An ω-manifold is said to be *closed* if it is compact. Evidently the Cartesian product of Q^ω by an n-dimensional closed manifold is a closed ω-manifold. Moreover the Cartesian product of Q^ω by a Euclidean ball, and more generally, by a compact n-dimensional manifold with a boundary, is a closed ω-manifold.

Let us observe that a closed ω-manifold is locally an absolute retract and consequently (by a theorem of Yajima [4]; see also [2]) it is a compact ANR-set. It follows that every closed ω-manifold is acyclic in almost all dimensions and the Betti numbers of it are finite. However there exist closed ω-manifolds which are not homeomorphic to the Cartesian product of Q^ω by any n-dimensional closed manifold. In fact, let P denote the plane set which we obtain by removing from a disk K of the interiors of two small disks K_1, K_2 lying in the interior of K. The Cartesian product $M = P \times Q^\omega$ is a closed ω-manifold and the set P is a deformation retract of M. Consequently, $H_1(M, \mathfrak{A}) \simeq \mathfrak{A}^2$ and $H_n(M, \mathfrak{A})$ is trivial for every $n \neq 1$.

However those conditions are neither satisfied by any n-dimensional manifold M_n, hence nor by any space homeomorphic with the Cartesian product $M_n \times Q^\omega$.

P 335. *Is it true that the Cartesian product of a connected and not empty polytope (or more generally, of a compact, not empty ANR-set) by Q^ω is always a closed ω-manifold?*

P 336. *Is every closed ω-manifold homeomorphic to the Cartesian product of a connected polytope by Q^ω?*

REFERENCES

[1] J. Dugundji, *An extension of Tietze's theorem*, Pacific Journal of Mathematics 1 (1951), p. 353-367.

[2] O. Hanner, *Some theorems on absolute neighbourhood retracts*, Arkiv för Matematik 1 (1950), p. 389-408.

[3] O. Keller, *Die Homoiomorphie der kompakten konvexen Mengen im Hilbertschen Raum*, Mathematische Annalen 105 (1931), p. 748-758.

[4] T. Yajima, *On a local property of absolute neighbourhood retracts*, Osaka Mathematical Journal 2 (1950), p. 59-62.

Reçu par la Rédaction le 28. 9. 1960

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VIII 1961 FASC. 2

SUR UN PROBLÈME DE K. URBANIK CONCERNANT LES ENSEMBLES LINÉAIRES

PAR

R. ENGELKING (VARSOVIE)

$\mathcal{R}$ étant l'ensemble des nombres réels, soit A^a, où $A \subset \mathcal{R}$ et $a \in \mathcal{R}$, l'image de translation de l'ensemble A à la distance a, c'est-à-dire l'ensemble des nombres de la forme $a + \alpha$ où $a \in A$.

Le problème suivant a été posé par K. Urbanik:

P 337. Est-ce qu'aucun ensemble compact de nombres réels n'est non-dense dans toute somme finie de ses images de translation?

Ce problème peut être formulé en ces termes: a-t-on

$$A - \overline{(A^{a_1} \cup \ldots \cup A^{a_n}) - A} \neq 0$$

pour tout $A \subset \mathcal{R}$ compact et tout système $a_1, \ldots, a_n$ d'éléments de $\mathcal{R}$?

Le but de cette communication est d'établir le théorème qui suit et qui constitue une solution (affirmative) du problème pour $n = 2$:

THÉORÈME. *Si $a \in \mathcal{R}$, $\beta \in \mathcal{R}$ et l'ensemble $A \subset \mathcal{R}$ est compact, on a*

$$A - \overline{(A^a \cup A^\beta) - A} \neq 0. \tag{1}$$

La démonstration fera l'usage essentiel de deux lemmes et d'un théorème dû à Ramsey.

