et en supposant que $\vartheta \neq v/y_2$, nous obtiendrons pour $\varkappa$ l'expression:

$$\varkappa = \frac{\vartheta v + y_3}{\vartheta y_2 - v}.$$

Maintenant, à partir du système (13'), nous pouvons calculer α^2 et β^2, qui s'expriment par les formules:

$$\alpha^2 = \frac{t \operatorname{sg} y_2}{m(\vartheta)}, \qquad \beta^2 = \frac{(\vartheta y_2 - v)^2 \operatorname{sg} y_2}{t m(\vartheta)},$$

où

$$m(\vartheta) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \vartheta^2 y_2 - 2\vartheta v - y_3 .$$

D'après (14) on a:

$$m(\vartheta) \neq 0 \qquad \text{pour} \qquad -\infty < \vartheta < \infty ,$$

et par suite:

$$\operatorname{sg} m(\vartheta) = \operatorname{sg} y_2 .$$

Les expressions:

$$\alpha = -\sqrt{\frac{t}{|m(\vartheta)|}}, \qquad \beta = (\vartheta y_2 - v)\sqrt{\frac{1}{t|m(\vartheta)|}}, \qquad \varkappa = \frac{\vartheta v + y_3}{\vartheta y_2 - v}$$

(ϑ quelconque, mais $\vartheta \neq v/y_2$), satisfont donc au système d'équations (13') ainsi qu'à la condition

$$\Delta = \alpha\beta(\varkappa - \vartheta) = \operatorname{sg} y_2 = \pm 1 .$$

Notre théorème se trouve ainsi démontré.

La décomposition de l'espace X_4 en domaines de transitivité $D(c_1, c_2)$ et $\boldsymbol{x}^\circ(c_1)$ peut donc être représentée sous la forme suivante:

$$X_4 = \sum_{-\infty < c_1 < \infty} \boldsymbol{x}^\circ(c_1) + \sum_{\substack{-\infty < c_1 < \infty \\ -\infty < c_2 < \infty}} D(c_1, c_2) , \tag{15}$$

où

$$\left\{\begin{array}{ll} \boldsymbol{x}^\circ(c_1): & \begin{cases} x_2 = x_3 = 0 , \\ x_1 = x_4 = \dfrac{c_1}{2}, \quad -\infty < c_1 < \infty , \end{cases} \\[2ex] D(c_1, c_2): & \left.\begin{cases} x_1 + x_4 = c_1 , & -\infty < c_1 < \infty \\ x_1 x_4 - x_2 x_3 = c_2 , & -\infty < c_2 < \infty \end{cases}\right\} \quad c_2 \neq \dfrac{c_1^2}{4} , \\[2ex] D\left(c_1, \dfrac{c_1^2}{4}\right): & \begin{cases} x_1 + x_4 = c_1 , \\ x_1 x_4 - x_2 x_3 = \dfrac{c_1^2}{4}, \quad -\infty < c_1 < \infty , \\ (x_1 - x_4)^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0 . \end{cases} \end{array}\right. \tag{16}$$

Reçu par la Rédaction le 10. 5. 1960

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
X (1961)

Sur les domaines de transitivité du groupe de transformations des composantes d'un tenseur covariant du second ordre

par E. Siwek (Kraków)

§ 1. Introduction. Dans la note [1] nous avons considéré la notion générale de décomposition d'un espace d'objets géométriques d'un type donné en domaines de transitivité, ainsi que la décomposition dans le cas particulier où l'objet géométrique est un tenseur mixte de l'espace à deux dimensions.

Le but de la présente note est d'étudier le cas d'un tenseur covariant $a_{\lambda\mu}$ du second ordre de l'espace à deux dimensions. Dans le cas d'un tenseur contravariant la méthode et les résultats sont tout à fait analogues.

§ 2. Un tenseur $a_{\lambda\mu}$ de l'espace à deux dimensions (c'est-à-dire les indices parcourent les valeurs: $\lambda = 1, 2$; $\mu = 1, 2$) possède quatre composantes dont la matrice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

se transforme, dans un changement du système de coordonnées, d'après la formule:

$$a_{\lambda'\mu'} = A^{\lambda}_{\lambda'} A^{\mu}_{\mu'} a_{\lambda\mu} . \tag{1}$$

($A^{\lambda}_{\lambda'} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \partial\xi^{\lambda}/\partial\xi^{\lambda'}$, où ξ^{λ} sont les coordonnées d'un point de l'espace dans lequel nous considérons le tenseur $a_{\lambda\mu}$ et $\xi^{\lambda'}$ sont les coordonnées du même point dans le nouveau système).

