STUDIA MATHEMATICA, T. XIX. (1960)

Propriétés locales des fonctions à séries de Fourier aléatoires

par

J. P. KAHANE (Montpellier)

L'objet de notre étude est constitué par les fonctions aléatoires périodiques $F(t)$ qui peuvent être définies par leurs séries de Fourier

$$(1) \qquad \sum_1^\infty R_n \cos(nt+\Phi_n),$$

où les amplitudes R_n et les phases Φ_n sont des variables aléatoires réelles indépendantes les unes des autres, respectivement non-négatives et réparties (modulo 2π) de façon que, pour chaque n, $\cos\Phi_n$ et $\sin\Phi_n$ aient des valeurs probables nulles:

$$\mathcal{E}(\cos\Phi_n) = \mathcal{E}(\sin\Phi_n) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Chaque fois que (1) est la série de Fourier d'une fonction continue, c'est cette fonction que nous désignerons par $F(t)$. Sinon $F(t)$ est définie presque partout (quand (1) est une série de Fourier) ou n'a aucun sens.

Nous nous proposons de calculer la probabilité de certaines propriétés de la série (1) et de la fonction $F(t)$, à savoir:

$(\mathcal{P}_1)$: la convergence uniforme de (1),

$(\mathcal{P}_2)$: la continuité de $F(t)$,

$(\mathcal{P}_3)$: l'appartenance de $F(t)$ à L^∞,

$(\mathcal{P}_4)$: l'appartenance de $F(t)$ à $\mathrm{Lip}\,\alpha$ (classe des fonctions lipschitziennes d'ordre α, avec la convention usuelle: pour $\alpha>1$, $F\in\mathrm{Lip}\,\alpha \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow F'\in\mathrm{Lip}(\alpha-1)$).

$(\mathcal{P}_5)$: le fait que $\overline{\lim\limits_{h\downarrow 0}}\dfrac{|F(t+h)-F(t)|}{h^\alpha} = \infty$ pour tout t $(0<\alpha\leqslant 1)$, qui entraîne la non-dérivabilité de $F(t)$ en tout point.

A notre connaissance, ce genre de problèmes n'a été considéré que dans deux cas, particulièrement importants il est vrai. Le premier est celui où tous les R_n sont fixés ($R_n = r_n$), et où chaque Φ_n ne prend que deux valeurs ($\Phi_n = \varphi_n \pm \frac{1}{2}\pi$), ou bien se trouve équiparti modulo 2π [8, 9]; c'est en nous inspirant des méthodes de ces auteurs que nous traitons les quatre premières questions posées. Le second cas est celui de la série de Fourier-Wiener, qui peut servir à définir le mouvement brownien; dans ce cas, les propriétés locales de $F(t)$ ont été étudiées avec minutie (voir p. ex. [3]); notre méthode apporte cependant une précision et, nous semble-t-il, une simplification d'exposé, aux résultats connus concernant la cinquième question ([7], chap. 9).

Voici une formulation faible des principaux résultats, dans le cas particulier important où (1) peut s'écrire sous la forme

$$\sum^{\infty} a_n(\Xi_n \cos nt + \Xi'_n \sin nt), \tag{2}$$

où Ξ_n et Ξ'_n désignent des variables gaussiennes réduites, indépendantes les unes des autres, et a_n des nombres $\geqslant 0$ (la série de Fourier-Wiener correspond à $a_n = 1/n$). Posons $s_i = \big(2 \sum_{n=2^i+1}^{2^{i+1}} a_n^2\big)^{1/2}$.

Supposons la suite $\{s_i\}$ décroissante. Chacune des propriétés $(\mathcal{P}_1)$, $(\mathcal{P}_2)$, $(\mathcal{P}_3)$ *a pour probabilité* 1 *ou* 0, *suivant que* $\sum_1^\infty s_i$ *converge ou diverge* (voir théorème 4).

Posons

$$\alpha^* = \varliminf_{i\to\infty} \frac{-\log s_i}{i \log 2}.$$

La propriété $(\mathcal{P}_4)$ *a pour probabilité* 1, *si* $\alpha < \alpha^*$, *et* 0, *si* $\alpha > \alpha^*$ (voir théorème 7).

Si

$$\alpha > \varlimsup_{i\to\infty} \frac{-\log s_i}{i \log 2},$$

la propriété $(\mathcal{P}_5)$ *est presque sûre* (voir théorème 10).

Une autre illustration de nos résultats est constituée par les séries (2) avec $a_n = n^{-3/2}(\log n)^\gamma$. On a presque sûrement

$F(t)$ continûment dérivable, si $\gamma < -1$ (voir théorème 4);
$F(t)$ non lipschitzienne (d'ordre un), mais primitive d'une fonction ϵL^2, *si* $-1 \leqslant \gamma < -\frac{1}{2}$ (voir théorèmes 1 et 4);
$F(t)$ non primitive d'une fonction ϵL^2, si $\gamma \geqslant -\frac{1}{2}$ (voir théorème 1);
$F(t)$ partout non-dérivable, si $\gamma > 0$ (voir théorème 9).

Avant d'étudier la probabilité des propriétés $(\mathcal{P}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ énumérées ci-dessus, nous indiquons les résultats, beaucoup plus faciles, concernant les propriétés suivantes:

(Q_1): la convergence de (1) presque partout;
(Q_2): l'appartenance de $F(t)$ à $L^2(0, 2\pi)$;
(Q_3): la convergence absolue de (1) pour tout t.

1. Préliminaires résultats relatifs à (Q_1), (Q_2), (Q_3)

Rappelons d'abord qu'en vertu d'un théorème de Kolmogoroff (voir p. ex. [4], p. 128), *si une propriété de* (1) *est invariante par le changement d'un nombre fini de termes dans* (1), *sa probabilité ne peut-être que* 0 *ou* 1. C'est le cas pour chacune des propriétés $(\mathcal{P}_j)$ et (Q_k).

Remarquons aussi qu'en vertu des théorèmes classiques sur la mesure de Lebesgue, *il revient au même de dire que, presque partout* (*en* t), *une propriété de* (1) *est presque sûre, ou qu'il est presque sûr que cette propriété a lieu presque partout.* Sans ambiguité on pourra dire qu'elle a lieu presque sûrement presque partout. Il en est ainsi, naturellement, si pour chaque t, cette propriété est presque sûre.

Les résultats relatifs à (Q_1), (Q_2), (Q_3) dérivent d'une condition classique de Khintchine-Kolmogoroff, qui peut s'énoncer ainsi [1]: *la convergence presque sûre d'une série* $\sum_1^\infty X_n$ *dont les termes sont des variables aléatoires indépendantes complexes a lieu si et seulement si les séries* $\sum_1^\infty \mathcal{E}(Y_n)$ *et* $\sum_1^\infty \mathcal{E}(|Y_n|^2)$ *convergent, avec* $Y_n = X_n/\max(1, |X_n|)$.

THÉORÈME 1. *Chacune des propriétés* (Q_1) *et* (Q_2) *a pour probabilité* 1 *ou* 0 *suivant que la série* $\sum_{n=1}^\infty \mathcal{E}\big(\min(1, R_n^2)\big)$ *converge ou diverge. La propriété* (Q_3) *a pour probabilité* 1 *ou* 0 *suivant que la série* $\sum_{n=1}^\infty \mathcal{E}\big(\min(1, R_n)\big)$ *converge ou diverge.*

Démonstration. Immédiate pour (Q_2) et (Q_3) en posant respectivement $X_n = R_n^2$ et $X_n = R_n$. Pour (Q_1), on remarque que la convergence presque sûre de (1) presque partout équivaut à la convergence presque sûre de

$$\sum_{n=1}^\infty R_n e^{int+\varphi_n} \tag{3}$$

[1] Voir p. ex. [3], p. 142, ou [1], p. 111, qui donnent des énoncés voisins.

presque partout; en posant $X_n = R_n e^{int+\Phi_n}$, on voit que la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}(\min(1, R_n^2))$ équivaut, pour tout t, à la convergence presque sûre de (3).

Par une étude plus minutieuse, on montrerait que (Q_1) et (Q_2) sont presque sûrement équivalentes au fait que (1) est une série de Fourier-Lebesgue (dans un cas particulier, voir [10], p. 215).

2. Définitions et notations concernant les éléments aléatoires

Les éléments aléatoires seront toujours représentés par des lettres majuscules. Comme on l'a déjà dit, $\mathcal{E}(X)$ est l'espérance mathématique de X. La probabilité de $\mathcal{P}$ est notée $p(\mathcal{P})$.

A une variable aléatoire réelle X on associe ses moments successifs $m_n(X) = \mathcal{E}(X^n)$, sa fonction de répartition $p(X<x)$, sa fonction caractéristique $\mathcal{E}(e^{ixX})$, son écart moyen quadratique $\sigma(X) = \mathcal{E}^{1/2}(X^2)$.

