COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VIII 1961 FASC. 1

SUR DEUX GENRES D'ESPACES COMPLETS

PAR

A. LELEK (WROCŁAW)

Knaster [1] a attiré l'attention sur l'existence de deux genres topologiquement distincts d'espaces *complets* (dits aussi G_δ *absolus* ou G_δ *dans un espace compact*), c'est-à-dire qui sont homéomorphes à des espaces métriques complets.

Il a appelé un espace complet X *de I genre* ([1], p. 264) lorsqu'il existe une homéomorphie de X en sous-ensemble d'un espace Y compact, $h\colon X \to Y$, telle que

$$1^\circ \ h(X) = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i,$$

$$2^\circ \ \dim \mathrm{Fr}(G_i) < \dim X,$$

où G_i est un ensemble ouvert dans Y pour tout $i = 1, 2, \ldots$ Un espace complet X est *de II genre* lorsqu'il ne se laisse pas représenter de cette façon.

$\mathcal{I}$ désignant le segment $0 \leqslant x \leqslant 1$ de nombres réels et $\mathcal{N}$ l'ensemble des nombres irrationnels de $\mathcal{I}$, Knaster a montré, entre autres, que le produit cartésien $\mathcal{N} \times \mathcal{I}$ est un espace complet de II genre ([1], p. 263-264) et posé la question s'il en est de même des espaces $\mathcal{N} \times \mathcal{I}^n$ pour tout $n > 1$ ([1], p. 267, 3°). La réponse est affirmative en vertu du théorème 3 qui va suivre (voir p. 34, corollaire).

Le but de cette communication est de le démontrer et d'envisager quelques problèmes qui s'y rattachent.

1. Compactification. Appelons *compactification* d'un espace topologique X toute homéomorphie $h_c\colon X \to \overline{X}$, où $\overline{X}$ est un espace compact tel que $h_c(X)$ est dense dans lui.

THÉORÈME 1. *Pour qu'un espace complet X de dimension finie soit de I genre, il faut et il suffit qu'il existe une compactification $h_c\colon X \to \overline{X}$ telle que* $\dim[\overline{X} - h_c(X)] < \dim X$.

Démonstration. En admettant l'existence d'une telle compactification h_c et X étant complet, l'image $h_c(X)$ est complet, donc un G_δ dans $\overline{X}$ ([2], p. 337), donc de la forme $h_c(X) = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$, où G_i est ouvert dans $\overline{X}$ pour $i = 1, 2, \ldots$ On a par conséquent $\mathrm{Fr}(G_i) = \overline{G_i} - G_i \subset \overline{X} - h_c(X)$, d'où $\dim \mathrm{Fr}(G_i) \leqslant \dim[\overline{X} - h_c(X)] < \dim X$ en vertu de l'hypothèse sur h_c. On a ainsi 1° et 2°; la condition est donc suffisante pour que X soit de I genre.

Réciproquement, en admettant que X est de I genre, les conditions 1° et 2° sont satisfaites pour un espace compact Y, une homéomorphie $h\colon X \to Y$ et une suite $G_1, G_2, \ldots$ d'ensembles ouvertes dans Y. Posons $h_c = h$ et $\overline{X} = \overline{h(X)}$ (fermeture dans Y). On a

$$\overline{X} - h_c(X) = \overline{h(X)} - h(X) = \overline{h(X)} - \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} [\overline{h(X)} - G_i]$$
$$\subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (\overline{G_i} - G_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fr}(G_i),$$

car $\overline{h(X)} \subset \overline{G_i}$ pour $i = 1, 2, \ldots$ en vertu de 1°. Il en résulte, en posant

$$A_i = \mathrm{Fr}(G_i) \cap [\overline{X} - h_c(X)], \tag{1}$$

que

$$\overline{X} - h_c(X) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i. \tag{2}$$

En vertu de (1), les ensembles A_i sont fermés dans $\overline{X} - h_c(X)$ et on a $A_i \subset \mathrm{Fr}(G_i)$, d'où $\dim A_i \leqslant \dim \mathrm{Fr}(G_i) < \dim X$ en vertu de 2°. Vu (2), on a par conséquent (voir [2], p. 176) $\dim[\overline{X} - h_c(X)] \leqslant \dim A_i < \dim X$; la condition est donc nécessaire.

