Since

$$\bar{f}_{k+1} = \sup_t |\varphi_{n-1}(t) y_k^{(n-1)} + \ldots + \varphi_0(t) y_k|,$$

we have

$$|R_k| \leqslant \frac{1}{1-S} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{1}{(j-1)!\,|a_i|^{k_i-j+1}} \left| \frac{d^{j-1}}{dr^{j-1}} \left\{ \frac{1}{\Phi_i(r)} \right\}_{r=r_i} \right| \times$$

$$\times \sup_t |\varphi_{n-1}(t) y_k^{(n-1)} + \ldots + \varphi_0(t) y_k|.$$

Thus inequality (27) has been proved. Inequality (28) results from (27) and (29).

§ 3. As an example let us consider the differential equation

(33) $$y'' + 7y' + 2y = A, \qquad A = \text{const}.$$

If we assume $\varphi_1(t) = 8$ and $\varphi_0(t) = 4$ and express the functions $\psi_1(t) = 7$ and $\psi_0(t) = 2$ in form (5), then the condition $S < 1$ will not be fulfilled, and the series formed from the bounded solutions of the corresponding sequence of differential equations will be divergent. However, if we express $\psi_1(t) = 7$ and $\psi_0(t) = 2$ in form (5), assuming $\varphi_1(t) = 10$ and $\varphi_0(t) = 0$, then the condition $S < 1$ will not be satisfied, and nevertheless the series formed from the bounded solutions of the corresponding sequence of differential equations will be convergent to the bounded solution of equation (33).

This shows that the conditions given in theorem 2 are only sufficient for the existence of a bounded solution of the differential equation (6).

REFERENCES

[1] C. Grajek, *On determining bounded solutions of a linear differential equation of order n*, Colloquium Mathematicum 9 (1962), p. 119-125.

[2] И. А. Биргер, *Некоторые математические методы решения инженерных задач*, Москва 1956.

Reçu par la Rédaction le 4. 6. 1961

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. IX 1962 FASC. 2

SUR L'ORDRE DE GRANDEUR DES COEFFICIENTS DE FOURIER D'UNE CLASSE SPÉCIALE DES FONCTIONS L^p

PAR

M. TOMIĆ (BELGRADE)

Soit

(1) $$\mathfrak{S}[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

la série de Fourier d'une fonction L-intégrable. Posons

$$\Delta f = f(x+h) - f(x-h), \qquad h > 0, \qquad 0 < \alpha \leqslant 1 \quad \text{et} \quad p \geqslant 1.$$

Alors $f(x)$ appartient à $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$ si

(2) $$\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta f|^p dx \right\}^{1/p} = O(h^\alpha) \quad \text{où} \quad h \to 0$$

et à $\mathrm{Lip}^*(\alpha, p)$ si on a (2) avec o au lieu de O. Une fonction de la classe $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$ appartient nécessairement à L^p (voir [1]). Il est aussi connu que $(f(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$ entraîne $a_\nu, b_\nu = O(\nu^{-\alpha})$ et que $f(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$ entraîne $o(\nu^{-\alpha})$. Cet ordre ne peut pas être amélioré.

Nous allons donner dans cette communication des bornes inférieures et supérieures plus précises pour les coefficients de Fourier des fonctions L^p où $p \geqslant 2$, en supposant en outre que ces coefficients sont monotones par valeur absolue.

Soit $\mathfrak{S}[f]$ une série de Fourier de la forme (1). Posons

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \qquad 1 < p \leqslant 2, \qquad 2 \leqslant q < \infty \quad \text{et} \quad f(x) \in L^q.$$

Désignons par $\omega_q(\delta)$ le module de continuité intégrale d'ordre q de $f(x)$, c'est-à-dire que

$$\omega_q(\delta) = \omega_q(\delta, f) = \sup_{0 \leqslant h \leqslant \delta} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x-h)|^q dx \right\}^{1/q}.$$

THÉORÈME. *Si pour une seule valeur de ε telle que $0 \leqslant \varepsilon < 1-1/p$ et pour une seule valeur de ε_1 telle que $0 \leqslant \varepsilon_1 < 1/p$, on a*

$$\text{(A)} \qquad n^{1-\varepsilon}(|a_n|+|b_n|)\downarrow,$$

$$\text{(B)} \qquad n^{1+\varepsilon_1}(|a_n|+|b_n|)\uparrow$$

à partir d'un certain n_0, on a également pour tout $n > n_0$

$$(*) \qquad C_1\frac{\omega_q(\pi/4n)}{n^{1/p}} \leqslant (|a_n|+|b_n|) \leqslant C_2\frac{\omega_q(\pi/4n)}{n^{1-1/p}},$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes positives indépendantes de n.