A une variable X centrée on associera aussi son *écart de Gauss* $\tau(X)$, qui est le minimum des $\tau > 0$ tels que, pour tout y réel, $\mathcal{E}(e^{2yX}) \leqslant e^{2\tau^2y^2}$. Si X dépend d'une loi de Gauss, $\tau(X) = \sigma(X)$. Chaque fois que $\tau(X)$ est fini, on dira que X dépend d'une loi *sous-gaussienne*, ou plus simplement que X est sous-gaussienne. On verra au paragraphe 3 des propriétés de l'écart de Gauss et des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une variable X soit sous-gaussienne.

Rappelons que X est dite *symétrique* si X et $-X$ dépendent de la même loi. La *symétrisée* de X est la variable $\pm X$ (les signes $+$ et $-$ étant également probables).

On pose, sauf au paragraphe 10,

$$\sigma_n = \sigma(R_n), \quad \tau_n = \tau(\pm R_n) = \sup_{y>0}\left(\frac{\log \mathcal{E}(\mathrm{Ch}\, 2yR_n)}{2y^2}\right)^{1/2},$$

$$s_i = \Big(\sum_{n=2^i+1}^{2^{i+1}} \sigma_n^2\Big)^{1/2}, \quad t_i = \Big(\sum_{n=2^i+1}^{2^{i+1}} \tau_n^2\Big)^{1/2}$$

(t_i ne représentera jamais une valeur particulière de la variable t). Nous verrons que si les $\pm R_n$ dépendent de lois sous-gaussiennes du même type, c'est-à-dire si $R_n = \sigma_n S_n$, les $\pm S_n$ dépendant toutes de la même loi sous-gaussienne, les σ_n et τ_n d'une part, les s_i et t_i d'autre part, sont proportionnels.

Nous dirons que (1) *représente une fonction $F(t)$ gaussienne et stationnaire* si 1° pour chaque t, (1) converge presque sûrement vers $F(t)$, 2° $F(t)$ dépend, pour chaque t, d'une loi de Gauss, 3° $\sigma(F(t)) = \sigma(F)$ ne dépend pas de t. Nous verrons que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et suffit que (1) soit de la forme (2), avec $\sum_1^{\infty} a_n^2 < \infty$. Selon [3] nous appelons *série de Fourier-Wiener* la série (2) dans laquelle $a_n = 1/n$.

Sauf indication contraire, nous dirons que des éléments aléatoires sont indépendants s'ils sont indépendants „en bloc".

3. Propriétés des écarts de Gauss et des lois sous-gaussiennes

Dans ce paragraphe, X et Y représentent des variables aléatoires réelles.

PROPOSITION 1 (évidente). $\tau(\lambda X) = \lambda\tau(X)$ *pour tout* $\lambda > 0$.

COROLLAIRE (déjà annoncé). *Si les R_n dépendent de lois sous-gaussiennes du même type, les σ_n et τ_n sont proportionnels.*

PROPOSITION 2. *Si X et Y sont indépendantes,* $\tau^2(X+Y) \leqslant \tau^2(X)+\tau^2(Y)$.

La démonstration découle de l'égalité $\mathcal{E}(e^{2y(X+Y)}) = \mathcal{E}(e^{2yX})\mathcal{E}(e^{2yY})$.

PROPOSITION 3. *S'il existe $h \geqslant 0$ et $\tau > 0$ tels que, pour tout $y > 0$, on ait $\mathcal{E}(e^{2yX}) \leqslant e^{2\tau^2y^2+2h}$, on a, pour tout $l > 0$,*

$$p(X > 2\tau\sqrt{h+l}) \leqslant e^{-2l}.$$

Démonstration. L'hypothèse entraîne $\mathcal{E}(e^{2y(X-y\tau^2-(h+l)/y)}) \leqslant e^{-2l}$, donc $p(X > y\tau^2+(h+l)/y) \leqslant e^{-2l}$. En prenant $y = \tau^{-1}\sqrt{h+l}$, on a la conclusion.

PROPOSITION 4. *Pour* $x > 0$, $p(X > x) \leqslant \exp(-x^2/2\tau^2(X))$.

C'est un corollaire de la proposition 3 (avec $h = 0$, $\tau = \tau(X)$, $l = x^2/4\tau^2$).

PROPOSITION 5. *Supposons X et Y symétriques, et $p(X > x) \leqslant p(Y > x)$ pour $x > 0$; alors $\tau(X) \leqslant \tau(Y)$.*

Démonstration. Représentons X (resp. Y) comme fonction non croissante d'une variable aléatoire auxiliaire T (resp. T') équipartie sur $[0, 1]$: on a $T = p(X > X(T))$ et l'hypothèse entraîne $|X(T)| \leqslant |Y(T)|$, d'où

$$\mathcal{E}(e^{2yX}) = \mathcal{E}(Ch|2yX|) \leqslant \mathcal{E}(Ch|2yY|) = \mathcal{E}(e^{2yY}) \text{ et } \tau(X) \leqslant \tau(Y).$$

PROPOSITION 6. *Supposons X symétrique, et*

$$p(X > x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty} e^{-x^2/2\tau^2}dx \quad pour \quad x > 0;$$

alors $\tau(X) \leqslant \tau$.

C'est un corollaire de la proposition 5 (Y étant gaussienne et d'écart τ).

PROPOSITION 7. *Si X est symétrique, on a*

$$\tau(X) \leqslant \sup_n \left(\frac{2^n n! m_{2n}(X)}{(2n)!}\right)^{1/2n}, \tag{5}$$

$$m_{2n}(X) \leqslant (2n)! \left(\frac{e}{n}\right)^n \tau^{2n}(X). \tag{6}$$

Démonstration. D'après la définition, $\tau(X)$ est le minimum des $\tau > 0$ tels que

$$\sum_0^\infty \frac{(2y)^{2n}}{(2n)!} m_{2n}(X) \leqslant \sum_0^\infty \frac{(2\tau^2 y^2)^n}{n!} = e^{2\tau^2 y^2}. \tag{7}$$

(7) a bien lieu quand, pour chaque n,

$$\frac{(2y)^{2n}}{(2n)!} m_{2n}(X) \leqslant \frac{(2\tau^2 y^2)^n}{n!},$$

c'est-à-dire quand τ ne minorise pas le second membre de (5). Inversement, si (7) est réalisé, on a, pour tout y, $m_{2n}(X) \leqslant (2n)!(2y)^{-2n} e^{2\tau^2 y^2}$ et le minimum du second membre, quand y varie, est le second membre de (6).

PROPOSITION 8. *Pour toute X centrée, on a $\mathcal{E}(e^{2yX}) < \mathcal{E}(e^{\pm 4yX}) = \mathcal{E}(Ch 4yX)$ pour $y > 0$ et $\tau(X) < 2\tau(\pm X)$.*

Démonstration. La seconde inégalité résulte de la première, qui est immédiate si l'on développe en série les deux membres, compte-tenu de ce que $m_1(X) = 0$ et

$$m_{2n+1}(X) \leqslant \big(m_{2n}(x) m_{2n+2}(X)\big)^{1/2} \leqslant \tfrac{1}{2}\big((2y)^{-1} m_{2n}(X) + 2y\, m_{2n+2}(X)\big).$$

Les propositions 4, 6, 7 et 8 jointes à la définition des variables sous-gaussiennes, permettent d'en donner les caractérisations suivantes.

PROPOSITION 9 (caractérisation des variables aléatoires sous-gaussiennes). *Pour qu'une variable aléatoire réelle centrée X soit sous-gaussienne, il faut et suffit que l'une des conditions équivalentes suivantes soit réalisée:*

a) *la fonction caractéristique $\mathcal{E}(e^{itX})$ est une fonction entière d'ordre 2 et de type moyen;*

b) *les fonctions de répartition $p(X < x)$ et $p(-X < x)$ dépassent, pour x assez grand, celle d'une variable gaussienne;*

c) *$m_{2n}(X) = O(K^n n!)$ pour $K > 0$ assez grand ($n \to \infty$).*

4. Conditions suffisantes pour la convergence uniforme presque-sûre de (1)

Notre méthode est directement inspirée de celle de Salem et Zygmund. Elle se fonde sur la remarque suivante (conséquence du théorème de S. Bernstein sur la dérivée d'un polynôme trigonométrique): si $P(t)$ est un polynôme trigonométrique de degré $\varkappa$, et si $M = \max|P(t)|$, il existe un intervalle de longueur $1/\varkappa$ sur lequel $|P(t)| \geqslant M/2$.