LEMME 1. *Si un ensemble $A \subset \mathcal{R}$ n'est pas un ensemble-frontière dans $\mathcal{R}$, on a (1) pour $a \in \mathcal{R}$ et $\beta \in \mathcal{R}$ quelconques.*

Démonstration. On a $\mathcal{R} - \overline{\mathcal{R} - A} \neq 0$ par hypothèse, $\mathcal{R} - \overline{\mathcal{R} - A} \subset \subset A$ toujours et $A^a \cup A^\beta \subset \mathcal{R}$ par définition. Par conséquent, $0 \neq \mathcal{R} - \overline{\mathcal{R} - A} = A \cap (\mathcal{R} - \overline{\mathcal{R} - A}) = A - \overline{\mathcal{R} - A} \subset A - \overline{(A^a \cup A^\beta) - A}$, donc (1).

LEMME 2. *Soient $M \in \mathcal{R}$, $p \in \mathcal{R}$ et $\{p_i\}$ une suite telle que l'on a pour tout $i = 1, 2, \ldots$*

$$p_i \in \mathcal{R}, \quad |p_i| < M, \tag{2}$$

$$p_i = p - (k_i a + l_i \beta), \tag{3}$$

où

(4) $$k_0 = l_0 = 0,$$

(5) $$k_i + l_i = i,$$

(6) *ou bien* $k_i = k_{i-1}+1$, *ou bien* $l_i = l_{i-1}+1$.

Alors, ou bien

(7) *il existe deux nombres naturels* m *et* n *tels que* $m < n$ *et* $p_m = p_n$,

ou bien

(8) *la suite* $\{p_i\}$ *est dense dans un intervalle.*

Démonstration. Si $a = 0 = \beta$, la thèse (7) est triviale. Si $a = 0 \neq \neq \beta$, il est impossible que $\lim_{i\to\infty} l_i = \infty$, car on aurait alors d'après (3) $\lim_{i\to\infty} |p_i| = \lim_{i\to\infty} |p - l_i\beta| = \infty$, contrairement à (2). Vu (6), on a donc $l_n = l_{n-1}$ pour un $n = 2, 3, \ldots$, d'où $p_{n-1} = p - l_{n-1}\beta = p - l_n\beta = p_n$, ce qui est encore la thèse (7) pour $m = n-1$.

La symétrie des hypothèses faites sur a et β permet de réduire les deux alternatives qui restent à celle où $a \neq 0 \neq \beta$. Or a et β sont alors de signe contraire, puisqu'on aurait autrement, en vertu de (4)-(6), $\lim_{i\to\infty} |k_i a + l_i\beta| = \infty$, d'où $\lim_{i\to\infty} |p_i| = \infty$ en vertu de (3), contrairement à (2). On peut donc admettre que

(9) $$a < 0 < \beta.$$

Deux cas sont alors à considérer:

1° Les nombres a et β ne sont pas indépendants (au sens arithmétique), c'est-à-dire qu'il existe deux nombres naturels K et L tels que, en tenant compte de (9),

(10) $$Ka + L\beta = 0.$$

En vertu de (5) et (6), il existe pour tout $i = 1, 2, \ldots$ des entiers $\sigma_i \geqslant 0$, $\varkappa_i \geqslant 0$ et $\lambda_i \geqslant 0$ tels que

(11) $$k_i = \sigma_i K + \varkappa_i, \quad l_i = \sigma_i L + \lambda_i,$$

(12) $$\text{ou bien } \varkappa_i < K, \text{ ou bien } \lambda_i < L.$$

Il en résulte d'après (10) que $\sigma_i Ka + \sigma_i L\beta = 0$, d'où en vertu de (3) et (11)

(13) $$p_i = p - [(k_i - \sigma_i K)a + (l_i - \sigma_i L)\beta] = p - (\varkappa_i a + \lambda_i \beta) \text{ pour } i = 1, 2, \ldots$$

