Big[\sum_{i=0}^{n}(p_{2i+1}-p_{2i})\Big]^2 + \sum_{i=1}^{n} p_{2i}^2 \geqslant \sum_{i=0}^{n} p_{2i+1}^2. \tag{7}$$

On a en effet les relations suivantes, faciles à vérifier:

$$(p_1+p_3-p_2)^2+p_2^2 = p_1^2+p_3^2+2(p_1-p_2)(p_3-p_2) \geqslant p_1^2+p_3^2$$

et pour $n > 1$:

$$\Big[\sum_{i=0}^{n}(p_{2i+1}-p_{2i})\Big]^2 + \sum_{i=1}^{n} p_{2i}^2 = \Big[\sum_{i=0}^{n-1}(p_{2i+1}-p_{2i})+(p_{2n+1}-p_{2n})\Big]^2 + \sum_{i=1}^{n} p_{2i}^2$$

$$= \Big[\sum_{i=0}^{n-1}(p_{2i+1}-p_{2i})\Big]^2 + \sum_{i=1}^{n-1} p_{2i}^2 + p_{2n+1}^2 + 2(p_{2n+1}-p_{2n})\sum_{i=0}^{n-1}(p_{2i+1}-p_{2i+2})$$

$$\geqslant \Big[\sum_{i=0}^{n-1}(p_{2i+1}-p_{2i})\Big]^2 + \sum_{i=1}^{n-1} p_{2i}^2 + p_{2n+1}^2$$

ce qui nous permet de démontrer le lemme par induction.

3. Démonstration de l'inégalité (5). Posons dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$:

$$y(t) = \int_0^t |x'(t)|\,dt.$$

La fonction $y(t)$ est donc la variation totale de la fonction $x(t)$ dans l'intervalle $\langle 0, t\rangle$. On a $y'(t) = |x'(t)|$ et par conséquent

$$\int_0^h y(t)|x'(t)|\,dt = \int_0^h y(t)y'(t)\,dt = \tfrac{1}{2}y^2(h). \tag{8}$$

D'autre part

$$y(h) = \int_0^h |x'(t)|\,dt,$$

ce qui signifie que la valeur moyenne de la fonction $|x'(t)|$ dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ est égale à $y(h)/h$. D'après un théorème bien connu (v. [1], p. 143), la valeur moyenne de la fonction $x'^2(t)$ est au moins égale au carré de $y(h)/h$, c'est-à-dire

$$y^2(h) \leqslant h\int_0^h x'^2(t)\,dt. \tag{9}$$

Pour démontrer l'inégalité (5) il suffit donc, en raison des inégalités (8) et (9), de montrer que l'on a

$$4\int_0^h x(t)|x'(t)|\,dt \leqslant 2\int_0^h y(t)|x'(t)|\,dt = y^2(h), \tag{10}$$

ce qui est bien facile.

En effet, supposons d'abord que la fonction envisagée $x(t)$ n'admette dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ qu'un nombre fini de maxima et de minima relatifs et désignons par $p_1, p_3, \ldots, p_{2n+1}$ les valeurs maxima consécutives, comptées à partir de l'extrémité gauche de l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ et par $p_0 = 0, p_2, \ldots, p_{2n}, p_{2n+2} = 0$ les valeurs minima, comptées dans le même ordre. Il est évident que les nombres $p_0, p_1, \ldots, p_{2n}, p_{2n+1}$ satisfont aux inégalités (6). A l'aide d'un calcul facile, qu'il est inutile de reproduire ici, on obtient

$$y(h) = 2\sum_{i=0}^{n}(p_{2i+1}-p_{2i}), \qquad \int_0^h x(t)|x'(t)|\,dt = \sum_{i=0}^{n} p_{2i+1}^2 - \sum_{i=1}^{n} p_{2i}^2$$

et, par conséquent, l'inégalité (10) résulte immédiatement du lemme.