Admettons les notations suivantes:

$$x_1 = a_{11} , \quad x_2 = a_{12} , \quad x_3 = a_{21} , \quad x_4 = a_{22} , \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) ,$$
$$\alpha = A^1_{1'} , \quad \beta = A^1_{2'} , \quad \gamma = A^2_{1'} , \quad \delta = A^2_{2'} , \qquad W(\boldsymbol{x}) = x_1 x_4 - x_2 x_3 ,$$

et considérons l'espace X_4 (dit espace des composantes du tenseur $a_{\lambda\mu}$) de tous les points $\boldsymbol{x}$ de coordonnées *réelles* $x_1, \ldots, x_4$. Soient

$$\Delta \stackrel{\mathrm{df}}{=} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2}$$

et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des nombres réels; alors la formule (1) définit un groupe G de transformations dans l'espace X_4. Les transformations de ce groupe peuvent être représentées sous la forme:

$$\tag{3} \begin{aligned} x_1' &= \alpha^2 x_1 + \alpha\gamma x_2 + \alpha\gamma x_3 + \gamma^2 x_4 \,, \\ x_2' &= \alpha\beta x_1 + \alpha\delta x_2 + \beta\gamma x_3 + \gamma\delta x_4 \,, \\ x_3' &= \alpha\beta x_1 + \beta\gamma x_2 + \alpha\delta x_3 + \gamma\delta x_4 \,, \\ x_4' &= \beta^2 x_1 + \beta\delta x_2 + \beta\delta x_3 + \delta^2 x_4 \,. \end{aligned}$$

On sait bien que chaque tenseur $\boldsymbol{x} \in X_4$ peut être décomposé (d'une manière unique) en somme d'un tenseur symétrique $\boldsymbol{\xi} \in X_4$ et d'un tenseur antisymétrique $\boldsymbol{\eta} \in X_4$. On peut l'exprimer par la formule:

$$\tag{4} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta} \,,$$

où $\xi_2 = \xi_3$, $\eta_1 = \eta_4 = 0$, $\eta_2 = -\eta_3$. Posons

$$\tag{5} \eta \overset{\mathrm{df}}{=} \eta_2 = -\eta_3 \,,$$

alors

$$\boldsymbol{\eta} = (0, \eta, -\eta, 0)$$

et

$$\tag{6} W(\boldsymbol{\eta}) = \eta^2 \,.$$

Il est facile de vérifier qu'on a la relation

$$\tag{7} W(\boldsymbol{x}) = W(\boldsymbol{\xi}) + W(\boldsymbol{\eta}) \,.$$

Les expressions $W(\boldsymbol{x})$, $W(\boldsymbol{\xi})$, $W(\boldsymbol{\eta})$ sont, comme on le sait, des densités et elles se transforment d'après la règle:

$$\tag{8} W(\boldsymbol{x}') = \Delta^2 W(\boldsymbol{x}) \,, \quad W(\boldsymbol{\xi}') = \Delta^2 W(\boldsymbol{\xi}) \,, \quad W(\boldsymbol{\eta}') = \Delta^2 W(\boldsymbol{\eta}) \,.$$

Définition. Soit $\boldsymbol{x}$ un point fixé dans l'espace X_4. Nous dirons que l'ensemble $\mathcal{T}(\boldsymbol{x})$ est un *domaine de transitivité du groupe* G si l'on a (voir [1], p. 1)

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) = \underset{\boldsymbol{x}'}{E}\{\Sigma_T[T \in G \cap \boldsymbol{x}' = T(\boldsymbol{x})]\} \,.$$

