that K need not be a deformation retract of S even if S has a unit, but in this case it is known that K and S have the same cohomology (see [5]). Does this last result hold if the assumption that S have a unit is replaced by the assumption that $S = ESE$ where E is the set of those elements satisfying $x^2 = x$?

P 333. It is a corollary to the result in P 332 that a compact connected semigroup with zero and unit is unicoherent. Is there a proof of this using only set-theoretic topology? A similar question arises concerning the result stated in P 330.

P 334. Suppose that S is a compact semigroup and let B denote the "boundary" of S is some suitable sense. For example, S might be homeomorphic with a subset of Euclidean n-space and B might be the ordinary boundary of S. The set B is known to play an important part in the determining the properties of S. (See [7] and [4].)

(a) If every element of S has a square-root in S does every element of B have a square-root in B (Problem of H. H. Corson)?

(b) Under some interpretations of "boundary" it is known that if S has a unit, then the unit lies in B (see [8]). Are there other useful interpretations of "boundary" for which this is true?

(c) If one assumes that the multiplication is commutative on B, are there agreeable conditions under which it may be shown to be commutative on S? (Cf. [2], where S is a dendrite and B is the set of endpoints of S.)

REFERENCES

[1] M. L. Curtis, *Self-linked subgroups of semigroups*, American Journal of Mathematics 81 (1959), p. 889-892.

[2] W. M. Faucett, *Topological semigroups and continua with cut points*, Proceedings of the American Mathematical Society 6 (1955), p. 748-756.

[3] R. J. Koch and A. D. Wallace, *Admissibility of semigroup structures on continua*, Transactions of the American Mathematical Society 88 (1958), p. 277-287.

[4] P. S. Mostert and A. L. Shields, *On the structure of semigroups on a compact manifold with boundary*, Annals of Mathematics 65 (1957), p. 117-143.

[5] A. D. Wallace, *Cohomology, dimension and mobs*, Summa Brasiliensis Mathematicae 3 (1953), p. 43-54.

[6] — *Topological invariance of ideals in mobs*, Proceedings of the American Mathematical Society 5 (1954), p. 866-868.

[7] — *Differentiability of continuous multiplications*, Research Problem 10, Bulletin of the American Mathematical Society 61 (1955), p. 93.

[8] — *The Gebietstreue in semigroups*, Indag. Math. 18 (1956), p. 271-276.

[9] — *Retractions in semigroups*, Pacific Journal of Mathematics 7 (1957), p. 1513-1517.

Reçu par la Rédaction le 19. 8. 1960

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VIII 1961 FASC. 2

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О τ-КОЛЬЦАХ

Б. ГЛЕЙХГЕВИХТ (ВРОЦЛАВ)

В этом сообщении даются некоторые замечания, относящиеся к τ-кольцам, рассматриваемым автором в работе [2], т. е. к кольцам, которые, вообще говоря, не предполагаются ассоциативными и в которых существует такой элемент τ, что равенства

$$x(yz) = \big(x(\tau z)\big)y, \tag{i}$$

$$\tau(\tau x) = x \tag{ii}$$

выполняются для всех x, y и z, принадлежащих к данному кольцу.

В работе [2] было доказано, что *если R есть τ-кольцо, то τ не является левым делителем нуля в R*; в то же время *τ является правой единицей кольца, притом единственной*, откуда следует, что *в R может существовать лишь один элемент τ, удовлетворяющий условиям* (i) *и* (ii). Там-же было доказано, что *для любых $x, y, z \in R$*

$$\tau(xy) = yx, \tag{1}$$

$$(xy)z = x\big(z(\tau y)\big). \tag{2}$$

Основные результаты, полученные в [2], заключаются в следующем:

Если $R_\circ$ ассоциативное кольцо с инволюцией (см. [3] или [5]), *содержащее единицу, и если $\mathcal{K}(R_\circ)$ обозначает множество $R_\circ$ с обычным в кольце $R_\circ$ сложением и умножением*

$$xy = y^{*}\circ x, \tag{3}$$

где $\circ$ обозначает умножение в $R_\circ$, а $*$ — инволюцию, то $\mathcal{K}(R_\circ)$ является τ-кольцом, в котором роль τ играет единица кольца $R_\circ$.

Далее доказывается теорема о точном представлении τ-колец: *для каждого τ-кольца R можно построить такое кольцо $R_\circ$, обладающее вышеуказанными свойствами, что $R = \mathcal{K}(R_\circ)$.*

1. Важным примером τ-кольца является кольцо квадратных краковянов ([1], [2]), введённых в рассмотрение Банахевичем.