La suite $\{\varkappa_i\}$ est bornée supérieurement, car en supposant le contraire, on aurait pour une suite partielle $\varkappa_{i_j} \geqslant K$, où $j = 1, 2, \ldots$, et

(14) $$\lim_{j\to\infty} \varkappa_{i_j} = \infty,$$

d'où $\lambda_{i_j} < L$ en vertu de (12), et on conclurait de (13) que

$$\begin{aligned} \varkappa_{i_j}|a| - |p| - L|\beta| &< \varkappa_{i_j}|a| - |p| - \lambda_{i_j}|\beta| = |\varkappa_{i_j} a| - (|p| + |\lambda_{i_j}\beta|) \\ &\leqslant |\varkappa_{i_j} a| - |p - \lambda_{i_j}\beta| \leqslant |\varkappa_{i_j} a - (p - \lambda_{i_j}\beta)| = |(p - \lambda_{i_j}\beta) - \varkappa_{i_j} a| \\ &= |p - (\varkappa_{i_j} a + \lambda_{i_j}\beta)| = |p_{i_j}| \end{aligned}$$

pour tout $j = 1, 2, \ldots$, d'où $\lim_{j\to\infty} |p_{i_j}| = \infty$ en vertu de (9) et (14), contrairement à (2).

On constate d'une manière tout à fait analogue que la suite $\{\lambda_i\}$ est aussi bornée supérieurement. Les deux suites étant en outre infinies et sans termes négatifs, il est facile de voir qu'il existe deux indices m et n tels que $m < n$, $\varkappa_m = \varkappa_n$ et $\lambda_m = \lambda_n$, d'où $p_m = p_n$ en vertu de (13). Dans le cas 1°, c'est donc encore la thèse (7) qui se présente.

2° Les nombres a et β sont arithmétiquement indépendants. Comme dans ce cas $a \neq 0$ et $\beta \neq 0$, on a $\lim_{i\to\infty} k_i = \lim_{i\to\infty} l_i = \infty$, en vertu de (2), (3) et (5).

On en conclut d'après (5) et (6), en tenant compte de l'indépendance de a et β et en appliquant le théorème de Kronecker (voir par exemple [1], p. 10), que la suite des restes $(k_i a + l_i \beta) \bmod |a|$ est dense dans l'intervalle $0 < x < |a|$. En vertu de (2) et (3), la suite $\{p_i\}$ l'est donc dans un intervalle, ce qui est la réalisation de la thèse (8). La démonstration du lemme 2 est ainsi achevée.

Enfin, le théorème de Ramsey (voir [2], p. 264) que nous ferons intervenir est le suivant: *$\mathfrak{N}$ étant l'ensemble des nombres naturels, $\mathfrak{N}^n$ sa n-ième puissance cartésienne et $\mathfrak{N}^n_* \subset \mathfrak{N}^n$ l'ensemble de tous les n-uples $(i_1, \ldots, i_n)$ tels que $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_n$, il existe dans $\mathfrak{N}$, pour toute décomposition $\mathfrak{N}^n_* = C_1 \cup C_2$, une suite infinie croissante $\{m_i\}$ et une valeur de l'indice $r = 1$ ou 2, telles que*

$$(m_{i_1}, \ldots, m_{i_n}) \in C_r \quad \textit{pour tout} \quad (i_1, \ldots, i_n) \in \mathfrak{N}^n_*.$$

Démonstration du théorème. Supposons par contre qu'il existe dans $\mathfrak{R}$ deux nombres a et β et un ensemble compact A ne satisfaisant pas à (1); on aurait donc

(16) $$A \subset \overline{(A^a \cup A^\beta) - A} = \overline{A^a - A} \cup \overline{A^\beta - A}.$$

