ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
X (1961)

Contact d'une courbe régulière avec la sphère osculatrice, en un point d'inflexion

par T. Rachwał (Kraków)

Introduction. Dans le travail *L'ordre du contact d'une courbe régulière avec la sphère osculatrice*, Ann. Polon. Math. 5 (1958), p. 33-43, j'ai établi quelques théorèmes sur l'ordre q de la distance d'un point d'une courbe régulière (dans l'espace euclidien R_3) à la sphère osculatrice en un point d'inflexion.

Ces théorèmes déterminent exactement l'ordre q dans certains cas et, dans d'autres, ils fournissent une borne inférieure; ils ne donnent donc pas la solution complète du problème.

Les difficultés dans la détermination de l'ordre q résultaient de la méthode appliquée; elles consistaient en ce qu'on étudiait d'abord la structure des coordonnées ${}_{(n)}L$, ${}_{(n)}M$, ${}_{(n)}N$ du vecteur $\boldsymbol{t}^{(n)}$ dans le système local de Frenet $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ de la courbe [1] et on en tirait ensuite une conclusion sur l'ordre q.

Dans le présent travail je démontre, en m'appuyant sur un procédé suggéré par E. Čech, un théorème qui, avec le résultat du travail mentionné, constitute une solution complète du problème considéré.

Sur la courbe C donné par l'équation

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$$

où s est un arc, nous supposons que

$$(\mathrm{Z})\quad \begin{cases} 1.\ \boldsymbol{r}(s) \text{ admet des dérivées de tous les ordres dans l'intervalle} \\ \quad\ \text{non vide } \omega(s_1, s_2)\,, \\ 2.\ \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'' \neq \boldsymbol{0} \text{ dans cet intervalle.} \end{cases}$$

Le vecteur $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(s_0)$ détermine le point M_0 sur la courbe C, s_0 appartient à ω et le vecteur $\boldsymbol{v}_0$ détermine le centre de la sphère K osculatrice à C au point M_0.

---

[1] T. Rachwał, *Współrzędne n-tej pochodnej wektora stycznego krzywej*, Zeszyty Naukowe AGH, nr 17, Geodezja, Z. 2, 1959 r.

Remarque 1. D'après la théorie du contact, l'étude de l'ordre du contact d'une courbe avec la sphère tangente se ramène à celle des valeurs des dérivées successives de la fonction au point s_0

$$F(s) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \tfrac{1}{2}[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}_0)^2-(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{v}_0)^2] \tag{1}$$

L'ordre q de la distance infinitésimale d'un point M de la courbe de la sphère tangente à cette courbe au point en question, est égal à l'ordre de la dérivée de la fonction $F(s)$ qui, la première, ne s'annule pas au point s_0.

Nous introduisons les fonctions suivantes:

$$f_1(s) = \big(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{v}_0\big)\cdot\boldsymbol{t}(s)\,, \tag{2}$$

$$f_2(s) = \big(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{v}_0\big)\cdot\boldsymbol{n}(s)\,, \tag{3}$$

$$f_3(s) = \big(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{v}_0\big)\cdot\boldsymbol{b}(s)\,. \tag{4}$$

Il est évident que l'on a:

$$F'(s) = f_1(s)\,. \tag{5}$$

Nous désignerons par $\Phi(s)$ la fonction scalaire suivante:

$$\Phi(s) = -\begin{vmatrix} k' & k & 0 & 0 & 0 \\ k'' & 2k' & k & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \tau' & \tau \\ -\tau & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \tag{6}$$

où k et τ sont respectivement la courbure et la torsion de la courbe C; par des virgules suscrites (k', k'', τ'') on désignera la différentiation par rapport à l'arc s.