A la série (1), les variables aléatoires R_n étant supposées sous-gaussiennes, nous associons les polynômes trigonométriques

$$P_{\mu,\nu}(t) = \sum_{n=\mu+1}^{\nu} R_n \cos(nt + \Phi_n) \tag{8}$$

et nous posons $M_{\mu,\nu} = \max\limits_{\mu<\varkappa\leqslant\nu} \max\limits_t |P_{\mu,\varkappa}(t)|$. D'après la remarque ci-dessus, il existe un $\varkappa$ ($\mu < \varkappa \leqslant \nu$) et un intervalle I de longueur $1/\nu$ tels que, sur I, $|P_{\mu,\varkappa}(t)| > \frac{1}{2}M_{\mu,\nu}$; soit $M_{\mu,\nu}(t)$ la fonction égale à $M_{\mu,\nu}$ sur I et nulle part ailleurs: on a partout

$$|P_{\mu,\varkappa}(t)| > \tfrac{1}{2} M_{\mu,\nu}(t).$$

D'après les propositions 2 et 8 ci-dessus ($R_n \cos(nt+\Phi_n)$ étant centrée par hypothèse),

$$\tau^2(P_{\mu,\varkappa}(t)) \leqslant \sum_{n=\mu+1}^{\varkappa} \tau^2\big(R_n \cos(nt+\Phi_n)\big) \leqslant 4 \sum_{n=\mu+1}^{\nu} \tau_n^2.$$

D'autre part,

$$\frac{1}{\nu}\mathcal{E}(e^{yM_{\mu,\nu}}) < \mathcal{E}\Big(\int_0^{2\pi} e^{yM_{\mu,\nu}(t)}\,dt\Big)$$

$$< \mathcal{E}\Big(\int_0^{2\pi} (e^{2yP_{\mu,\varkappa}(t)} + e^{-2yP_{\mu,\varkappa}(t)})\,dt\Big)$$

$$< 2\int_0^{2\pi} e^{2y^2\tau^2(P_{\mu,\varkappa}(t))}\,dt.$$

Donc $\mathcal{E}(e^{yM_{\mu,\nu}}) < 4\pi\nu \exp(8y^2 \sum\limits_{n=\mu+1}^{\nu} \tau_n^2)$. D'après la proposition (3),

$$p\Big(M_{\mu,\nu} > 12\Big(\log\nu \sum_{n=\mu+1}^{\nu} \tau_n^2\Big)^{1/2}\Big) \leqslant \frac{4\pi}{\nu^2}. \tag{9}$$

Si nous choisissons une suite $\{\nu_i\}$ croissante quelconque et si nous posons $\mu_{i+1} = \nu_i$, la convergence de la série $\sum\limits_{i=1}^\infty M_{\mu_i,\nu_i}$ entraîne la convergence uniforme de (1). Or, d'après (9), cette convergence est presque sûre quelle que soit la suite $\{\nu_i\}$, dès que

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\log\nu_{i+1}\sum_{n=\nu_i+1}^{\nu_{i+1}}\tau_n^2\Big)^{1/2}<\infty.$$

Exprimons le résultat quand on prend $\nu_i=2^{2^i}$; rappelons que $t_k^2=\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}\tau_n^2$.

Théorème 2. *Si*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Big(2^i\sum_{k=2^i}^{2^{i+1}-1}t_k^2\Big)^{1/2}<\infty,$$

il est presque sûr que (1) *converge uniformément* (*propriété* $(\mathcal{P}_1)$) *et que* $F(t)$ *est continue* (*propriété* $(\mathcal{P}_2)$).

Corollaire. *Si la suite* t_i *est majorée terme à terme par une suite* t'_i *décroissante telle que* $\sum_1^\infty t'_i<\infty$, $(\mathcal{P}_1)$ *et* $(\mathcal{P}_2)$ *sont presque sûres. En particulier, si* t_i *est une suite décroissante et si* $\sum_1^\infty t_i<\infty$, $(\mathcal{P}_1)$ *et* $(\mathcal{P}_2)$ *sont presque sûres.*

La condition $\sum_1^\infty t_i<\infty$ ne suffit pas à garantir la continuité presque sûre de $F(t)$, comme l'ont montré Salem et Zygmund ([9], p. 293).

On verra plus loin (théorème 4), moyennant certaines restrictions sur les lois dont dépendent les R_n, une condition nécessaire et suffisante pour que $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ soient presque sûres.

5. Quelques lemmes du calcul des probabilités

Ces lemmes se trouvent implicitement dans [8].

Lemme 1. *Si* X *est une variable aléatoire* $\geqslant 0$, *on a*

$$p\big(X>\lambda\mathcal{E}(X)\big)>(1-\lambda)^2\frac{\mathcal{E}^2(X)}{\mathcal{E}(X^2)}\qquad(0<\lambda<1).$$

Démonstration. On pose $X'=X$ si $X>\lambda\mathcal{E}(X)$ et $X'=0$ sinon. On a $\mathcal{E}(X-X')<\lambda\,\mathcal{E}(X)$, soit $\mathcal{E}(X)(1-\lambda)<\mathcal{E}(X')$. Or, d'après l'inégalité de Schwarz, $\mathcal{E}^2(X')<p(X'\neq 0)\mathcal{E}(X'^2)<p(X'\neq 0)\mathcal{E}(X^2)$, d'où le résultat.

Lemme 2. *Si* X *est une variable aléatoire réelle centrée, on a*

$$p\big(X>\lambda\mathcal{E}(|X|)\big)>\frac{(1-2\lambda)^2}{4}\,\frac{\mathcal{E}^2(|X|)}{\mathcal{E}(X^2)}\qquad(0<\lambda<\tfrac12).$$

Démonstration. On pose $X=X^+-X^-$, $|X|=X^++X^-$; alors $\mathcal{E}(X^+)=\mathcal{E}(X^-)=\frac12\mathcal{E}(|X|)$ et, en utilisant le lemme 1,

$$p\big(X>\lambda\mathcal{E}(|X|)\big)=p\big(X^+>2\lambda\mathcal{E}(X^+)\big)>(1-2\lambda)^2\frac{\mathcal{E}^2(X^+)}{\mathcal{E}(X^{+2})}$$

$$>\frac{(1-2\lambda)^2}{4}\,\frac{\mathcal{E}^2(|X|)}{\mathcal{E}(X^2)}.$$

Lemme 3. *Si* Y_n $(n=1,\dots,\nu)$ *sont des variables aléatoires réelles centrées indépendantes, et s'il existe un* $\varkappa$ (*on supposera* $\varkappa>3$) *tel que* $\mathcal{E}(Y_n^4)<K\mathcal{E}^2(Y_n^2)$ *pour tout* n, *on a*

$$p\Big(\sum_1^\nu Y_n>\lambda\Big(\sum_1^\nu\mathcal{E}(Y_n^2)\Big)^{1/2}\Big)>\frac{(1-16\lambda\varkappa)^2}{256\varkappa^2}\qquad\Big(0<\lambda<\frac{1}{16\varkappa}\Big).$$

Démonstration. Posons $\mathcal{E}\big((\sum Y_n)^2\big)=\sum\mathcal{E}(Y_n^2)=s^2$. On a

$$\mathcal{E}\Big(\big(\sum Y_n\big)^4\Big)=\sum\mathcal{E}(Y_n^4)+6\sum_{n\neq m}\sum\mathcal{E}(Y_n^2)\mathcal{E}(Y_m^2)<\varkappa s^4\qquad(\text{car }\varkappa>3).$$

D'après le lemme 1, $p\big(|\sum Y_n|>\frac12\sqrt{2}s\big)>1/4\varkappa$ donc $\mathcal{E}=\mathcal{E}\big(|\sum Y_n|\big)>s/8\varkappa$. D'après le lemme 2,

$$p\Big(\sum Y_n>\lambda s\Big)>p\Big(\sum Y_n>8\lambda\varkappa\mathcal{E}\Big)>\frac{(1-16\lambda\varkappa)^2}{4}\,\frac{\mathcal{E}^2}{s^2}>\frac{(1-16\lambda\varkappa)^2}{256\varkappa^2}.$$

Lemme 4. *Soit* X_i $(i=1,2,\dots,k)$ *une suite de variables aléatoires positives enchaînées (la loi de* X_{i+1} *dépendant de la réalisation de* $X_1,X_2,\dots,X_i$*); on désigne par* $\mathcal{E}_i(\ )$ *l'espérance mathématique quand* $X_1,X_2,\dots,X_{i-1}$ *sont fixés, et on suppose l'existence de nombres positifs* $\varkappa$ *et* r_i *tels que, pour chaque* i, $\mathcal{E}_i(X_i^2)\leqslant r_i^2$ *et* $\mathcal{E}_i(X_i)>\varkappa r_i$ *quelle que soit la réalisation de* $X_1,X_2,\dots,X_{i-1}$. *Alors*

$$p\Big(\sum_1^k X_i>\lambda\sum_1^k r_i\Big)>(\varkappa-\lambda)^2\qquad(0<\lambda<\varkappa).$$