Fixons arbitrairement un point $p\in A$. Nous allons définir par induction pour $s=0,1,\ldots$ deux nombres a_s et b_s (fonctions de s) ne prenant que les valeurs 0 ou 1, et une fonction réelle $\Phi_s(i_1,\ldots,i_s)$ de $(i_1,\ldots,i_s)\in\mathcal{N}_*^s$, en entendant par Φ_0 (fonction de 0 variables) un point fixé dans $\mathcal{R}$. Cette définition sera telle que l'on ait pour $s=0$

$$a_0=0=b_0,\qquad \Phi_0(\;)=p \tag{17}$$

et que les quatre conditions suivantes soient satisfaites pour tout $s=$ $=1,2,\ldots$:

$$a_s+b_s=1,\qquad a_sb_s=0, \tag{18}$$

$$\Phi_s(i_1,\ldots,i_s)\in\mathcal{R}-A, \tag{19}$$

$$\Phi_s(i_1,\ldots,i_s)-(a_s\alpha+b_s\beta)\in A, \tag{20}$$

(21) quelle que soit la suite croissante de nombres naturels $\{j_k\}$, il existe pour tout $(i_1,\ldots,i_T)\in\mathcal{N}_*^T$ où $0\leqslant T\leqslant s-1$ un $(i_1^*,\ldots,i_T^*)$ $\in\mathcal{N}_*^T$ tel que toute suite de nombres

$$\{\Phi_s(i_1,\ldots,i_T,j_{k_{T+1}},\ldots,j_{k_s})\},$$

où les $s-T$ derniers indices sont les indices courants de ses termes, contient une suite partielle qui converge vers le point

$$\Phi_T(i_1^*,\ldots,i_T^*)-\Big[\Big(\sum_{t=T}^{s-1}a_t\Big)\alpha+\Big(\sum_{t=T}^{s-1}b_t\Big)\beta\Big]$$

de l'ensemble A.

Soit d'abord $s=1$. On a conformément à (16) $p\in A\subset\overline{A^\alpha-A}\cup$ $\cup\,\overline{A^\beta-A}$; soit donc $\{p_i\}$ une suite convergente vers p et située entièrement dans $A^\alpha-A$, si une telle suite y existe, et située dans $A^\beta-A$ en cas contraire (et seulement en ce cas). Posons

$$\left.\begin{array}{l} a_1=1 \text{ et } b_1=0 \text{ lorsque } p_i\in A^\alpha-A\\ a_1=0 \text{ et } b_1=1 \text{ lorsque } p_i\in A^\beta-A\end{array}\right\}\text{ pour tous les } i=1,2,\ldots \text{ à la fois}$$

et, pour tous ces i,

$$\Phi_1(i)=p_i.$$

Les conditions (18)-(20) sont alors manifestement satisfaites pour $s=1$ et la condition (21) l'est en vertu de (17).

Soit ensuite $s=n$. Il s'agit de définir a_n, b_n et Φ_n à l'aide de a_s, b_s et Φ_s où $s<n$, de façon que les conditions (18)-(21) demeurent satisfaites.

Quel que soit $(i_1,\ldots,i_{n-1})\in\mathcal{N}_*^{n-1}$, on a

$$\Phi_{n-1}(i_1,\ldots,i_{n-1})-(a_{n-1}\alpha+b_{n-1}\beta)\in A \tag{22}$$

en vertu de la condition (20) pour $s=n-1$. Cette valeur de la fonction Φ_{n-1} appartient donc à la somme $\overline{A^\alpha-A}\cup\overline{A^\beta-A}$ en vertu de (16). Soit C_1 l'ensemble de tous les $(i_1,\ldots,i_{n-1})\in\mathcal{N}_*^{n-1}$ pour lesquels on a $\Phi_{n-1}(i_1,\ldots,i_{n-1})-(a_{n-1}\alpha+b_{n-1}\beta)\in\overline{A^\alpha-A}$. Soit $C_2=\mathcal{N}_*^{n-1}-C_1$. En appliquant le théorème de Ramsey à cette décomposition de $\mathcal{N}_*^{n-1}$, il existe dans $\mathcal{N}$ une suite infinie croissante $\{m_i\}$ et une valeur de $r=1$ ou 2, telles que

$$(m_{i_1},\ldots,m_{i_{n-1}})\in C_r\quad\text{pour tout}\quad(i_1,\ldots,i_{n-1})\in\mathcal{N}_*^{n-1}.$$