Pour effectuer la décomposition de l'espace X_4 en domaines de transitivité du groupe G considérons deux points $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}$ et $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{\xi}' + \boldsymbol{\eta}'$ de l'espace X_4 et posons la question: quand existe-t-il une transformation $T \in G$ telle que l'on ait

$$\tag{9} \boldsymbol{x}' = T(\boldsymbol{x})?$$

Remarquons que les transformations du groupe G sont, en vertu de (3), linéaires par rapport à $\boldsymbol{x}$. La décomposition (4) pour les points $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x}'$ étant unique, ils ne peuvent donc appartenir au même domaine de transitivité que si l'on a

$$\tag{10} \boldsymbol{\xi}' = T(\boldsymbol{\xi}) \,, \quad \boldsymbol{\eta}' = T(\boldsymbol{\eta}) \,.$$

Il en résulte que les parties symétriques $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{\xi}'$, ainsi que les parties antisymétriques $\boldsymbol{\eta}$ et $\boldsymbol{\eta}'$, doivent appartenir deux à deux à des domaines de transitivité communs.

On est donc nécessairement amené à étudier les domaines de transitivité pour les tenseurs antisymétriques et symétriques.

§ 3. Les tenseurs antisymétriques forment dans l'espace X_4 un sous-espace linéaire X_1 à une dimensions, donc une droite, définie par les équations:

$$\tag{11} x_1 = x_4 = 0 \,, \quad x_2 = -x_3 \,.$$

Dans l'espace X_1 nous choisissons un système de coordonnées dont l'origine est au point $(0, 0, 0, 0)$ et désignons la coordonnée par η.

L'antisymétrie d'un tenseur est, comme on le sait, une propriété invariante par rapport aux transformations du groupe G, donc tous les domaines de transitivité des tenseurs antisymétriques doivent être contenus dans l'espace X_1. Dans cet espace les transformations, du groupe G prennent la forme

$$\tag{12} \eta' = \Delta\eta \,.$$

On voit donc que *l'espace X_1 défini par les relations* (11) *se compose de deux domaines de transitivité; l'un d'eux ne contient qu'un seul point $\eta = 0$, l'autre contenant tous les points $\eta \neq 0$.*

§ 4. Les tenseurs symétriques forment dans l'espace X_4 un sous-espace linéaire X_3 à trois dimensions, défini par l'équation:

$$\tag{13} x_2 = x_3 \,.$$

Prenons dans cet espace X_3 un système de coordonnées $(0, z_1, z_2, z_3)$ dans lequel le point $\boldsymbol{x}$ de coordonnées $(x_1, x_2, x_3 = x_2, x_4)$ (par rapport au système de coordonnées dans l'espace X_4) aura les coordonnées:

$$z_1 = x_1 \,, \quad z_2 = x_2 = x_3 \,, \quad z_3 = x_4 \,.$$

Les transformations du groupe G peuvent maintenant être représentées sous la forme suivante:

$$\tag{14} \begin{aligned} z_1' &= \alpha^2 z_1 + 2\alpha\gamma z_2 + \gamma^2 z_3 \,, \\ z_2' &= \alpha\beta z_1 + (\alpha\delta + \beta\gamma) z_2 + \gamma\delta z_3 \,, \\ z_3' &= \beta^2 z_1 + 2\beta\delta z_2 + \delta^2 z_3 \,. \end{aligned}$$

Remarquons encore que la restriction de la fonction $W(\boldsymbol{x})$ à l'espace X_3, rapportée au système des coordonnées $(0, z_1, z_2, z_3)$, prend la forme:

$$W(\boldsymbol{x}) = \omega(\boldsymbol{z}) = z_1 z_3 - z_2^2 \,.$$

Puisque la symétrie d'un tenseur est une propriété invariante par rapport aux transformations du groupe G, les domaines de transitivité des tenseurs symétriques doivent être contenus dans l'espace X_3. D'autre part, comme il résulte de la deuxième des formules (8), les points $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$ de l'espace X_3 ne peuvent appartenir au même domaine de transitivité que si l'on a:

$$\mathrm{sg}\,\omega(\mathbf{z}) = \mathrm{const}\,, \tag{15}$$

où la fonction sg est définie comme il suit:

$$\mathrm{sg}\,a = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad a > 0\,, \\ 0 & \text{pour} \quad a = 0\,, \\ -1 & \text{pour} \quad a < 0\,. \end{cases}$$