En particulier, lorsque $p = q = 2$, la formule $(*)$ prend la forme

$$C_1\frac{\omega_2(\pi/4n)}{\sqrt{n}} \leqslant (|a_n|+|b_n|) \leqslant C_2\frac{\omega_2(\pi/4n)}{\sqrt{n}},$$

en supposant que la suite $(|a_n|+|b_n|)$ satisfait aux conditions (A) *et* (B) [1] *pour une seule valeur de ε telle que $0 \leqslant \varepsilon < 1/2$ et pour une seule valeur de ε_1 telle que $0 \leqslant \varepsilon_1 < 1/2$.*

Remarquons que, pour la seconde partie de $(*)$, nous n'avons besoin que de la condition (B), tandis que la première partie de $(*)$ exige les deux conditions (A) et (B).

Démonstration. On a d'abord

$$f(x+h)-f(x-h) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n\sin nx+b_n\cos nx)\sin nh.$$

Posons

$$T_n(x) = \sum_{n}^{2n}(-\varepsilon_\nu\sin\nu x+\eta_\nu\cos\nu x), \qquad \varepsilon_\nu = \operatorname{sign} a_\nu, \qquad \eta_\nu = \operatorname{sign} b_\nu.$$

En vertu de l'inégalité $\sin\theta \geqslant (2\theta)/\pi$ où $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, on a alors pour $h = \pi/4n$ par l'application de l'inégalité de Hölder

$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4n}\cdot 2\pi\sum_{n}^{2n}\nu(|a_\nu|+|b_\nu|) \leqslant 2\pi\sum_{n}^{2n}(|a_\nu|+|b_\nu|)\sin\nu h$$

$$(3) \qquad = \int_{-\pi}^{\pi}[f(x+h)-f(x-h)]T_n(x)\,dx$$

$$\leqslant \Big\{\int_{-\pi}^{\pi}|T_n(x)|^p dx\Big\}^{1/p}\cdot\Big\{\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+h)-f(x-h)|^q dx\Big\}^{1/q}.$$

[1] Dans lesquelles les signes $\downarrow$ et $\uparrow$ désignent la décroissance monotone et la croissance monotone respectivement.

Lorsque $1 < p \leqslant 2$, on a

$$(4) \qquad \Big\{\int_{-\pi}^{\pi}|T_n(x)|^p dx\Big\}^{1/p} \leqslant (2\pi+2(n+1)\pi)^{1/p} \leqslant C' n^{1/p}.$$

Pour établir cette inégalité, désignons par E_n l'ensemble des x du segment $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ pour lesquels $|T_n(x)|^p \leqslant 1$ et par CE_n le complément de E_n par rapport à ce segment, c'est-à-dire l'ensemble des x pour lesquels $|T_n(x)|^p > 1$. On a alors

$$\Big\{\int_{-\pi}^{\pi}|T_n|^p dx\Big\}^{1/p} = \Big\{\int_{E_n}|T_n|^p dx+\int_{CE_n}|T_n|^p dx\Big\}^{1/p}$$

$$\leqslant \Big\{2\pi+\int_{-\pi}^{\pi}|T_n|^2 dx\Big\}^{1/p} \leqslant [2\pi+2(n+1)\pi]^{1/p}.$$

Il s'ensuit donc en vertu de (3) et (4) que

$$(5) \qquad \frac{\pi}{n}\sum_{n}^{2n}\nu(|a_\nu|+|b_\nu|) \leqslant C' n^{1/p}\omega_q\Big(\frac{\pi}{4n}\Big).$$

D'autre part, il résulte de (B) que

$$\frac{\pi}{n}\sum_{n}^{2n}\nu(|a_\nu|+|b_\nu|) = \frac{\pi}{n}\sum_{n}^{2n}\nu^{1+\varepsilon_1}(|a_\nu|+|b_\nu|)\nu^{-\varepsilon_1}$$

$$\geqslant \frac{\pi}{n}n^{1+\varepsilon_1}(|a_n|+|b_n|)\sum_{n}^{2n}\nu^{-\varepsilon_1} \geqslant 2^{-\varepsilon_1}\pi(|a_n|+|b_n|)(n+1),$$

d'où en vertu de (5),

$$(|a_n|+|b_n|) \leqslant C_2\frac{\omega_q\Big(\dfrac{\pi}{4n}\Big)}{n^{1-1/p}},$$

c'est-à-dire la seconde partie de $(*)$.