Posons

$$\begin{array}{llll} a_n=1 \text{ et } b_n=0 & \text{lorsque} & r=1,\\ a_n=0 \text{ et } b_n=1 & \text{lorsque} & r=2.\end{array} \tag{23}$$

Conformément à la définition de C_r, on a alors ou bien

$$\Phi_{n-1}(m_{i_1},\ldots,m_{i_{n-1}})-(a_{i_{n-1}}\alpha+b_{i_{n-1}}\beta)\in\overline{A^\alpha-A}$$

pour tous les $(i_1,\ldots,i_{n-1})\in\mathcal{N}_*^{n-1}$, ou bien

$$\Phi_{n-1}(m_{i_1},\ldots,m_{i_{n-1}})-(a_{i_{n-1}}\alpha+b_{i_{n-1}}\beta)\in\overline{A^\beta-A}$$

pour tous ces points. Définissons donc pour chacun d'eux la suite infinie

$$\{\Phi_n(i_1,\ldots,i_{n-1},l)\}\quad\text{où}\quad l=i_{n-1},\ i_{n-1}+1,\ldots$$

comme une suite convergente vers le point

$$\Phi_{n-1}(m_{i_1},\ldots,m_{i_{n-1}})-(a_{i_{n-1}}\alpha+b_{i_{n-1}}\beta)$$

et qui est située dans $A^\alpha-A$ lorsque $r=1$ et dans $A^\beta-A$ lorsque $r=2$. En formule: soit pour tout $l=i_{n-1},\ i_{n-1}+1,\ldots$

$$\Phi_n(i_1,\ldots,i_{n-1},l)\in\begin{cases}A^\alpha-A & \text{pour}\quad r=1,\\ A^\beta-A & \text{pour}\quad r=2,\end{cases} \tag{24}$$

$$\lim_{l\to\infty}\Phi_n(i_1,\ldots,i_{n-1},l)=\Phi_{n-1}(m_{i_1},\ldots,m_{i_{n-1}})-(a_{i_{n-1}}\alpha+b_{i_{n-1}}\beta). \tag{25}$$

On a alors pour $s=n$ (18) en vertu de (23), (19) en vertu de (24), et (20) en vertu de (23) et (24). Pour montrer que la condition (21) est également satisfaite, deux cas sont à envisager:

1° $0\leqslant T<n-1$. Alors, une suite infinie croissante $\{j_k\}$ de nombres naturels étant donnée, soit $(i_1,\ldots,i_T)\in\mathcal{N}_*^T$. D'après la définition des m_i, la suite $\{m_{j_k}\}$ est donc aussi croissante et on a $(m_{i_1},\ldots,m_{i_T})\in\mathcal{N}_*^T$. Vu (25), il vient

(26) $$\lim_{l\to\infty}\Phi_n(i_1,\ldots,i_T,j_{k_{T+1}},\ldots,j_{k_{n-1}},l) = \Phi_{n-1}(m_{i_1},\ldots,m_{i_T},m_{j_{k_{T+1}}},\ldots,m_{j_{k_{n-1}}})-(a_{n-1}\alpha+b_{n-1}\beta).$$

La condition (21), supposée satisfaite pour $s=n-1$, entraîne l'existence d'un $(i_1^*,\ldots,i_T^*)\in\mathfrak{N}_*^T$ tel que toute suite de nombres de la forme

$$\{\Phi_{n-1}(m_{i_1},\ldots,m_{i_T},m_{j_{k_{T+1}}},\ldots,m_{j_{k_{n-1}}})\},$$

où les indices courants sont les $(n-1)-T$ derniers indices croissants, contient une suite partielle qui converge vers le point

$$q=\Phi_T(i_1^*,\ldots,i_T^*)-\Big[\Big(\sum_{t=T}^{n-2}a_t\Big)\alpha+\Big(\sum_{t=T}^{n-2}b_t\Big)\beta\Big]\in A.$$