Démonstration. Les hypothèses entraînent $\mathcal{E}(X_i^2)\leqslant r_i^2$ et $\mathcal{E}(X_i)>\varkappa r_i$. La première inégalité, jointe à l'inégalité du triangle, donne

$$\mathcal{E}^{1/2}\Big(\big(\sum X_i\big)^2\Big)\leqslant\sum\mathcal{E}^{1/2}(X_i^2)\leqslant\sum r_i.$$

La seconde implique $\mathcal{E}(\sum X_i) > \varkappa \sum r_i$. D'après le lemme 1,

$$p\Big(\sum X_i > \lambda \sum r_i\Big) > p\Big(\sum X_i > \frac{\lambda}{\varkappa}\,\mathcal{E}\Big(\sum X_i\Big)\Big)$$

$$> \Big(1-\frac{\lambda}{\varkappa}\Big)^2 \frac{\mathcal{E}^2(\sum X_i)}{\mathcal{E}((\sum X_i)^2)} > (\varkappa-\lambda)^2.$$

6. Condition nécessaire pour que $F(t)$ soit presque sûrement bornée (propriété $(\mathcal{P}_3)$) (²)

La méthode repose sur la considération de noyaux positifs $l_\nu(t)$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) tels que, pour toute fonction $f(t)$ réelle sommable, les valeurs prises par $f * l_\nu$ se trouvent dans l'intervalle des valeurs prises par $f * l_{2\nu}$ (³).

On construit ainsi les l_ν. Soit $\Theta(x)$ et $\chi(x)$ deux fonctions continues, paires, non-négatives, de support $[-1, +1]$, convexes sur $[-1, 0]$, égales à 1 en 0, et telles que $\Theta(x) = \chi(x)\Theta(x/2)$. Par exemple, $\Theta(x) = (1-x)(1-x/2)\ldots(1-x/2^n)\ldots$ et $\chi(x) = 1-x$ sur $[0, 1]$. Posons

$$l_\nu(t) = \sum_{-\nu}^{\nu} \Theta\Big(\frac{n}{\nu}\Big)e^{int}, \qquad k_\nu(t) = \sum_{-\nu}^{\nu} \chi\Big(\frac{n}{\nu}\Big)e^{int}.$$

$l_\nu(t)$ et $k_\nu(t)$ sont non négatifs ([10], p. 183), $\|k_\nu\| = 1$ et

$$l_\nu = k_\nu * l_{2\nu}, \tag{10}$$

ce qui établit bien la propriété voulue. Posons encore

$$l_\nu^*(t) = \sum_{-\nu}^{\nu} \Theta\Big(\frac{n}{2\nu}\Big)e^{int}.$$

On a

$$l_\nu = k_\nu * l_\nu^* \tag{11}$$

ce qui montre que toute valeur prise par $f * l_\nu$ est prise par $f * l_\nu^*$.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant. Rappelons qu'on a posé

$$\sigma_n = \mathcal{E}^{1/2}(R_n^2) \qquad \text{et} \qquad s_i = \Big(\sum_{2^i+1}^{2^{i+1}} \sigma_n^2\Big)^{1/2}.$$

(²) Ce paragraphe est, pour l'essentiel, une simple transcription du paragraphe correspondant de [8], 3, p. 196-199. Paradoxalement, la méthode ne s'applique pas au cas envisagé par Paley et Zygmund ($R_n = r_n$, $\varphi_n = 0$ ou π), et l'énoncé qu'ils donnent, s'appuyant sur une formule contestable (18.5), ne nous semble pas démontré.

(³) Il s'agit toujours de fonctions 2π-périodiques,

$$f * l_\nu(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-s)\,l_\nu(s)\,ds \qquad \text{et} \qquad \|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|\,dt.$$

Théorème 3. *Supposons*

(a) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\mathcal{E}(R_n^4)}{\sigma_n^4} < \infty$$

et

(b) $$\inf_{u,n} \mathcal{E}\big(\cos^2(u+\Phi_n)\big) > 0.$$

Pour que (1) *soit presque sûrement la série de Fourier d'une fonction bornée* $F(t)$, *il faut que la série* $\sum_i^\infty s_i$ *soit convergente.*

Démonstration. Supposons qu'on a presque sûrement $F \in L^\infty$. Pour tout choix des valeurs des R_n et Φ_n tel que $F \in L^\infty$, on définit ainsi les suites H_i, T_i, T_i':

$$T_1 = 0, \qquad H_i = F * l_{2^i}(T_i),$$

$$F * l_{2^i}^*(T_i') = H_i \qquad \text{(possible à cause de (11))}$$

$$\begin{cases} T_{i+1} = T_i' & \text{si} \quad F * l_{2^{i+1}}(T_i') > H_i, \\ F * l_{2^{i+1}}(T_{i+1}) = H_i & \text{sinon} \quad \text{(possible à cause de (10)).} \end{cases}$$

Posons

$$Y_n = R_n\Theta\Big(\frac{n}{2^{i+1}}\Big)\cos(nT_i'+\Phi_n) \qquad (2^i < n \leqslant 2^{i+1}),$$

$$X_i = H_{i+1} - H_i = \max\Big(0, \sum_{n=2^i+1}^{2^{i+1}} Y_n\Big).$$

Quitte à choisir, à chaque stade, T_i et T_i' minimum sur $[0, 2\pi]$, on voit que T_i et T_i' ne dépendent que des valeurs des R_m et Φ_m pour $m \leqslant 2^i$.

Supposons ces valeurs fixées. Les Y_n ($2^i < n \leqslant 2^{i+1}$) sont des variables aléatoires réelles centrées indépendantes. D'après (a) et (b) il existe deux constantes positives α et β telles que

$$\mathcal{E}(Y_n^4) < \alpha^4\Theta^4\Big(\frac{n}{2^{i+1}}\Big)\sigma_n^4 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}(Y_n^2) > \beta^2\Theta^2\Big(\frac{n}{2^{i+1}}\Big)\sigma_n^2.$$

On peut donc appliquer le lemme 3. En posant

$$r_i^2 = \sum_{2^i+1}^{2^{i+1}} \Theta^2\Big(\frac{n}{2^{i+1}}\Big)\sigma_n^2,$$

on a, pour ε et λ assez petits,

$$p\Big(\sum_{2^i+1}^{2^{i+1}} Y_n > \lambda r_i\Big) > \varepsilon. \tag{12}$$

Considérons maintenant les variables aléatoires enchaînées X_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Elles satisfont les hypothèses du lemme 4; en effet, on a bien

$$\mathcal{E}_i(X_i^2) < \mathcal{E}_i\Big(\Big(\sum_{2^i+1}^{2^{i+1}} Y_n\Big)^2\Big) \leqslant r_i^2,$$

$$\mathcal{E}_i(X_i) > \lambda\varepsilon r_i \quad \text{(d'après (12))}.$$

Pour $\eta > 0$ assez petit, il y a donc une probabilité $> \eta$ d'avoir $\sum_1^k X_i > \eta \sum_1^k r_i$. Comme $\sum_1^k X_i = H_{k+1} - H_1$ est presque sûrement borné quand $k \to \infty$ (d'après l'hypothèse $F \in L^\infty$ presque sûrement et la définition de H_k), on a $\sum_1^\infty r_i < \infty$.

Quitte à considérer, au lieu de (1), la série $\sum_1^\infty R_n \cos(3nt + \Phi_n)$, on voit que $\sum_1^\infty r_i' < \infty$, avec

$$r_i'^2 = \sum_{2^i < 3n \leqslant 2^{i+1}} \Theta^2\Big(\frac{3n}{2^{i+1}}\Big)\sigma_n^2.$$

On vérifie aisément l'inégalité

$$r_i^2 + r_{i+1}'^2 > \Theta^2\Big(\frac{3}{4}\Big)\sum_{n=2^i+1}^{2^{i+1}} \sigma_n^2 = \Theta^2\Big(\frac{3}{4}\Big)s_i^2,$$

qui entraîne la convergence de $\sum_1^\infty s_i$, c. q. f. d.

Observons que, d'après l'inégalité (6), la condition (a) est réalisée dès que $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \tau_n/\sigma_n < \infty$. Cette remarque permet de donner une forme frappante à un simple corollaire des théorèmes 2 et 3.

Convenons de dire que deux suites sont *équivalentes* si le rapport des termes généraux est borné, supérieurement et inférieurement, par deux nombres positifs.

THÉORÈME 4. *Sous les hypothèses:*

(b) $\inf\limits_{u,n} \mathcal{E}\big(\cos^2(u + \Phi_n)\big) > 0$;

(c) *les suites σ_n et τ_n sont équivalentes*

et

(d) *la suite s_i est équivalente à une suite décroissante, chacune des propriétés $(\mathcal{P}_1)$, $(\mathcal{P}_2)$, $(\mathcal{P}_3)$ a pour probabilité* 1 *ou* 0 *suivant que la série $\sum_1^\infty s_i$ converge ou diverge.*

Nous avons déjà remarqué que si les R_n dépendent de lois sous-gaussiennes du même type, les σ_n et τ_n sont proportionnels. Si tous les Φ_n dépendent de la même loi, (b) exclut seulement le cas où Φ_n ne peut prendre que deux valeurs.