L'espace X_3 se décompose alors en trois ensembles:

$$E_1\colon\ \omega(\mathbf{z}) = 0\,, \qquad E_2\colon\ \omega(\mathbf{z}) > 0\,, \qquad E_3\colon\ \omega(\mathbf{z}) < 0\,.$$

Nous allons montrer que:

1° *L'ensemble E_1 se décompose en trois domaines de transitivité.*
2° *L'ensemble E_2 se décompose en deux domaines de transitivité.*
3° *L'ensemble E_3 tout entier forme un domaine de transitivité.*

Nous prouverons aussi (nous en aurons besoin au § 5) que, *pour deux points quelconques de l'espace X_3, appartenant au même domaine de transitivité, il existe une transformation T (intervenant dans (9)) dont le déterminant $\Delta > 0$.*

Démonstration. Il est facile de vérifier que le point $\mathbf{0}(0, 0, 0)$, appartenant à E_1, constitue un domaine de transitivité D_1.

Considérons deux autres points $p_\varepsilon(\varepsilon, 0, 0)$, où $\varepsilon^2 = 1$, appartenant à E_1. Les images $\mathbf{z}(z_1, z_2, z_3)$ de ces points par les transformations du groupe G sont:

$$z_1 = \varepsilon\alpha^2\,, \qquad z_2 = \varepsilon\alpha\beta\,, \qquad z_3 = \varepsilon\beta^2 \tag{16}$$

et, par conséquent, elles appartiennent aux ensembles disjoints: D_2 (pour $\varepsilon = 1$) et D_3 (pour $\varepsilon = -1$), définis par les conditions:

$$\left.\begin{matrix} D_2 \ (\text{pour}\ \varepsilon = 1) \\ D_3 \ (\text{pour}\ \varepsilon = -1) \end{matrix}\right\}\colon \quad \omega(\mathbf{z}) = 0\,, \qquad \varepsilon z_1 \geqslant 0\,, \qquad \varepsilon z_3 \geqslant 0\,, \qquad z_1^2 + z_3^2 > 0$$

(d'après (2)).

Nous allons motrer que les ensembles D_2 et D_3 sont des domaines de transitivité. Pour cela il suffit de prouver que, pour chaque point $\mathbf{z} \in D_2$ ($\mathbf{z} \in D_3$), il existe des nombres réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, satisfaisant aux équations (16) et tels que $\Delta > 0$.

Soit $\mathbf{z} \in D_2$ ($\mathbf{z} \in D_3$). Comme $\varepsilon z_1 \geqslant 0$ et $\varepsilon z_3 \geqslant 0$, on peut poser:

$$\alpha = (\mathrm{sg}\,z_2)\sqrt{\varepsilon z_1}\,, \qquad \beta = \varepsilon\sqrt{\varepsilon z_3}\,,$$

γ et δ étant quelconques, pourvu que $\Delta > 0$. Puisque $\omega(\mathbf{z}) = z_1z_3 - z_2^2 = 0$, on a $z_2 = (\mathrm{sg}\,z_2)\sqrt{z_1z_3} = \alpha\beta$ et, par conséquent, les équations (16) sont verifiées.

Dans l'ensemble E_2 choisissons deux points $q_\varepsilon(\varepsilon, 0, \varepsilon)$. Ces points se transforment par la transformation (14) en points $\mathbf{z}$ de la forme:

$$z_1 = \varepsilon(\alpha^2 + \gamma^2)\,, \qquad z_2 = \varepsilon(\alpha\beta + \gamma\delta)\,, \qquad z_3 = \varepsilon(\beta^2 + \delta^2)\,, \tag{17}$$

appartenant aux deux enesembles disjoints D_4 (pour $\varepsilon = 1$) et D_5 (pour $\varepsilon = -1$), définis par les conditions:

$$\left.\begin{matrix} D_4 \ (\text{pour}\ \varepsilon = 1) \\ D_5 \ (\text{pour}\ \varepsilon = -1) \end{matrix}\right\}\colon \quad \omega(\mathbf{z}) > 0\,, \qquad \varepsilon z_1 > 0\,, \qquad \varepsilon z_3 > 0\,.$$

Nous allons montrer que les ensembles D_4 et D_5 sont aussi des domaines de transitivité.