Дадим сейчас пример конечного τ-кольца.

Пусть S — ассоциативное и коммутативное кольцо с единицей e. Тогда множество пар (x, y), где $x, y \in S$, со сложением

$$(x_1, y_1) \dotplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

и умножением

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$$

тоже является ассоциативным и коммутативным кольцом с единицей (e, e). Обозначим это кольцо через $\tilde{S}$. Легко видеть, что операция

$$(x, y)^* = (y, x)$$

будет инволюцией в $\tilde{S}$.

Таким образом, $\mathcal{K}(\tilde{S})$ есть τ-кольцо, где $\tau = (e, e)$.

Полагая в качестве S кольцо вычетов по модулю 2, получим кольцо $\tilde{S}$, состоящее из четырёх элементов. Переходя к $\mathcal{K}(\tilde{S})$ и обозначая его элементы $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ и $(1, 1)$ соответственно через $0, a, b$ и τ, получим τ-кольцо со следующими таблицами сложения и умножения:

сложение	τ	a	b
τ	0	b	a
a	b	0	τ
b	a	τ	0

умножение	τ	a	b
τ	τ	b	a
a	a	0	a
b	b	b	0

Заметим, что не существует неассоциативного τ-кольца, состоящего из трёх элементов. Это предложение будет доказано в **3** в качестве следствия.

2. В работе [2] была выведена следующая формула, обобщающая (2) для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ (где $n \geqslant 3$):

$$\text{(4)} \qquad \Big(\ldots\big((x_1 x_2) x_3\big) \ldots x_{n-1}\Big) x_n = x_1 \Big(\ldots \Big(\big(x_n (\tau x_{n-1})\big)(\tau x_{n-2})\Big) \ldots (\tau x_2)\Big).$$

Из неё легко получается формула

$$\text{(5)} \qquad x_1 \Big(\ldots\Big(\Big(\big((x_2 x_3) x_4\big) x_5\Big) \ldots\Big) x_n\Big) = \Big(\ldots\Big(\big(x_1 (\tau x_n)\big)(\tau x_{n-1})\Big) \ldots\Big) x_2$$

(где $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ и $n \geqslant 3$). Действительно, перепишем (4) так:

$$y_1 \Big(\ldots \Big(\big(y_n (\tau y_{n-1})\big)(\tau y_{n-2})\Big) \ldots (\tau y_2)\Big) = \Big(\ldots\big((y_1 y_2) y_3\big) \ldots y_{n-1}\Big)\, y_n .$$

Подставляя теперь в последнее равенство

$$y_1 = x_1, \quad y_n = x_2; \quad \tau y_{n-1} = x_3, \quad \tau y_{n-2} = x_4, \quad \ldots, \quad \tau y_2 = x_n,$$

получим (5).

Формулы (4) и (5), как и, кстати, другие формулы умножения нескольких элементов в τ-кольцах или других неассоциативных кольцах, весьма сложны. Облегчить запись этих формул можно было бы, повидимому, употребляя символику Лукасевича, применяемую им в математической логике (см. [4]) и заключающуюся в записи символа операции перед выражениями, к которым она относится. Обозначая умножение элементов кольца вертикальной чертой, получим, например, следующую запись формул (i) и (2):

$$\text{(1')} \qquad |x|yz = \|x|\tau zy,$$

$$\text{(2')} \qquad \|xyz = |x|z|\tau y,$$

не являющуюся, конечно, никаким облегчением по сравнению с (i) и (2). Но если условимся n-кратное повторение вертикальной черты $\|\ldots|$ обозначать через $|^n$, то тогда (4), например, запишется весьма просто:

$$\text{(4')} \qquad |^{n-1} x_1 x_2 \ldots x_n = |x_1|^{n-2} x_n|\tau x_{n-1}|\tau x_{n-2} \ldots |\tau x_2.$$

Формула (5) в этой записи будет иметь вид:

$$\text{(5')} \qquad |x_1|^{n-2} x_2 x_3 \ldots x_n = |^{n-1} x_1|\tau x_n|\tau x_{n-1} \ldots |\tau x_3 x_2.$$

3. *Каждое из следующих трёх условий равносильно в τ-кольце двум остальным*:

(a) R — *коммутативное кольцо*,
(b) R — *ассоциативное кольцо*,
(c) R — *кольцо с единицей*.

Доказательство. Пусть R — коммутативное τ-кольцо. Тогда τ является единицей в R. Имеем

$$x(yz) = (xz)y,$$

откуда следует

$$x(zy) = (xz)y$$

для любых $x, y, z \in R$; значит R ассоциативно.