7. Majoration du module de continuité de $F(t)$

En se reportant aux formules (8) et (9), on peut obtenir des majorations aussi probables que l'on veut du module de continuité de $F(t)$, quand les hypothèses du théorème 2 sont réalisées.

Ecrivons

$$F(t) = P_{0,\nu}(t) + \sum_{i=0}^\infty P_{\nu_i,\nu_{i+1}}(t),$$

$\{\nu_i\}$ étant une suite croissante telle que $\nu_0 = \nu$, et notons $|P| = \max\limits_t |P(t)|$. On a, pour $h > 0$,

$$V(h) = \max_t |F(t+h) - F(t)| < h|P_{0,\nu}'| + 2\sum_{i=0}^\infty |P_{\nu_i,\nu_{i+1}}|.$$

Or, d'après (9), si nous posons

$$a = 12\Big(\log\nu \cdot \sum_{n=1}^{\nu} n^2\tau_n^2\Big)^{1/2}, \qquad b_i = 12\Big(\log\nu_{i+1} \cdot \sum_{\nu_i+1}^{\nu_{i+1}} \tau_n^2\Big)^{1/2},$$

on a

$$p(|P_{0,\nu}'| < a) > 1 - \frac{4\pi}{\nu^2}, \qquad p(|P_{\nu_i,\nu_{i+1}}| < b_i) > 1 - \frac{4\pi}{\nu_{i+1}^2},$$

de sorte que

$$p\Big(V(h) < ah + 2\sum_0^\infty b_i\Big) > \prod_0^\infty \Big(1 - \frac{4\pi}{\nu_i^2}\Big)^2. \tag{13}$$

Prenons $\nu = 2^{\varkappa}$ de façon que $2^{\varkappa}h \leqslant 16\pi \leqslant 2^{\varkappa+1}h$, et $\nu_i = 2^{2^i+\varkappa-1}$. Alors $ah+2\sum\limits_0^\infty b_i$ est une fonction de h qui majore $V(h)$, avec une probabilité supérieure à $1-h^2$.

Pour obtenir une majoration plus explicite, supposons qu'il existe des constantes β $(0 \leqslant \beta \leqslant 1)$ et γ $(\gamma < -1$ si $\beta = 0)$ telles que, pour tout entier $k > 0$,

$$t_{k-1} = \Big(\sum_{2^{k-1}+1}^{2^k} \tau_n^2\Big)^{1/2} < k^{\gamma}2^{-\beta k}.$$

Supposons de plus $\tau_1 < 1$. Si $\beta < 1$,

$$a < 12\Big(\varkappa\tau_1^2+\varkappa\sum_{k=0}^{\varkappa-1} 2^{2k+2}t_k^2\Big)^{1/2} < C^{te}h^{\beta-1}\Big(\log\frac{1}{h}\Big)^{\gamma+1/2},$$

$$b_i < 12\Big((2^{i+1}+\varkappa)\sum_{k=2^i+\varkappa-1}^{2^{i+1}+\varkappa-2} t_k^2\Big)^{1/2} < C^{te}h^{\beta}\Big(\log\frac{1}{h}\Big)^{\gamma+1/2}2^{2i-\beta 2^i},$$

en désignant par C^{te} des constantes ne dépendant que de β et γ.

Si $\beta = 1$, la première inégalité doit être remplacée par

$$a < C^{te}\Big(\varkappa+\varkappa\sum_{k=1}^{\varkappa} k^{2\gamma}\Big)^{1/2} < C^{te}\Big(\log\frac{1}{h}\Big)^{\gamma_1}$$

avec $\gamma_1 = \frac{1}{2}$ si $\gamma < -\frac{1}{2}$, $\gamma_1 = \gamma+1$ si $\gamma > -\frac{1}{2}$. Si $\beta = 0$ et $\gamma < -1$, la seconde inégalité doit être remplacée par $b_i < C^{te}\big(2^i(2^i+\varkappa)^{2\gamma+1}\big)^{1/2}$ d'où $\sum b_i < C^{te}(\log 1/h)^{\gamma+1}$.

Soit $\Omega(h) = \sup\limits_{0<h'<h} V(h')$ le module de continuité de F. Jointe aux inégalités ci-dessus, (13) s'exprime ainsi.

Théorème 5. *Si $\tau_1 \leqslant 1$ et $t_{k-1} \leqslant k^{\gamma}2^{-\beta k}$ (β et γ constantes, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ et $\gamma < -1$ si $\beta = 0$; $k = 1, 2, \ldots$), il existe une constante c ne dépendant que de β et γ telle qu'on ait, avec une probabilité supérieure à $1-h^2$,*

$$\Omega(h) = \max_{|t-u|\leqslant h} |F(t)-F(u)| < ch^{\beta}\Big(\log\frac{1}{h}\Big)^{\gamma_1}$$

avec $\gamma_1 = \gamma+\frac{1}{2}$ si $0 < \beta < 1$, $\gamma_1 = \gamma+1$ si $\left\{\begin{matrix}\beta=0\\ \gamma<-1\end{matrix}\right\}$ ou $\left\{\begin{matrix}\beta=1\\ \gamma>-\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}$, $\gamma_1 = \frac{1}{2}$ si $\left\{\begin{matrix}\beta=1\\ \gamma<-\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}$.

Remarques. 1. En se reportant à la démonstration de (9), on vérifie facilement que, dans l'énoncé ci-dessus, „probabilité $> 1-h^2$" peut être remplacé par „probabilité $> 1-h^p$" quel que soit l'entier p fixé.

2. Dans le cas du mouvement brownien, $\tau_n = 1/n$; on retrouve le fait connu que, presque sûrement, $\Omega(h) = O(\sqrt{h\log 1/h})$ quand $h \to 0$. On sait d'ailleurs, dans ce cas, que l'ordre de grandeur ne peut pas être amélioré [3].

Le théorème 5 fournit immédiatement une condition suffisante pour que, presque sûrement, $F(t)\in\operatorname{Lip}\alpha$. Rappelons que $F(t)\in\operatorname{Lip}\alpha$ signifie $\Omega(h) = O(h^{\alpha})$ quand $h\to 0$, si $0 < \alpha \leqslant 1$, et $F'(t)\in\operatorname{Lip}(\alpha-1)$, si $\alpha > 1$. Quitte à appliquer le théorème à $F^{(p)}(t)$ au lieu de $F(t)$, on a donc le

Corollaire du théorème 5. *Si*

$$0 < \alpha < \varlimsup_{k\to\infty}\frac{-\log t_k}{k\log 2},$$

on a presque sûrement $F(t)\in\operatorname{Lip}\alpha$ (propriété $(\mathcal{P}_4)$).

8. Minoration du module de continuité en un point

Nous faisons de nouveau les hypothèses (a) et (b) du théorème 3:

(a): $\varlimsup \dfrac{\mathcal{E}(R_n^4)}{\sigma_n^4} < \infty$,

(b): $\inf\limits_{u,n} \mathcal{E}\big(\cos^2(u+\Phi_n)\big) > 0$.

Fixant une valeur de t, nous allons chercher à minorer

$$F(t+h)-F(t) = -2\sum_0^\infty R_n\sin\Big(n\frac{h}{2}\Big)\sin\Big(nt+\Phi_n+\frac{h}{2}\Big).$$

D'après le lemme 3, appliqué en posant

$$Y_n = R_n\sin\Big(n\frac{h}{2}\Big)\sin\Big(nt+\Phi_n+\frac{h}{2}\Big),$$

compte tenu des conditions (a) et (b), il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$p\Big(F(t+h)-F(t) > \frac{\varepsilon}{2}\Big(\sum_1^\infty \sigma_n^2\sin^2 n\frac{h}{2}\Big)^{1/2}\Big) > \varepsilon.$$

Donc, en posant

$$\Delta_k = F\Big(t+\frac{2\pi}{3}2^{-k}\Big)-F(t),$$

on a

$$p\left(\Delta_k > \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{4} s_k\right) > \varepsilon.$$

Quelle que soit la suite $\{k_i\}$, on a donc une probabilité $> \varepsilon$ d'avoir une infinité de fois $\Delta_{k_i} > \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{4} s_{k_i}$.

En faisant des hypothèses convenables sur $\{s_k\}$, on obtient ainsi une sorte de réciproque au théorème 5.