En vertu de (26), la suite des nombres

$$\{\Phi_n(i_1,\ldots,i_T,j_{k_{T+1}},\ldots,j_{k_{n-1}},l)\},$$

où les indices courants sont les $n-T$ derniers indices, évidemment croissants, contient donc une suite partielle qui converge vers le point

(27) $$q-(a_{n-1}\alpha+b_{n-1}\beta)=\Phi_T(i_1^*,\ldots,i_T^*)-\Big[\Big(\sum_{t=T}^{n-1}a_t\Big)\alpha+\Big(\sum_{t=T}^{n-1}b_t\Big)\beta\Big],$$

et ce point appartient à A, car A est compact et, q étant limite d'une suite de valeurs de la fonction Φ_{n-1}, le point (27) l'est de la suite des mêmes valeurs diminuées de $(a_{n-1}\alpha+b_{n-1}\beta)$, donc d'une suite de points de A d'après (22).

2° $T=n-1$. Alors, une suite infinie croissante $\{j_k\}$ de nombres naturels étant donnée, soit $(i_1,\ldots,i_{n-1})\in\mathfrak{N}_*^{n-1}$ et posons

$$i_1^*=m_{i_1},\quad\ldots,\quad i_{n-1}^*=m_{i_{n-1}}.$$

D'après la définition des m_i, on a donc dans ce cas $(i_1^*,\ldots,i_{n-1}^*)\in\mathfrak{N}_*^{n-1}$ et, vu (25), il vient

$$\lim_{k\to\infty}\Phi_n(i_1,\ldots,i_{n-1},j_k)=\Phi_{n-1}(i_1^*,\ldots,i_{n-1}^*)-(a_{n-1}\alpha+b_{n-1}\beta).$$

Cette limite étant un point de A en vertu de (22), la condition (21) pour $s=n$ est établie et les suites infinies $\{a_s\}$, $\{b_s\}$ et $\{\Phi_s\}$ assujetties aux conditions (18)-(21) se trouvent définies.

Substituons-y à présent $T=0$. En vertu de (17) et (21), on a donc

(28) $$p_i=p-\Big[\Big(\sum_{t=1}^{i}a_t\Big)\alpha+\Big(\sum_{t=1}^{i}b_t\Big)\beta\Big]\in A\qquad\text{pour tout}\quad i=1,2,\ldots$$

La suite $\{p_i\}$ est donc bornée supérieurement et inférieurement, A étant compact. L'hypothèse (16) entraîne en vertu du lemme 1 que A est un ensemble-frontière dans R; il en est donc de même à plus forte raison de la suite $\{p_i\}$ d'éléments de A, ce qui est la négation de (8). En même temps, en posant dans le lemme 2

$$k_i=\sum_{t=1}^{i}a_t\quad\text{ et }\quad l_i=\sum_{t=1}^{i}b_t$$

pour $i=1,2,\ldots$ et en tenant compte de (18) et (28), toutes les hypothèses de ce lemme se trouvent réalisées. On en a par conséquent la thèse (7), c'est-à-dire l'existence de m et n tels que $n<n$ et $p_m=p_n$. Vu (28), il en résulte que

$$\Big(\sum_{t=m+1}^{n}a_t\Big)\alpha+\Big(\sum_{t=m+1}^{n}b_t\Big)\beta=0,$$

ce qui entraîne, en vertu de la condition (21) appliquée à $T=m+1$ et $s=n+1$, l'existence d'un $(i_1^*,\ldots,i_T^*)\in\mathfrak{N}_*^T$ tel que $\Phi_T(i_1^*,\ldots,i_T^*)\in A$, contrairement à la condition (19) appliquée à $s=T$. Le théorème est ainsi démontré.