L'inégalité (5) se trouve ainsi démontrée pour toute fonction qui n'admet dans l'intervalle envisagé qu'un nombre fini d'extréma relatifs. Afin de l'étendre aux fonctions $x(t)$ quelconques il suffit d'envisager une suite de fonctions $x_1(t), x_2(t), \ldots$ dont chacune satisfait aux conditions (1) et n'admet qu'un nombre fini d'extréma relatifs, choisie de sorte que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t), \qquad \lim_{n\to\infty} x_n'(t) = x'(t)$$

uniformément dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$, et de passer à la limite sous les signes d'intégration dans les inégalités

$$\int_0^h |x_n(t)x_n'(t)|\,dt \leqslant \frac{h}{4}\int_0^h x_n'^2(t)\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

4. Il est facile de construire une fonction pour laquelle il y a égalité dans la formule (5). Il suffit, pour cela, de poser

$$x_0(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{h}t & \text{dans l'intervalle } \langle 0, h/2\rangle; \\[2ex] 2-\dfrac{2}{h}t & \text{dans l'intervalle } \langle h/2, h\rangle. \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas dérivable au point $h/2$, elle n'appartient donc pas à la classe de fonctions qui interviennent dans l'énoncé du théorème. Mais, comme $x_0(t)$ peut être approchée convenablement par des fonctions de classe C^1, il en résulte que dans l'inégalité (5) le coefficient $h/4$ est le plus petit possible.

Le théorème se trouve ainsi complètement démontré.

On pourrait démontrer même davantage: *le signe d'égalité dans la formule* (5) *n'est possible que pour les fonctions* $Cx_0(t)$ *où* C *est une constante arbitraire positive*, de sorte que *pour toute fonction* $x(t)$ *de classe* C^1 *satisfaisant aux conditions* (1) *on a dans* (5) *une inégalité forte.*

5. Soit $y(t)$ une fonction de classe C^1 satisfaisant aux conditions (1). Appliquons l'inégalité (5) à la fonction $x(t) = \sqrt{y(t)}$ ce qui nous donne l'inégalité suivante

$$(11) \qquad \int_0^h |y'(t)|\,dt \leqslant \frac{h}{8}\int_0^h \frac{y'^2(t)}{y(t)}\,dt.$$

Cela veut dire que la variation totale de la fonction $y(t)$ dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ se laisse évaluer par l'intégrale de la fonction $y'^2(t)/y(t)$.

De l'inégalité (11) on tire immédiatement

$$\max_{\langle 0,h\rangle}|y(t)| \leqslant \frac{h}{16}\int_0^h \frac{y'^2(t)}{y(t)}\,dt.$$

Travaux cités

[1] G. Hardy, J. Littlewood and G. Polya, *Inequalities*, Cambridge 1934.

[2] Z. Opial, *Sur une inégalité de C. de la Vallée Poussin dans la théorie de l'équation différentielle linéaire du second ordre*, Ann. Polon. Math. 6 (1959), p. 83-87.

Reçu par la Rédaction le 18. 2. 1959

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VIII (1960)

Sur les zéros d'un polynôme contenant des paramètres arbitraires

par W. Jankowski (Poznań)

Je me propose, dans ce travail, de compléter la démonstration du théorème suivant:

Le polynôme

$$(1) \qquad (z+P)^p + az^{p+1} + bz^{p+2}$$

a au moins p zéros dont le module ne surpasse pas le nombre

$$\frac{2(p+1)+\sqrt{2p(p+1)}}{2}\cdot|P|.$$

La démonstration de ce théorème a été donnée[1] dans les cas suivants: 1° $|a/b| \leqslant R$, 2° $R/\lambda \leqslant |a/b|$ et, en partie, dans le cas $R < |a/b| < R/\lambda$, où

$$R = \frac{2(p+1)+\sqrt{2p(p+1)}}{2}, \qquad \lambda = \frac{2(p+1)-\sqrt{2p(p+1)}}{2(p+2)}.$$

Nous établirons le théorème dans le cas où $R < |a/b| < R/\lambda$. Nous avons déjà démontré que si R est la borne supérieure du module de p zéros du polynôme

$$(2) \qquad (z+1)^p + az^{p+1} + bz^{p+2},$$

le nombre $R|P|$ est la borne supérieure du module de p zéros du polynôme (1).

Nous écrivons le polynôme (2) sous la forme

$$(3) \qquad z^{p+1}(-a-bz)\left[\frac{(z+1)^p}{z^{p+1}(-a-bz)} - 1\right].$$

Nous admettons que $-\pi \leqslant \alpha = \arg a < \pi$, $-\pi+\alpha \leqslant \beta = \arg b < \pi+\alpha$, d'où $-\pi < \alpha-\beta \leqslant \pi$. Soit $z = Re^{i\vartheta}$, où $\alpha-\beta \leqslant \vartheta < 2\pi+\alpha-\beta$, l'é-

[1] W. Jankowski, *Sur les zéros des polynômes contenant des paramètres arbitraires*, Annales U. M. C. S. Lublin, Sectio A, 5 (1951), p. 31-92.