Soit $\mathbf{z}$ un point arbitraire du D_4 (ou D_5). Il suffit de poser, par exemple,

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega(\mathbf{z})}{\varepsilon z_3}}\,, \qquad \beta = 0\,, \qquad \gamma = \frac{\varepsilon z_2}{\sqrt{\varepsilon z_3}}\,, \qquad \delta = \sqrt{\varepsilon z_3}\,;$$

alors $\Delta = \alpha\delta = \sqrt{\omega(\mathbf{z})} > 0$ et les équations (17) sont vérifiées.

Dans l'ensemble E_3 choisissons le point $s(0, 1, 0)$. Les images $\mathbf{z}$ du point s, par les transformations du groupe G, sont:

$$z_1 = 2\alpha\gamma\,, \qquad z_2 = \alpha\delta + \beta\gamma\,, \qquad z_3 = 2\beta\delta\,. \tag{18}$$

Pour démontrer que l'ensemble E_3 (tout entier) forme un domaine de transitivité D_6, il suffit de prouver qu'il existeent, pour chaque point $\mathbf{z} \in E_3$, des solutions du système d'équations (18) satisfaisant à la condition $\Delta > 0$.

En effet, posons:

$$\beta = \frac{z_3}{2\delta}\,, \qquad \gamma = \frac{z_1}{2\alpha}\,, \tag{19}$$

et substituons ces expressions dans la deuxième équation (18). Nous obtenons ainsi

$$z_2 = \alpha\delta + \frac{z_1z_3}{4\alpha\delta}\,,$$

d'où résulte, pour la valeur $\alpha\delta$, l'équation suivante:

$$(\alpha\delta)^2 - z_2(\alpha\delta) + z_1z_3/4 = 0\,. \tag{20}$$

Comme le point $\mathbf{z}$ appartient à E_3, l'équation (20) a deux racines réelles distinctes:

$$(\alpha\delta)^* = \tfrac{1}{2}z_2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{-\omega(\mathbf{z})}\,, \qquad (\alpha\delta)^{**} = \tfrac{1}{2}z_2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{-\omega(\mathbf{z})}\,,$$

dont une au moins est différente de zéro. En calculant les valeurs Δ^* et Δ^{**} du déterminant Δ, correspondant à ces racines, nous voyons que

$$\Delta^* = \sqrt{-\omega(z)} > 0\,, \qquad \Delta^{**} = -\sqrt{-\omega(z)} < 0\,.$$

Si donc $(\alpha\delta)^* \neq 0$, notre conclusion est démontrée. Si, au contraire, $(\alpha\delta)^* = 0$ (donc aussi $z_1 z_3 = 0$), posons au lieu de (19):

$$\alpha = \frac{z_1}{2\gamma}\,, \qquad \delta = \frac{z_3}{2\beta}\,.$$

Un calcul tout à fait analogue montre qu'il existe alors une solution du système (18) telle que l'on a $\Delta > 0$. La démonstration se trouve ainsi terminée.

La proposition démontrée plus haut nous permet d'effectuer la décomposition de l'espace X_3 en domaines de transitivité par rapport au groupe G. Cette décomposition sera donnée au § 6 comme cas particulier de celle de l'espace X_4.

§ 5. Revenons au cas général des tenseurs $\boldsymbol{x}$ dans l'espace X_4. Dans ce but nous aurons besoin du lemme suivant:

LEMME. *Soient ξ et ξ' deux points du sous-espace X_3 de l'espace X_4, appartenant au même domaine de transitivité D_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ et tels que $W(\xi) = W(\xi')$. Il existe alors une transformation $T \in G$, de déterminant $\Delta = 1$, satisfaisant à la relation*

$$\xi' = T(\xi)\,. \tag{21}$$

Démonstration. Dans le paragraphe précédent nous avons montré qu'il existe pour tous les points ξ et ξ' une transformation $T \in G$, de déterminant $\Delta > 0$, satisfaisant à la formule (21). D'après notre hypothèse on a $W(\xi) = W(\xi')$. De la deuxième des formules (8) il suit $\Delta^2 = 1$, donc $\Delta = 1$, c. q. f. d.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Pour que deux points arbitraires $\boldsymbol{x} = \xi + \boldsymbol{\eta}$ et $\boldsymbol{x}' = \xi' + \boldsymbol{\eta}'$ appartiennent au même domaine de transitivité du groupe G dans l'espace X_4 il faut et il suffit que l'on ait*:

$$\text{I.}\quad \eta = \eta' = 0 \quad \textit{ou bien} \quad \eta\eta' \neq 0\,.$$

$$\text{II.}\quad \begin{vmatrix} W(\xi) & W(\xi') \\ W(\boldsymbol{\eta}) & W(\boldsymbol{\eta}') \end{vmatrix} = 0\,.$$

$$\text{III.}\quad \xi \in D_i\,, \quad \xi' \in D_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 6)\,.$$

Démonstration. La nécessité de la condition II est une conséquence immédiate des formules (8) et (10). Celle des conditions I et III résulte des formules (10) et du raisonnement du § 3 d'après lequel il n'y a, pour les tenseurs antisymétriques $\boldsymbol{\eta}$, que deux domaines de transitivité, définis respectivement par les conditions: $\eta = 0$ et $\eta \neq 0$.

Pour démontrer que la condition est suffisante, supposons remplies les conditions I, II, III. Il s'agit de montrer qu'il existe une transformation $T \in G$ telle que $\boldsymbol{x}' = T(\boldsymbol{x})$.

Comme les parties antisymétriques $\boldsymbol{\eta}$ et $\boldsymbol{\eta}'$ des points $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x}'$ appartiennent, d'après I, au même domaine de transitivité, il existe une transformation $T_1 \in G$, de déterminant $\Delta_1 \neq 0$, telle que l'on a:

$$\boldsymbol{\eta}' = T_1(\boldsymbol{\eta})\,. \tag{22}$$

En appliquant la transformation T_1 à la partie symétrique ξ du point $\boldsymbol{x}$ nous obtenons:

$$\bar{\xi} = T_1(\xi)\,. \tag{23}$$

On a

$$W(\bar{\xi}) = (\Delta_1)^2 W(\xi)\,, \qquad W(\boldsymbol{\eta}') = (\Delta_1)^2 W(\boldsymbol{\eta})\,. \tag{24}$$

Le point $\bar{\xi}$ est en général différent du point ξ' mais, d'après III et (23), les points $\bar{\xi}$ et ξ' appartiennent au même domaine de transitivité. On a donc, d'après II et (24):

$$W(\bar{\xi}) = W(\xi')\,.$$

En appliquant notre lemme aux points $\bar{\xi}$ et ξ', on voit qu'il existe une transformation T_2, de déterminant $\Delta_2 = 1$, telle que

$$T_2(\bar{\xi}) = \xi'\,. \tag{25}$$

Désignons par T la composition des transformations T_1 et T_2. On a d'après (23) et (25):

$$T_2\big(T_1(\xi)\big) = T(\xi)\,.$$

Comme $\Delta_2 = 1$, on a, d'après la règle (12) de transformation pour $\boldsymbol{\eta}$, $T_2(\boldsymbol{\eta}') = \boldsymbol{\eta}'$ et par conséquent

$$\boldsymbol{\eta}' = T(\boldsymbol{\eta})\,.$$

Il en résulte, en vertu de l'unicité de la décomposition (4), qu'on doit avoir

$$\boldsymbol{x}' = T(\boldsymbol{x})\,.$$

Notre théorème se trouve ainsi démontré.

§ 6. Nous pouvons maintenant effectuer la décomposition définitive de l'espace X_4 en domaines de transitivité.

D'après la condition I du théorème du paragraphe précédent l'espace X_4 se décompose en deux parties: l'espace X_3 considéré au § 4, déterminé par l'égalité $\eta = 0$, et le reste $R \overset{\mathrm{df}}{=} X_4 - X_3$ déterminé par l'inégalité $\eta \neq 0$. Nous pouvons l'écrire sous la forme:

$$X_4 = X_3 + R\,. \tag{26}$$

L'espace X_3 se compose, comme nous l'avons démontré au § 4, de six domaines de transitivité: $D_1, D_2, \ldots, D_6$.