THÉORÈME 6. *On fait les hypothèses* a) *et* b) *du théorème* 3. *Si, pour une infinité de valeurs de* k, *on a* $s_k \geqslant k^\gamma 2^{-\beta k}$ *(β et γ constantes, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$), on a presque sûrement en un point t donné,*

$$\overline{\lim_{h\downarrow 0}} \frac{F(t+h)-F(t-h)}{h^\beta\left(\log\frac{1}{h}\right)^\gamma} > 0.$$

Du théorème 6 on peut tirer une condition nécessaire pour avoir presque sûrement $F(t)\in \operatorname{Lip}\alpha$, de la même façon que nous avons tiré du théorème 5 une condition suffisante. Ces conditions prennent une forme frappante si les suites σ_n et τ_n sont „équivalentes", c'est-à-dire si

$$0 < \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sigma_n}{\tau_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sigma_n}{\tau_n} < \infty.$$

Dans ce cas, on remarque, comme au § 6, que la condition (a) est réalisée.

THÉORÈME 7. *Supposons les deux suites σ_n et τ_n „équivalentes", et* (b): $\inf_{u,n} \mathcal{E}\left(\cos^2(u+\Phi_n)\right) > 0$. *Posons*

$$a^* = \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{-\log s_k}{k\log 2} = \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{-\log t_k}{k\log 2}.$$

La propriété $(\mathcal{P}_4)$, *soit* $F(t)\in \operatorname{Lip}\alpha$, *a pour probabilité* 1 *si* $a < a^*$ *et* 0 *si* $a > a^*$.

On peut faire les mêmes commentaires à la suite de ce théorème qu'à la suite du théorème 4.

Le théorème 6 exprime (au moins pour $\beta < 1$) que, pour chaque t fixé, la fonction F manifeste presque sûrement une certaine irrégularité au point t; en particulier, son nombre dérivé supérieur à droite est $+\infty$. Selon une remarque faite au paragraphe 1, F manifeste presque sûrement cette irrégularité presque partout, et en particulier presque partout ses nombres dérivés supérieurs sont $+\infty$ et ses nombres dérivés inférieurs $-\infty$. En reprenant l'argumentation très simple de P. Lévy ([3], p. 16), on voit que cette propriété ne peut pas avoir lieu partout.

Il est plus difficile d'indiquer une propriété d'irrégularité pour F qui soit presque sûrement valable partout. C'est ce que nous allons faire maintenant, en nous restreignant aux fonctions F, déjà considérées dans l'introduction, dont la série de Fourier est du type (2).

9. Fonctions $F(t)$ gaussiennes et stationnaires. Une caractérisation de la série de Fourier-Wiener

Rappelons que $F(t)$ sera dite gaussienne et stationnaire si 1° pour chaque t, (1) converge presque sûrement vers $F(t)$, 2° pour chaque t, $F(t)$ dépend d'une loi de Gauss et 3° $\sigma(F(t))$ ne dépend pas de t. La première condition entraîne (théorème 1) que $\sum_1^\infty \mathcal{E}\left(\min(1, R_n^2)\right) < \infty$ et que presque sûrement $F\in L^2$. La seconde, d'après la stabilité de la loi de Gauss, entraîne que les coefficients de Fourier de F sont des variables gaussiennes et qu'ainsi (1) est de la forme

$$(13) \qquad \sum_1^\infty (a_n \Xi_n \cos nt + b_n \Xi_n' \sin nt),$$

où Ξ_n et Ξ_n' sont des variables gaussiennes réduites. Inversement, si (1) est de la forme (13), sa somme existe presque sûrement pour chaque t, et dépend d'une loi de Gauss dont le moment quadratique est

$$\mathcal{E}\left(F^2(t)\right) = \sum_1^\infty \mathcal{E}\left((a_n \Xi_n \cos nt + b_n \Xi_n \sin nt)^2\right)$$

$$= \sum_1^\infty \left(a_n^2\cos^2 nt + b_n^2 \sin^2 nt + a_n b_n \sin(2nt)\mathcal{E}(\Xi_n \Xi_n')\right),$$

à condition que la série $\sum_1^\infty (a_n^2+b_n^2)$ converge.

La troisième condition, à savoir que $\mathcal{E}\left(F^2(t)\right)$ ne dépende pas de t, revient à dire que $a_n = \pm b_n$ et que $\mathcal{E}(\Xi_n \Xi_n') = 0$. Dans ce cas, (13) est de la forme

$$(2) \qquad \sum_1^\infty a_n(\Xi_n \cos nt + \Xi_n' \sin nt),$$

les Ξ_n et Ξ_n' étant des variables gaussiennes réduites mutuellement indépendantes. Pour que (1) soit de la forme (2), il faut et suffit que Φ_n soit équiparti sur $(0,\, 2\pi)$ et que $R_n = \sqrt{2}\, a_n(-\log T_n)^{1/2}$, où T_n est équiparti sur $(0,1)$ (voir p. ex. [7], p. 146). Alors les R_n dépendent de la même loi sous-gaussienne, $\sigma_n = \sqrt{2} a_n$ et on peut appliquer les théorèmes 2 à 7.

Nous supposerons désormais (jusqu'au paragraphe 10 exclus) que $F(t)$ est gaussienne et stationnaire, et que (2) est sa série de Fourier. Nous posons

$$\mathcal{E}(F^2) = \mathcal{E}\big(F^2(t)\big) = \sum_1^\infty a_n^2 \quad \text{et} \quad \sigma(F) = \mathcal{E}^{1/2}(F^2).$$

Nous utiliserons, au prochain paragraphe, le lemme suivant:

Lemme 5. *Soit $F_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ des polynômes trigonométriques gaussiens stationnaires, indépendants, de degré $\leqslant q$. Si nous supposons $q > 100\, k$ et $0 < 2\alpha < q^{-1/k}$, la probabilité qu'existe une valeur T pour laquelle $|F_i(T)| < \alpha\sigma(F_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$ ne dépasse pas $1/k$.*

Démonstration. D'après la formule (9), p. 7, la probabilité d'avoir $|F_i(t)| < 12\sqrt{\log q}\,\sigma(F_i)$ pour tout t et tout i dépasse $1 - 4\pi k/q^2$. Plaçons nous dans ce cas, et supposons qu'existe un T comme dans l'énoncé. D'après le théorème de S. Bernstein, déjà utilisé au paragraphe 4, il existe au moins un point $T_N = 2\pi N/q'$, avec $q' = [24\pi q\sqrt{\log q}/\alpha]$, N entier, tel que, pour tout i, $|F_i(T_N)| < 2\alpha\sigma(F_i)$. La probabilité pour qu'il en soit ainsi ne dépasse pas $q'(4\alpha/\sqrt{2\pi})^k$. La probabilité cherchée ne dépasse donc pas

$$\frac{4\pi k}{q^2} + q'\left(\frac{4\alpha}{\sqrt{2\pi}}\right)^k < \frac{1}{k}.$$

Si $a_n = 1/n$, (2) est la série que M. P. Lévy appelle *série de Fourier-Wiener*. Elle jouit, parmi les fonctions gaussiennes stationnaires d'une propriété caractéristique simple, que nous indiquons bien qu'elle soit sans rapport direct avec notre étude des propriétés locales.

Théorème 8. *On considère les accroissements*

$$\Delta(t,\, h) = F\left(t + \frac{h}{2}\right) - F\left(t - \frac{h}{2}\right) + h\Xi$$

de $F(t) + t\Xi$, où $F(t)$ est gaussienne et stationnaire, et Ξ une variable centrée indépendante des Ξ_n et Ξ_n'. Pour que, h étant donné, les accroissements $\Delta(t,h)$ et $\Delta(u,h)$ soient indépendants dès que $\cos(u-t) \geqslant \cos h$, il faut et il suffit que (2) soit somme de la série de Fourier-Wiener et de termes h-périodiques.

Démonstration. $\Delta(t,h)$ étant une variable gaussienne, l'indépendance s'exprime par $\mathcal{E}\big(\Delta(t,h)\Delta(u,h)\big) = 0$. Or

$$\Delta(t,\, h) \sim \Xi h + 2\sum_1^\infty a_n \sin\frac{nh}{2}(-\Xi_n \sin nt + \Xi_n' \cos nt),$$

$$\mathcal{E}\big(\Delta(t,\, h)\Delta(u,\, h)\big) = h^2 + 4\sum_1^\infty a_n^2 \sin^2\frac{nh}{2}\cos n(t-u) = \varphi(t-u),$$

et $\varphi(t)$ est le produit de convolution des distributions de Schwartz définies par

$$\varphi_1(t) = h^2 + 4\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}\sin^2\frac{nh}{2}\cos nt, .$$

$$\psi(t) \sim 1 + 2\sum_1^\infty n^2 a_n'^2 \cos nt,$$

avec $a_n' = a_n$ quand $\sin nh/2 \neq 0$. $\varphi_1(t)$ a pour support $[-h,\, +h]$. D'après le théorème des supports (voir p. ex. [6]; un raisonnement élémentaire est possible ici), le fait que $\varphi(t)$ s'annule hors de $(-h,\, h)$ entraîne, pour un choix convenable des a_n', que $\psi(t)$ a pour support l'origine, donc (le premier coefficient étant 1) que c'est la mesure de Dirac, et $na_n' \equiv 1$.