R e m a r q u e. Le théorème de Ramsey étant vrai pour les décompositions de l'ensemble $\mathfrak{N}_*^n$ en un nombre fini quelconque d'ensembles C_r, il est naturel de chercher à résoudre par l'affirmative le problème **P 337** en toute généralité à l'aide d'une généralisation du lemme 2 à un système fini quelconque de nombres réels $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ au lieu du couple α,β. C'est ainsi que la solution négative du problème suivant y suffirait:

Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ des nombres réels positifs, inférieurs à 1 et d'ailleurs quelconques. Portons sur une circonférence C de longueur 1, à partir d'un point fixé et dans un même sens de parcours, une suite infinie d'arcs de longueurs puisées arbitrairement parmi les nombres $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, le bout initial d'un arc suivant coïncidant toujours avec le bout final du précédent.

Est-ce que les bouts des arcs d'une telle suite peuvent former un ensemble infini non-dense sur la circonférence C? (1)

*

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma gratitude à MM. B. Knaster et A. Lelek pour leur concours à la mise au point de cette communication.

(1) Cf. aussi **P 325**, ce volume, p. 139.

TRAVAUX CITÉS

[1] J. F. Koksma, *Diophantische Approximationen*, Berlin 1936.

[2] F. P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, Proceedings of the London Mathematical Society, Series 2, 30 (1930), p. 264-286.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 12. 4. 1960

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VIII 1961 FASC. 2

UNE SIMPLE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME SUR LA DÉRIVÉE D'UNE FONCTION DE SAUTS

PAR

J. S. LIPIŃSKI (ŁÓDŹ)

On trouve dans la littérature diverses démonstrations du théorème: *la dérivée d'une fonction de sauts existe presque partout et est égale à* 0. Elles s'appuient sur le théorème de Lebesgue concernant la dérivabilité d'une fonction monotone. Le théorème de Lebesgue peut être démontré, il est vrai, par des moyens élémentaires, comme l'a montré F. Riesz [2], p. 6-9, mais alors sa démonstration est longue. Récemment R. P. Boas a donné dans sa communication [1] une simple démonstration du théorème sur la dérivée d'une fonction de sauts. Sa démonstration a l'avantage de ne pas utiliser le théorème de Lebesgue, mais elle fait intervenir cependant les notions de mesurabilité d'une fonction et d'ensemble mesurable au sens de Lebesgue. Elle s'appuie notamment sur le théorème d'après lequel les dérivées de Dini des fonctions monotones sont mesurables, et sur un autre d'après lequel tout ensemble mesurable contient un sous-ensemble fermé qui en diffère par un ensemble de mesure arbitrairement petite. R. Sikorski a proposé de démontrer le théorème sur la dérivée d'une fonction de sauts par des moyens encore plus simples. Je vais donner ici une démonstration qui réalise cette proposition. Je n'y utilise que le théorème de Borel sur le recouvrement et les propriétés élémentaires des ensembles de mesure nulle.

La démonstration donnée dans cette communication peut être étendue presque sans modifications aux fonctions singulières, c'est-à-dire celles qui admettent une variation arbitrairement petite dans le complément d'un ensemble fermé de mesure arbitrairement petite. Dans ce but, il faut remplacer, dans la démonstration du lemme III, l'ensemble composé de points $\{a_{i_k}\}$ par un ensemble fermé de mesure inférieure à $\varepsilon/2$ et dans le complément duquel la variation de la fonction est inférieure à $\varepsilon/4d$. Les autres modifications à faire sont insignifiantes et ne comportent aucune difficulté.

LEMME I. *Un intervalle fermé $\langle a, \beta\rangle$ étant couvert par un ensemble fini I d'intervalles ouverts, il est possible de choisir parmi eux une suite*