Если R ассоциативно, то

$$x(yz) = \big(x(\tau z)\big)y = \big((x\tau)z\big)y = (xz)y = x(zy).$$

Полагая $x = \tau$, получаем

$$zy = yz \quad (y, z \in R),$$

откуда уже следует, что τ — единица кольца R.

Наконец, если в R имеется единица, то ею является τ. Значит,

$$x(yz) = (xz)y,$$

откуда, полагая, как и выше, $x = \tau$, заключаем, что равенство $yz = zy$ выполняется для всех $y, z \in R$; отсюда и вытекает уже ассоциативность.

Теперь легко видеть, что τ-кольцо R, состоящее из трёх элементов, ассоциативно. Действительно, пусть $R = \{0, \tau, x\}$. Тогда $\tau x \neq 0$ (τ не является делителем нуля); с другой стороны $\tau x \neq \tau$, т. к. в противном случае мы бы имели $x = \tau$ на основании (ii). Итак, $\tau x = x$ и τ является единицей.

Пусть Z обозначает *центр* τ-кольца R, т. е. совокупность всех элементов R, перестановочных с каждым его элементом. Покажем, что *центр Z является подкольцом кольца R*. Для этой цели достаточно доказать, что из $x, y \in Z$ следует $xy \in Z$.

Пусть $x, y \in Z$ и w произвольный элемент из R. Мы имеем

$$(xy)w = x\big(w(\tau y)\big) = x\big(w(y\tau)\big) = x(wy) =$$
$$= (wy)x = w\big(x(\tau y)\big) = w(xy).$$

Можно теперь сказать, что *τ-кольцо R является ассоциативным, значит, и коммутативным кольцом тогда и только тогда, когда τ принадлежит к центру.*

4. Кольца, в которых выполняются тождественно соотношения

$$(xx)y = x(xy), \tag{6}$$

$$(xy)x = x(yx), \tag{7}$$

$$(xy)y = x(yy), \tag{8}$$

каждое из которых может быть получено как следствие из двух остальных, называются *альтернативными кольцами* (см., напр., [6]). Кольца, в которых выполняется тождественно первое из этих соотношений, называются *лево-альтернативными*, второе — *эластичными*, а третье — *право-альтернативными*.

τ-кольца, вообще говоря, не являются ни лево-альтернативными, ни право-альтернативными, ни эластичными. Они не принадлежат также к классу колец с ассоциативными степенями, ни к классу колец с коммутативными степенями (см. [6]). С целью доказать эти

факты, достаточно найти в каком-нибудь τ-кольце такой элемент x, чтобы $x^2x \neq xx^2$.

Рассмотрим кольцо квадратных краковянов второго порядка ([1], [2]). Тогда, если, например,

$$x = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix},$$

то

$$x^2x - xx^2 = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Bmatrix}.$$

Но интересно, кстати, заметить, что для любого x из τ-кольца имеем равенство $(x^2x^2)x^2 = x^2(x^2x^2)$. Действительно, в силу (1) $\tau x^2 = x^2$, откуда в силу (i) и получаем

$$x^2(x^2x^2) = \big(x^2(\tau x^2)\big)x^2 = (x^2x^2)x^2.$$

Докажем сейчас, что *если τ-кольцо является лево-альтернативным, либо эластичным, либо право-альтернативным кольцом, то оно ассоциативно.*

Пусть R лево-альтернативное τ-кольцо. Полагая в (6) $x = \tau$, получим, что равенство $\tau y = y$ выполняется для каждого $y \in R$, а это равносильно ассоциативности R.

Пусть теперь R — эластичное τ-кольцо. Тогда

$$x(yx) = \big(x(\tau x)\big)y = \big((x\tau)x\big)y = (xx)y.$$

Умножая обе стороны равенства

$$x(yx) = (xx)y$$

слева на τ, получим

$$(yx)x = y(xx);$$

значит R право-альтернативное кольцо. Но тогда оно и лево-альтернативно, значит и ассоциативно.

Пусть наконец R — право-альтернативное τ-кольцо. Полагая в (8) $x = \tau$ и $y = \tau + v$, получим, что

$$\big(\tau(\tau+v)\big)(\tau+v) = \tau(\tau+v)^2,$$

откуда

$$(\tau+\tau v)(\tau+v) = (\tau+v)^2$$

и

$$\tau + 2\cdot\tau v + (\tau v)v = \tau + \tau v + v + v^2.$$

В полученном отсюда равенстве

$$\tau v+(\tau v)v = v+v^2$$

в силу право-альтернативности имеем $(\tau v)v = \tau v^2 = v^2$, откуда $\tau v = v$ для всякого $v \in R$, чем доказательство и заканчивается.