2. Espaces complets de I genre. Il s'ensuit aussitôt du théorème 1 que tout espace complet de I genre et de dimension 0 est compact (cf. [1], p. 263). Pour tout $n > 0$, il existe cependant des X complets de dimension n qui sont de I genre et qui ne sont même pas des F_σ *absolus* (c'est-à-dire des F_σ dans un espace compact, ou encore — ce qui revient au même — des sommes dénombrables d'ensembles compacts). En posant par exemple $X = \mathcal{J}^{n+1} - (\mathcal{J} - \mathcal{N})^{n+1}$, on a notoirement $\dim X = n$, $\overline{X} = \mathcal{J}^{n+1}$ et, le complément $(\mathcal{J} - \mathcal{N})^{n+1}$ de X à $\mathcal{J}^{n+1}$ étant dénombrable, il vient $\dim(\mathcal{J} - \mathcal{N})^{n+1} = 0 < \dim X$. Ainsi, vu le théorème 1, X est complet de I genre et n'est pas un F_σ dans $\mathcal{J}^{n+1}$ (en vertu du théorème de Baire).

Il existe aussi des X complets de dimension infinie qui sont de I genre sans être des F_σ absolus. Soit par exemple $X = \mathcal{J}^{\aleph_0} - g(\mathcal{J} - \mathcal{N})$ où $g\colon \mathcal{J} \to \mathcal{J}^{\aleph_0}$ est une homéomorphie du segment $\mathcal{J}$ en un sous-ensemble du cube $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ de Hilbert. Le complément $g(\mathcal{J} - \mathcal{N})$ de X à $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ étant dénombrable, on a $g(\mathcal{J} - \mathcal{N}) = \{p_1, p_2, \ldots\}$, d'où $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$ où $G_i = \mathcal{J}^{\aleph_0} - (p_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots$ Il en résulte que $\dim \mathrm{Fr}(G_i) = \dim(p_i) = 0 < \dim X$ pour $i = 1, 2, \ldots$; donc les conditions 1° et 2° sont satisfaites en posant $Y = \mathcal{J}^{\aleph_0}$ et h = identité, et X est complet de I genre. X n'est pas un F_σ dans $\mathcal{J}^{\aleph_0}$, car dans le cas contraire l'ensemble $X \cap g(\mathcal{J}) = g(\mathcal{J}) - g(\mathcal{J} - \mathcal{N}) = g(\mathcal{N})$ serait alors un F_σ absolu, ce qui est impossible, g étant une homéomorphie.

3. Espaces complets lacunaires. Je dis qu'un espace topologique X est *lacunaire* lorsque tout ensemble compact $F \subset X$ y est un ensemble frontière (c'est-à-dire que $\overline{X - F} = X$). L'ensemble $\mathcal{N}$ par exemple est un espace lacunaire.

THÉORÈME 2. *X étant un espace métrique compact, soient A un sous-ensemble de X, Y un espace complet lacunaire et $f\colon A \to Y$ une fonction continue telle que $f(A) = Y$, $0 \leqslant n \leqslant \dim f^{-1}(y)$ et que $f^{-1}(y)$ soit compact pour tout $y \in Y$. Alors on a de même $n \leqslant \dim(X - A)$.*

Démonstration. Supposons que l'on ait $\dim(X - A) \leqslant n - 1$, donc (voir [2], p. 182) que $X - A$ satisfasse à la condition D_{n-1}. Il en résulte, l'espace métrique X étant compact par hypothèse, qu'il y existe pour tout $j = 1, 2, \ldots$ une somme finie $H_j = H_{j0} \cup H_{j1} \cup \ldots \cup H_{jm_j}$ d'ensembles ouverts, tels que

$$X - A \subset H_j, \tag{3}$$

$$\delta(H_{ji}) < j^{-1} \quad \text{pour} \quad i = 0, 1, \ldots, m_j, \tag{4}$$

$$i_0 < i_1 < \ldots < i_n \leqslant m_j \text{ entraîne } H_{ji_0} \cap H_{ji_1} \cap \ldots \cap H_{ji_n} = 0 \tag{5}$$

(voir [2], p. 184). $X - H_j$ est donc compact et on a $X - H_j \subset A$ en vertu de (3). Par conséquent, $f(X - H_j)$ est compact et non-dense dans Y, f étant continue et Y lacunaire. Ainsi, l'ensemble $S = \bigcup_{j=1}^{\infty} f(X - H_j)$ est de I catégorie dans Y, d'où l'existence d'un point $y_0 \in Y - S$ en vertu du théorème de Baire. On en conclut que

$$f^{-1}(y_0) \subset f^{-1}(Y - S) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(S) = A - \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1} f(X - H_j)$$
$$\subset X - \bigcup_{j=1}^{\infty} (X - H_j) = \bigcap_{j=1}^{\infty} H_j.$$

Il s'ensuit en vertu de (4) et (5) grâce à la compacité de $f^{-1}(y_0)$ que cet ensemble satisfait à la condition D_{n-1}, d'où (voir [3], p. 72) $\dim f^{-1}(y_0) \leqslant n - 1$ contrairement à l'hypothèse.