10. Irrégularité locale des fonctions gaussiennes stationnaires

Soit $\eta(x)$ une fonction réelle, paire, indéfiniment dérivable, égale à 1 sur un intervalle ouvert contenant $[4,8]$ et nulle pour $|x| \notin [3,9]$. Considérons le noyau

$$q_\nu(t) = 2\sum_{n=3\nu}^{9\nu} \eta\left(\frac{n}{\nu}\right)\cos nt.$$

En écrivant (formule de Poisson)

$$q_\nu(t) = \nu\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\eta}(\nu t + 2k\pi),$$

où $\hat{\eta}(u)$ est la transformée de Fourier de $\eta(x)$, on voit que

$$\int_0^\pi |q_\nu(t)|\, dt \leqslant \int_0^\infty |\hat{\eta}(u)|\, du = c, \tag{14}$$

et

$$\int_\varepsilon^\pi |q_\nu(t)|\, dt \leqslant \int_{\nu\varepsilon}^\infty |\hat{\eta}(u)|\, du.$$

Comme, d'après l'hypothèse de dérivabilité faite sur $\eta(x)$, $\hat{\eta}(u)$ tend vers zéro à l'infini plus vite que toute fraction rationnelle, il existe, pour tout p, une constante c_p telle que

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} |q_\nu(t)|\,dt \leqslant c_p(\nu\varepsilon)^{-p}. \tag{15}$$

Associons à la fonction $F(t)$ des polynômes trigonométriques

$$G_\nu(t) = F * q_\nu(t) = \sum_{1}^{\infty} a_n \eta\left(\frac{n}{\nu}\right)(\Xi_n \cos nt + \Xi' \sin nt).$$

Nous utiliserons le lemme suivant:

LEMME 6. *Posons* $\Omega_t(h) = \max_{0\leqslant u\leqslant h} |F(t+u)-F(t)|$ *et* $\Omega(h) = \max_t \Omega_t(h)$. *Pour tout* t *et tout* h, *on a*

$$|G_\nu(t+2h) - G_\nu(t+h)| < 4c\Omega_t(3h) + 2c_p(\nu h)^{-p}\Omega(h).$$

La démonstration est immédiate, moyennant (14) et (15), en écrivant

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big(F(t+2h+u) - F(t+h+u)\big) q_\nu(u)\,du$$

sous la forme

$$\int_{|u|<h} + \int_{h\leqslant u<\pi}.$$

Nous allons maintenant montrer, moyennant des hypothèses convenables sur la suite

$$s_i = \Big(\sum_{2^i+1}^{2^{i+1}} \sigma_n^2\Big)^{1/2} = \sqrt{2}\Big(\sum_{2^i+1}^{2^{i+1}} a_n^2\Big)^{1/2},$$

que $F(t)$ manifeste presque sûrement partout une certaine irrégularité.

THÉORÈME 9. *$F(t)$ étant définie par la série (2), supposons qu'existent des constantes c', c'', β, γ, γ_1 ($0\leqslant\beta\leqslant 1$, $\gamma_1 < -1$ si $\beta = 0$) telles que $c'k^{\gamma}2^{-\beta k} < s_{k-1} < c''k^{\gamma_1}2^{-\beta k}$ pour $k = 1, 2, \ldots$ Alors on a presque sûrement*

$$\overline{\lim_{h\downarrow 0}} \frac{|F(t+h)-F(t)|}{h^\beta(\log 1/h)^{\gamma'}} = \infty \quad \textit{pour tout } t$$

dès que $\gamma' < \gamma$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'existe presque sûrement un T (dépendant de F) tel que $\Omega_T(h) = O\big(h^\beta(\log 1/h)^{\gamma'}\big)$ quand $h\to 0$. Fixons $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Avec une probabilité $> 1-\varepsilon$, on a $\Omega_T(h) < C^{te}h^\beta(\log 1/h)^{\gamma'}$ et, d'après le théorème 5, $\Omega(h) < C^{te}h^\beta(\log 1/h)^{\gamma_2}$, γ_2 égalant, selon les cas, $\gamma_1+\frac{1}{2}$, ou γ_1+1, ou $\frac{1}{2}+\varepsilon$.

A chaque entier naturel i nous associons l'entier $\mu = [4^i i^{-\varepsilon}]$, $h = \pi\mu^{-1}$, l'entier ν défini par

$$\nu = 4^i \quad \text{si} \quad \sum_{n=2^{2i+2}+1}^{2^{2i+3}} a_n^2 \sin^2\frac{nh}{2} \leqslant \frac{1}{4}s_{2i+2}^2,$$

$$\nu = 4^i+\mu \quad \text{si} \quad \sum_{n=2^{2i+2}+1}^{2^{2i+3}} a_n^2 \cos^2\frac{nh}{2} < \frac{1}{4}s_{2i+2}^2,$$

et le polynôme aléatoire

$$H_i(t) = G_\nu(t+2h) - G_\nu(t+h).$$

$H_i(t)$ est un polynôme trigonométrique gaussien stationnaire, de degré $\leqslant 4^{i+3}$ et dont l'écart du type

$$\sigma(H_i) = 2\left(\sum_n a_n^2\eta^2\left(\frac{n}{\nu}\right)\sin^2\frac{nh}{2}\right)^{1/2}$$

satisfait pour $i > i_0$ assez grand (d'après la définition de ν) $\sigma(H_i) > s_{2i+2}$. Quitte à choisir i_0 assez grand, les spectres des $H_i(t)$ sont disjoints deux à deux, ce qui montre l'indépendance en bloc des $H_i(t)$. En posant $F_i(t) = H_{i+i_0}(t)$, et $q = 4^{i+i_0+3}$, on pourra donc appliquer le lemme 5.

Revenons aux hypothèses faites au début de la démonstration; d'après le lemme 6, appliqué en prenant $t = T$ et $p = [(\gamma_2-\gamma')/\varepsilon)]$, il existe, avec une probabilité $> 1-\varepsilon$, un T tel que

$$|H_i(T)| < C^{te}h^\beta(\log 1/h)^{\gamma'} < C^{te}4^{-\beta i}i^{\gamma'+2\varepsilon}$$

pour tout i; quitte à choisir ν assez petit et i_0 assez grand, cette inégalité entraîne $|F_i(T)| < \frac{1}{10}s_{2i+2i_0+2} < \frac{1}{10}\sigma(F_i)$ pour tout i. Mais d'après le lemme 5, la probabilité pour qu'existe une telle valeur de T est nulle. D'où la contradiction, qui démontre le théorème.

Pour la fonction du mouvement brownien, $a_n = 1/n$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 0$, l'énoncé du théorème 9 dans ce cas améliore le résultat de Paley-Wiener ([7], p. 158), selon lequel on a presque sûrement, en tout point t,

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{|F(t+h)-F(t)|}{|h|^\alpha} = \infty$$

dès que $\alpha > \frac{1}{2}$.

Sous des hypothèses beaucoup moins restrictives que celles du théorème 9, on a le résultat suivant:

THÉORÈME 10. *On considère $F(t)$ définie par la série* (2). *Si*

$$a > \varlimsup_{k\to\infty} \frac{-\log s_k}{k\log 2},$$

on a presque sûrement

$$\varlimsup_{h\downarrow 0} \frac{|F(t+h)-F(t)|}{h^a} = \infty \quad \textit{pour tout } t \ (\textit{propriété } (\mathcal{P}_5)).$$

Démonstration. On peut supposer $F(t)$ presque sûrement bornée; sinon en effet, sur chaque intervalle, $F(t)$ est presque sûrement non-bornée (puisque $F(t)$ et ses translatées, d'après l'équipartition des phases Φ_n, ont mêmes propriétés presque sûres), donc $F(t)$ est presque sûrement non-bornée sur chaque intervalle à extrémités rationnelles, et la conclusion est valable. On peut encore raisonner par l'absurde comme dans la démonstration du théorème 9, en ayant ici, avec une probabilité $>1-\varepsilon$, $\Omega_T(h) < C^{te}h^a$ et $\Omega(h) < C^{te}$; on définit $\mu = 4^{pi/(p+a)}$, puis h, ν, $H_i(t)$, $F_i(t)$ comme dans ladite démonstration; le lemme 6 entraîne l'existence, avec une probabilité $>1-\varepsilon$, d'un T tel que $|F_i(T)| < C^{te}4^{-aip/(p+a)}$; quitte à choisir p assez grand, cela entraîne, pour i assez grand, $|F_i(T)| < \frac{1}{10}\sigma(F_i)$, et le lemme 5 conduit à une contradiction.