Le reste R se décompose, d'après la condition II, en couches disjointes $H(k)$ déterminées par la condition:

$$W(\xi)/W(\eta) = k = \text{const}\,, \quad \text{où} \quad -\infty < k < \infty$$

(dans R on doit avoir $W(\eta) \neq 0$, puisque $W(\eta) = \eta^2$ et $\eta \neq 0$). Donc:

$$R = \sum_{-\infty<k<\infty} H(k)\,. \tag{27}$$

La couche $H(0)$ se compose, d'après la condition III, de trois domaines de transitivité: D_7, D_8, D_9, correspondant respectivement aux cas où la partie symétrique ξ du point x appartient à D_1, D_2, D_3.

Chaque couche $H(k)$, où $k > 0$, se compose de deux domaines de transitivité $D_1(k)$ et $D_2(k)$ correspondant aux cas où la partie symétrique ξ appartient à D_4 et D_5.

Chaque couche $H(k)$, où $k < 0$, forme un domaine de transitivité $D_3(k)$.

Tout espace X_4 se décompose donc en neuf domaines de transitivité „exceptionnels": $D_1, D_2, \ldots, D_9$ et trois familles (dépendant du paramètre continu k) de domaines de transitivité $D_1(k), D_2(k), D_3(k)$, qui sont définis de la manière suivante:

$$\left.\begin{array}{ll}
D_1: & x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = 0\,, \\
D_2: & x_1 \geqslant 0\,, \quad x_4 \geqslant 0 \\
D_3: & x_1 \leqslant 0\,, \quad x_4 \leqslant 0
\end{array}\right\} x_1^2+x_4^2>0\,, \quad W(\xi)=0\,,$$

$$\left.\begin{array}{ll}
D_4: & x_1 > 0\,, \quad x_4 > 0 \\
D_5: & x_1 < 0\,, \quad x_4 < 0
\end{array}\right\} W(\xi) > 0\,, \qquad D_6: \; W(\xi) < 0\,, \qquad \Bigg\} \; \eta = 0\,,$$

$$\left.\begin{array}{ll}
D_7: & \xi \in D_1 \\
D_8: & \xi \in D_2 \\
D_9: & \xi \in D_3
\end{array}\right\} W(\xi) = 0\,, \quad
\left.\begin{array}{ll}
D_1(k): & \xi \in D_4 \\
D_2(k): & \xi \in D_5
\end{array}\right\} \frac{W(\xi)}{W(\eta)} = k > 0\,, \quad
D_3(k): \; \frac{W(\xi)}{W(\eta)} = k < 0 \quad \Bigg\} \; \eta \neq 0\,.$$

Travaux cités

[1] S. Gołąb et E. Siwek, *Sur les domaines de transitivité d'un groupe de trans formations*, ce volume, p. 209-216.

Reçu par la Rédaction le 27. 5. 1960

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
X (1961)

On the evaluation of the solutions of a system of ordinary differential equations with an analytical right-hand member

by TSIN-HWA SHU (Kraków)

Introduction. We consider an ordinary differential equation

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w) \tag{1}$$

with the initial condition $w(0) = 0$, z and w being complex variables and $f(z, w)$ being analytic in the domain

$$|z| < a\,, \quad |w| < b\,, \tag{2}$$

(a, b are positive constants).

Moreover, we consider the equation

$$\frac{ds}{dr} = F(r, s) \tag{3}$$

with the initial condition $s(0) = 0$, r and s being the real variables and $F(r, s)$ being a function continuous in the rectangle

$$0 \leqslant r < a\,, \quad 0 \leqslant s < b \tag{4}$$

(a, b are identical to those in formula (2)).

In the year 1956 A. Wintner proved [3] the following theorem:

THEOREM OF A. WINTER. *We assume that the inequality*

$$|f(z, w)| \leqslant F(|z|, |w|) \tag{5}$$

holds if z and w both satisfy (2). We assume also that $F(r, s)$ does not decrease with respect to the variable s in rectangle (4). Suppose we have given an arbitrary solution of (3) which satisfies the initial condition $s(0) = 0$ and exists in an interval $[0, \alpha)$ $(\alpha \leqslant a)$. Then we have the following proposition:

Each function in the sequence of successive approximations of the solution of (1)

$$w_0(z) \equiv 0\,, \quad w_1(z)\,, \quad w_2(z)\,, \quad \ldots \tag{6}$$