4. Espaces complets de II genre. On a le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Quel que soit l'espace compact Z de dimension $n \geqslant 0$, l'espace $\mathcal{N}\times Z$ est complet de II genre.*

Démonstration. On a $\dim \mathcal{N}\times Z = \dim Z = n$, car $\dim \mathcal{N} = 0$. Soit h_c: $\mathcal{N}\times Z \to \overline{\mathcal{N}\times Z}$ une compactification de $\mathcal{N}\times Z$. Considérons la projection $p(\xi, z) = \xi$ pour tout $\xi \in \mathcal{N}$ et $z \in Z$, d'où p: $\mathcal{N}\times Z \to \mathcal{N}$ et $p(\mathcal{N}\times Z) = \mathcal{N}$, et la fonction continue $f = ph_c^{-1}$, d'où f: $h_c(\mathcal{N}\times Z) \to \mathcal{N}$ et $fh_c(\mathcal{N}\times Z) = \mathcal{N}$.

Il en résulte que pour tout $\xi \in \mathcal{N}$ on a

$$f^{-1}(\xi) = (ph_c^{-1})^{-1}(\xi) = h_c p^{-1}(\xi) = h_c[(\xi)\times Z],$$

d'où $\dim f^{-1}(\xi) = \dim Z = n$ et $f^{-1}(\xi)$ est compact. En posant $X = \overline{\mathcal{N}\times Z}$, $A = h_c(\mathcal{N}\times Z)$ et $Y = \mathcal{N}$, on a donc $n \leqslant \dim[\overline{\mathcal{N}\times Z} - h_c(\mathcal{N}\times Z)]$ en vertu du théorème 2 et, par conséquent, l'espace complet $\mathcal{N}\times Z$ n'est pas de I genre en vertu du théorème 1.

COROLLAIRE. *Tout G_δ de la forme $\mathcal{N}\times \mathcal{P}^n$ où $n > 0$ est de II genre.*

L'existence des espaces métrisables séparables et complets de II genre et de toute dimension finie étant ainsi établie, les questions suivantes s'imposent:

P 312. Existe-t-il un espace métrisable séparable et complet de II genre qui soit de dimension infinie?

P 313. Existe-t-il, pour tout espace X métrisable séparable complet de II genre et de dimension positive finie, un espace compact Z de dimension positive, tel que le produit cartésien $\mathcal{N}\times Z$ ait une image homéomorphe dans X?

TRAVAUX CITÉS

[1] B. Knaster, *Un théorème sur la compactification*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 25 (1952), p. 252-267.

[2] C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa 1952.

[3] — *Topologie II*, Warszawa 1952.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE WROCŁAW

Reçu par la Rédaction le 1. 12. 1959

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VIII 1961 FASC. 1

UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE KURATOWSKI SUR LA CARACTÉRISATION MÉTRIQUE DE LA RÉTRACTION

PAR

W. NITKA (WROCŁAW)

Soient M un espace métrique, ϱ la distance dans M et $R \subset M$. Pour tout point $x \in M$, soit $\varrho(x, R) = \inf\limits_{y \in R} \varrho(x, y)$ la distance entre x et R.

Appelons *convexité de R relative à ϱ* au sens de de Groot [2] la propriété métrique suivante de R:

(G) $x \in R$, $y \in R$, $z \in M$ et $\varrho(x, z) + \varrho(z, y) = \varrho(x, y)$ entraînent $z \in R$.

R est dit un *rétracte* de M (notion due à Borsuk [1]) lorsqu'il existe une fonction continue r: $M \to R$ (dite *rétraction*) telle que $r(y) = y$ pour tout $y \in R$.

Considérons encore la propriété métrique suivante d'un $R \subset M$ relative à ϱ:

(K) il existe une fonction r: $M \to R$ faisant correspondre à tout point $x \in M$ un point $r(x) \in R$ tel que $\varrho(x, R) = \varrho(x, r(x))$.

Kuratowski [4] a démontré que

(1) si M est compact, R fermé et R possède la propriété (K) relativement à ϱ, la fonction r dont il y est question est continue (R est donc un rétracte de M);

(2) réciproquement, si R est un rétracte de M, il existe dans M une métrique ϱ^* topologiquement équivalente à ϱ (c'est-à-dire que toute suite de points de M qui est convergente dans ϱ l'est dans ϱ^* et réciproquement) et telle que R possède la propriété (K) relativement à ϱ^*.

Il suffit d'ailleurs dans (1) de ne supposer que la compacité de R.

Convenons de dire qu'une métrique est conforme à la topologie d'un espace dans lequel elle est définie lorsque la convergence d'une suite quelconque de ses points, d'après sa topologie, vers l'un de ses points équivaut à celle vers le même point d'après la métrique en question.

On a la généralisation suivante de (2):