Le théorème 10 admet encore comme cas particulier le théorème de Paley-Wiener cité plus haut.

11. Extension des résultats précédents

L'extension peut se faire dans deux directions.

a) *Séries de Fourier presque-périodiques*. Au lieu de (1) et (2), on peut considérer des séries

$$\sum_1^\infty R_n \cos(\omega_n t+\Phi_n), \tag{16}$$

$$\sum_1^\infty a_n(\Xi_n \cos\omega_n t + \Xi_n \sin\omega_n t), \tag{17}$$

où les fréquences ω_n forment une suite positive donnée quelconque, les R_n, Φ_n, a_n, Ξ_n et Ξ_n' ayant le même sens que dans l'introduction.

On vérifie facilement que les théorèmes 3, 6 et 10 (c.-à-d. les théorèmes d'irrégularité locale) restent valables, à condition de modifier la définition de s_i et de t_i de la manière suivante:

$$\sigma_n = \sigma(R_n), \qquad s_i^2 = \sum_{2^i<\omega_n\leqslant 2^{i+1}} \sigma_n^2,$$

$$\tau_n = \tau(R_n), \qquad t_i^2 = \sum_{2^i<\omega_n\leqslant 2^{i+1}} \tau_n^2.$$

Par contre, les résultats exprimant la régularité locale, qui dépendent de la formule (9), ne sont plus valables, à moins de faire des hypothèses sur la nature arithmétique des ω_n. Si les ω_n sont rationnellement indépendantes, la condition nécessaire et suffisante de continuité presque sûre est $\sum_1^\infty \mathcal{E}\big(\min(1, R_n)\big) < \infty$ resp. $\sum_1^\infty a_n < \infty$ (voir théorème 1), qui est beaucoup plus stricte que la condition du théorème 2.

On obtient, précisément, des résultats faisant intervenir la nature arithmétique des ω_n par l'intermédiaire d'une autre extension, que nous indiquons maintenant.

b) *Séries de Fourier à une infinité de variables*. Au lieu de (1), nous considérons des séries

$$\sum R_{n_1,n_2,\ldots}\cos(n_1u_1+n_2u_2+\ldots+\Phi_{n_1,n_2,\ldots}), \tag{18}$$

où la sommation est étendue à toutes les suites d'entiers $\geqslant 0$ $(n_1, n_2, \ldots)$ n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls. Les $R_{n_1,n_2,\ldots}$ et les $\Phi_{n_1,n_2,\ldots}$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes. $R_{n_1,n_2,\ldots}\geqslant 0$ et $\mathcal{E}(\cos\Phi_{n_1,n_2,\ldots}) = \mathcal{E}(\sin\Phi_{n_1,n_2,\ldots}) = 0$. On pose $\tau_{n_1,n_2,\ldots} = \tau(R_{n_1,n_2,\ldots})$ et on désigne par $F(u_1, u_2, \ldots)$ la fonction continue sur l'hypercube $(0, 2\pi)\times(0, 2\pi)\times\ldots$, si elle existe, dont (18) est la série de Fourier.

Le lemme fondamental est le suivant:

LEMME 7. *Soit $P(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une somme finie du type* (18), *ne faisant intervenir que les variables $u_1, u_2, \ldots, u_p$ et les suites $(n_1, n_2, \ldots, n_p)$ telles que $|n_1|+|n_2|+\ldots+|n_p| \leqslant \nu$ (ν = degré de P). La probabilité pour avoir*

$$\sup_{u_1,\ldots,u_p} |P(u_1, u_2, \ldots, u_p)| > 6\Big(p\log\nu \sum \tau^2_{n_1,n_2,\ldots,n_p}\Big)^{1/2}$$

est inférieure à $(4\pi/\nu)^p$.

Ce lemme se démontre comme la formule (9), en appliquant le théorème de S. Bernstein à un polynôme trigonométrique à plusieurs variables (nous avons déjà donné ce lemme, et sa démonstration, dans le cas où les R sont fixés et les Φ ne prennent que les valeurs 0 et π [2]).

Du lemme 7 on peut tirer des énoncés analogues aux théorèmes 2 et 5, c'est-à-dire des conditions suffisantes pour la réalisation presque sûre de propriétés de régularité locale de $F(u_1, u_2, \ldots)$. Ainsi:

THÉORÈME 11. *Supposons que* (18) *puisse s'écrire comme somme infinie* $\sum_{j=1}^{\infty}$ *de sommes finies* $\sum^{(j)}$, *chaque* $\sum^{(j)}$ *étant un polynôme à* p_j *variables et de degré* ν_j. *Si l'on a*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\Big(p_j \log \nu_j \sum\nolimits^{(j)} \tau^2_{n_1,n_2,\ldots}\Big)^{1/2} < \infty,$$

(18) *est presque sûrement la série de Fourier d'une fonction continue.*

Si maintenant on pose $u_p = \lambda_p t$, $\{\lambda_p\}$ étant une suite réelle donnée, si à chaque suite $(n_1, n_2, \ldots)$ on associe biunivoquement un entier n, et qu'on pose $n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + \ldots = \omega_n$, le théorème 11 exprime une condition suffisante pour que, presque sûrement, la série (16) représente une fonction continue.

Même dans le cas où les ω_n sont entiers (c.-à-d. où, aux notations près, (16) est une série du type (1)), l'application du théorème 11 peut donner des résultats nouveaux. Bornons nous à un exemple simple. Soit $\{\lambda_p\}$ une suite lacunaire dans le sens que $\lambda_{p+1} > \nu\lambda_p$ (ν entier, $p = 1, 2, \ldots$) et soit $\{\omega_n\}$ la somme directe de ν suites identiques à $\{\lambda_p\}$ (soit $\omega_n = \lambda_{p_1} + \ldots + \lambda_{p_\nu}$, n étant fonction biunivoque de la combinaison, *non ordonnée*, $(p_1, \ldots, p_\nu)$). Pour que (16) représente presque sûrement une fonction continue, il suffit que $\sum_{j=1}^{\infty}\Big(2^j \sum_{\lambda_{2^j} < \omega_n \leqslant \lambda_{2^{j+1}}} \tau_n^2\Big)$ converge. Un tel résultat n'est pas contenu dans le théorème 2. Compte tenu de l'extension du théorème 3 aux séries (16), on obtient un énoncé du type du théorème 4.

THÉORÈME 12. *Soit* $\{\omega_n\}$ *la somme directe de* ν *suites identiques à une suite lacunaire* $\{\lambda_p\}$ ($\lambda_{p+1} > \nu\lambda_p$, $p = 1, 2, \ldots$). *On suppose*

(b) $\inf_{u,n} \mathcal{E}\big(\cos^2(u + \Phi_n)\big) > 0$,

(c) *que les suites* $\sigma_n = \sigma(R_n)$ *et* $\tau_n = \tau(R_n)$ *sont „équivalentes"* ($0 < \underline{\lim}\, \sigma_n/\tau_n < \overline{\lim}\, \sigma_n/\tau_n < \infty$),

(d) *que la suite*

$$s_i^* = \Big(\sum_{\lambda_i \leqslant \omega_n \lambda_{i+1}} \sigma_n^2\Big)^{1/2}$$

est équivalente à une suite décroissante.

Alors (16) *représente une fonction continue resp. bornée avec une probabilité* 1 *ou* 0, *suivant que la série* $\sum_1^{\infty} s_i^*$ *converge ou diverge.*

Travaux cités

[1] J. L. Doob, *Stochastic processes*, 1953.

[2] J. P. Kahane, *Généralisation d'un théorème de S. Bernstein*, Bull. Soc. Math. France 85 (1957), p. 221-229.

[3] P. Lévy, *Le mouvement brownien*, Mémorial des Sc. Math. 126 (1954).

[4] — *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Paris 1937.

[5] — *Processus stochastique et mouvement brownien*, Paris 1948.

[6] J. L. Lions, *Supports de produits de composition*, C. R. A. S. 232 (1951), p. 1530-1532. J. G. Mikusiński, *A new proof of Titchmarsh's theorem on convolution*, Studia Math. 13 (1953), p. 56-58.

[7] R. E. A. C. Paley et N. Wiener, *Fourier transforms in the complex domain*, Colloquium 1934.

[8] R. E. A. C. Paley et A. Zygmund, *On some series of functions*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 26 (1930), p. 337-357; p. 458-474 et 28 (1932), p. 190-205.

[9] R. Salem et A. Zygmund, *Some properties of trigonometrical series whose terms have random signs*, Acta Mathem. 91 (1954), p. 245-301.

[10] A. Zygmund, *Trigonometric series*, second edition, Cambridge 1959, tome I.

Reçu par la Rédaction le 4. 2. 1959