5. Пусть S — кольцо в общем смысле (т. е. не предполагается, что умножение в S ассоциативно). Пусть в S существует такой элемент τ, что равенства

(iii) $$(xy)z = y\big((x\tau)z\big),$$

(iv) $$(x\tau)\tau = x$$

выполнены для всех $x, y, z \in S$.

Между так определёнными кольцами и τ-кольцами существует двойственность: условия (iii) и (iv) отличаются соответственно от условий (i) и (ii) порядком множителей; собственно говоря, (iii) и (iv) суть (i) и (ii), записанные в обратном порядке; в этом легко убедиться, полагая в (iii) x вместо z и наоборот. Назовём кольца, удовлетворяющие условиям (iii) и (iv), *правыми τ-кольцами*, а τ-кольца в прежним смысле, т. е. удовлетворяющие условиям (i) и (ii), *левыми τ-кольцами*.

Отдельное изучение правых τ-колец, конечно, излишне, т. к. каждой теореме, сформулированной для одного из этих типов колец, соответствует двойственная теорема для другого.

Если R левое τ-кольцо, то определяя в нём новую операцию умножения с помощью равенства

$$x \times y = yx,$$

получим правое τ-кольцо.

Пусть теперь $R_\circ$ — ассоциативное кольцо с инволюцией, содержащее единицу и такое, что $R = \mathcal{K}(R_\circ)$. Тогда, согласно (3),

(9) $$x \times y = yx = x^* \circ y;$$

значит, определяя в $R_\circ$ операцию умножения равенством (9), мы придём к правому τ-кольцу.

Зададим теперь в $R_\circ$ следующую операцию умножения:

$$x \bigcirc y = y \circ x.$$

Множество $R_\circ$ относительно этой операции умножения и прежнего сложения есть опять ассоциативное кольцо с единицей, причём отображение $x \to x^*$ является в нём инволюцией:

$$(x \bigcirc y)^* = (y \circ x)^* = x^* \circ y^* = y^* \bigcirc x^*.$$

Обозначим кольцо $R_\circ$ с умножением $\bigcirc$ через $R'_\circ$. Тогда, определяя в нём умножение (3) $y^* \bigcirc x$, придём к левому τ-кольцу $\mathcal{K}(R'_\circ)$, умножение же (9) $x^* \bigcirc y$ приведёт нас к некоторому правому τ-кольцу. Возвращаясь к $R_\circ$, можем записать эти операции умножения соответственно $x \circ y^*$ и $y \circ x^*$.

Легко видеть, что это новое правое τ-кольцо может быть получено из исходного левого τ-кольца R, если рассматривать R относительно операции умножения $(\tau x)(\tau y)$. Действительно,

$$x^* \bigcirc y = y \circ x^* = y^{**} \circ x^* = (\tau x)(\tau y).$$

Аналогично, задание в R операции умножения $(\tau y)(\tau x)$ приводит нас к $\mathcal{K}(R'_\circ)$.

Оба эти левые τ-кольца, порождённые кольцом $R_\circ$, вообще говоря, различны. То же самое можно сказать относительно обоих правых τ-колец. Тождественность этих двух левых τ-колец (и соответственно правых) будет иметь место, очевидно, тогда и только тогда, когда кольцо $R_\circ$ коммутативно.

Заметим ещё, что если инволюция $*$ в $R_\circ$ является тривиальной, т. е. если $x^* = x$ для всех $x \in R_\circ$, то $R_\circ$ — коммутативное кольцо и $R = \mathcal{K}(R_\circ) = R_\circ$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] T. Banachiewicz, *Rachunek krakowianowy*, Warszawa 1959.

[2] B. Gleichgewicht, *On a Class of Rings*, Fundamenta Mathematicae 48 (1960), стр. 355-359.

[3] L. H. Loomis, *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*, Toronto - New York - London 1953.

[4] J. Łukasiewicz, *Elementy Logiki Matematycznej*, Warszawa 1958.

[5] М. А. Наймарк, *Нормированные кольца*, Москва 1956.

[6] А. И. Ширшов, *Некоторые вопросы теории колец, близких к ассоциативным*, Успехи Математических Наук 13 (1958), стр. 3-20.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ПОЛЬСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Reçu par la Rédaction le 8. 6. 1960