L'ordre du contact d'une courbe régulière avec la sphère osculatrice. THÉORÈME. *Si $p \geqslant 4$ et si la courbe C remplit les conditions suivantes*:

1. *elle satisfait aux hypothèses* (Z)

et il existe sur C un point M_0 tel que, pour $s_0 \in \omega$, on a:

2. $k_0^{(i)} = k_{(s_0)}^{(i)} = 0$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, p-3$,
3. $\tau_0^{(i)} = \tau_{(s_0)}^{(i)} = 0$ *pour* $i = 0, 1, \ldots, p-4$,
4. $\tau_0^{(p-3)} \neq 0$,
5. *le centre de la sphère osculatrice à C en M_0 a dans le système local $(\boldsymbol{n}_0, \boldsymbol{b}_0)$ les coordonnées α, β*:

$$\alpha = \frac{1}{k_0}, \quad \beta = \frac{-k_0^{(p-2)}}{k_0^2\cdot\tau_0^{(p-3)}}$$

et si, en outre,

6. *$\Phi(s)$ est infiniment petite dans un voisinage de s_0 d'ordre ϱ, où $\varrho \geqslant 2(p-3)$,*

alors l'ordre du contact est $q = \varrho - p - 5$.

Remarque 2. Ce théorème est un complément du théorème 1 du travail cité dans l'introduction. Avec les même hypothèses que plus haut on y a démontré (p. 3, 8, cas IV) que l'ordre considéré q est plus grand que n: $q > n$; nous allons maintenant déterminer exactement le nombre q.

Démonstration. Nous trouverons d'abord l'équation différentielle du 3e ordre que vérifie la fonction $f_1(s)$.

Nous différentions (2) trois fois, (3) deux fois, (4) une fois et nous obtenons:

$$\begin{matrix} kf_2+(1-f_1') = 0\,, & (kf_2)''-f_1''' = 0\,, & -f_2''+(\tau f_3)'-(kf_1)' = 0\,, \\ (kf_2)'-f_1'' = 0\,, & -f_2'+\tau f_3-kf_1 = 0\,, & -\tau f_2-f_3' = 0 \end{matrix} \tag{7}$$

d'où, en éliminant les fonctions: $f_2, f_2', f_2'', f_3, f_3'$, nous obtenons l'équation différentielle de $f_1(s)$ sous la forme

$$\begin{vmatrix} k & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-f_1' \\ k' & k & 0 & 0 & 0 & -f_1'' \\ k'' & 2k' & k & 0 & 0 & -f_1''' \\ 0 & -1 & 0 & \tau & 0 & -kf_1 \\ 0 & 0 & -1 & \tau' & \tau & -(kf_1)' \\ -\tau & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

ou, en développant suivant les éléments de la dernière colonne, on aura:

$$C_3f_1'''+C_2f_1''+C_1f_1'+C_0f = \Phi(s) \tag{9}$$

où les coefficients C_j, $j = 0, 1, 2, 3$, sont:

$$C_3 = -k^2\tau\,, \tag{10}$$

$$C_2 = 2kk'\tau+k^2\tau'\,, \tag{11}$$

$$C_1 = \Phi(s)+k^4\tau\,, \tag{12}$$

$$C_0 = k^4\tau'-k^3k'\tau\,. \tag{13}$$

En nous basant sur le théorème 1 du travail cité nous avons, avec nos lemmes sur la fonction $f_1(s)$,

$$f_1(s_0) = f_1'(s_0) = \ldots = f_1^{(p-1)}(s_0) = 0\,. \tag{14}$$

Nous divisons l'équation (9) par $(s-s_0)^{2(p-3)}$

$$\frac{C_3f_1'''+C_2f_1''+C_1f_1'+C_0f_1}{(s-s_0)^{2(p-3)}} = \frac{\Phi(s)}{(s-s_0)^{2(p-3)}}\,. \tag{15}$$

Il est facile de démontrer que l'on a:

$$
(16)\qquad
\begin{aligned}
&\lim_{s\to s_0}\frac{C_3f_1'''}{(s-s_0)^{2(p-3)}} = -\frac{k_0^2\tau_0^{(p-3)}\cdot f_1^{(p)}(s_0)}{\{(p-3)!\}^2}\,,\\
&\lim_{s\to s_0}\frac{C_2f_1''}{(s-s_0)^{2(p-3)}} = \frac{k_0^2\tau_0^{(p-3)}\cdot f_1^{(p)}(s_0)}{(p-4)!\,(p-2)!}\,,\\
&\lim_{s\to s_0}\frac{C_1f_1'}{(s-s_0)^{2(p-3)}} = \lim_{s\to s_0}\frac{C_0f_1}{(s-s_0)^{2(p-3)}} = 0\,.
\end{aligned}
$$

De (15), en tenant compte de (16), nous obtenons:

$$
(17)\qquad \lim_{s\to s_0}\frac{\Phi(s)}{(s-s_0)^{2(p-3)}} = -\frac{k_0^2\cdot\tau_0^{(p-3)}\cdot f_1^{(p)}(s_0)}{\{(p-3)!\}^2(p-2)}\,.
$$

De (6) on tire

$$
\Phi(s) = \begin{vmatrix} k' & k\tau \\ k''-k\tau^2 & 2k'\tau+k\tau' \end{vmatrix}
$$

$$
= k'(2k'\tau+k\tau)-k\tau(k''-k\tau^2) = 2k'^2\tau+kk'\tau-k\tau k''+k^2\tau^3\,.
$$

Il est évident que $\Phi(s)$ est infiniment petite dans un voisinage de s_0 et que l'ordre est déterminé par la fonction

$$
\psi(s) = k(k'\tau-k''\tau)\,.
$$

Après avoir différentié successivement $\psi(s)$ et calculé les valeurs de ces dérivées en s_0 nous constatons que

$$
\psi^{(j)}(s_0) = 0 \qquad \text{pour} \qquad j = 1, \ldots, 2(p-3)-1\,,
$$

donc l'ordre de la fonction infiniment petite $\psi(s)$ dans un voisinage de s_0 est plus grand que $2(p-3)-1$.

Donc, si $\Phi(s)$ est infiniment petite d'ordre $2(p-3)$, dans un voisinage de s_0 on a

$$
(18)\qquad \lim_{s\to s_0}\frac{\Phi(s)}{(s-s_0)^{2(p-3)}} \neq 0
$$

et, en se basant sur (17), on obtient

$$
(19)\qquad f_1^{(p)}(s_0) \neq 0\,.
$$

En s'appuyant sur (5) et sur la remarque 1 on trouve

$$
q = p+1\,.
$$

Cependant, si $\Phi(s)$ est infiniment petite d'ordre $2(p-3)+1$ dans un voisinage de s_0 on a

$$
(20)\qquad \lim_{s\to s_0}\frac{\Phi(s)}{(s-s_0)^{2(p-3)}} = 0
$$

et, en utilisant (17),

$$
f_1^{(p)}(s_0) = 0
$$

et dans ce cas nous devons calculer $f_1^{(p+1)}(s_0)$.

Raisonnant de même que dans le cas précédent, nous obtiendrons

$$
(21)\qquad \lim_{s\to s_0}\frac{\Phi(s)}{(s-s_0)^{2(p-3)+1}} = -2\frac{k_0^2\tau_0^{(p-3)}\cdot f_1^{(p+1)}(s_0)}{(p-4)!\,(p-2)!}\,,
$$

donc $f_1^{(p+1)}(s_0) \neq 0$ et l'ordre $q = p+2$.

Un raisonnement par induction dans le cas où la fonction $\Phi(s)$ est infiniment petite d'ordre $\varrho \geqslant 2(p-3)$ dans un voisinage de s_0 donne

$$
(22)\qquad f_1^{(\varrho-p-6)}(s_0) = 0\,,
$$

donc l'ordre est $q = \varrho-p-5$ et par suite le théorème se trouve démontré.

Reçu par la Rédaction le 30. 3. 1960