Pour en établir la première partie, partons du théorème de Hausdorff-Young (voir [2], p. 101) [2] avec $0 \leqslant h \leqslant \pi/4n$:

$$(6) \qquad \Big\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+h)-f(x-h)|^q dx\Big\}^{1/q} \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)^p|\sin kh|^p\Big)^{1/p}$$

$$\leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p|\sin kh|^p\Big)^{1/p}+\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)^p|\sin kh|^p\Big)^{1/p} = I_1+I_2.$$

[2] Dans le cas où $p = q = 2$, la démonstration de cette partie de $(*)$ résulte de la formule de Parseval.

D'une part, on a en vertu de l'inégalité $|\sin x| < |x|$ et de (B) pour $0 \leqslant h \leqslant \pi/4n$

$$I_1 \leqslant \frac{\pi}{4n}\Big(\sum_{k=1}^{n}[k(|a_k|+|b_k|)]^p\Big)^{1/p}$$

$$= \frac{\pi}{4n}\Big\{\sum_{1}^{n}[k^{1+\varepsilon_1}(|a_k|+|b_k|)]^p\frac{1}{k^{p\varepsilon_1}}\Big\}^{1/p}$$

$$\leqslant \frac{\pi}{4n}n^{1+\varepsilon_1}(|a_n|+|b_n|)\Big\{\sum_{1}^{n}\frac{1}{k^{p\varepsilon_1}}\Big\}^{1/p}.$$

A cause de $p\varepsilon_1 < 1$, le dernier facteur est d'ordre $O(n^{-p\varepsilon_1+1})^{1/p} = O(n^{-\varepsilon_1+1/p})$ et il vient

$$I_1 \leqslant C_1' n^{\varepsilon_1}(|a_n|+|b_n|)n^{-\varepsilon_1+1/p} = C_1'(|a_n|+|b_n|)n^{1/p}. \tag{7}$$

D'autre part, on a pour tout h

$$I_2 = \Big\{\sum_{n+1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)^p|\sin kh|^p\Big\}^{1/p} \leqslant \Big\{\sum_{n+1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)^p\Big\}^{1/p}$$

$$= \Big\{\sum_{n+1}^{\infty}k^{p-p\varepsilon}(|a_k|+|b_k|)^p\frac{1}{k^{p-p\varepsilon}}\Big\}^{1/p}.$$

En vertu de (A), la dernière somme peut être majorée par le produit

$$n^{1-\varepsilon}(|a_n|+|b_n|)\Big\{\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{p-p\varepsilon}}\Big\}^{1/p},$$

dont le dernier facteur est convergent d'ordre $O(n^{1/p-1+\varepsilon})$ à cause de $p-p\varepsilon > 1$, c'est-à-dire de $\varepsilon < 1-1/p$. On a donc

$$I_2 \leqslant C_1''(|a_n|+|b_n|)n^{1/p}. \tag{8}$$

Les formules (6), (7) et (8) entraînent directement la première partie de (*).

TRAVAUX CITÉS

[1] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *A convergence criterion for Fourier series*, Mathematische Zeitschrift 28 (1928), p. 610-634.

[2] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, volume 2, Cambridge (USA) 1959.

ÉCOLE DES MINES, BELGRADE, YOUGOSLAVIE

Reçu par la Rédaction le 22. 7. 1961

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. IX 1962 FASC. 2

ON CHANGE OF VARIABLE IN THE DENJOY-PERRON INTEGRAL (II)

BY

K. KRZYŻEWSKI (WARSAW)

This paper continues the investigations concerning change of variable in the Denjoy-Perron integral contained in [2]. The notation and terminology used in this paper are the same as in [2]. We begin with the following definitions:

A function F defined on an interval I will be said to be *non-decreasing* (resp. *non-increasing*) *in the restricted sense on a set* $E \subset I$ if for every pair of points $x_1, x_2, x_1 < x_2$, belonging to $[\inf E, \sup E]$, $F(x_1) \leqslant F(x_2)$ (resp. $F(x_1) \geqslant F(x_2)$), provided that at least one of the points x_1, x_2 belongs to E. A function which is either non-decreasing or non-increasing in the restricted sense on a set E will be termed *monotone in the restricted sense*, or M_* *on* E. A function F defined on an interval I will be termed MG_* *on a set* $E \subset I$ if E is expressible as the sum of a finite or enumerable sequence of sets on each of which F is M_*.

Let us denote by $N(F; I)$ the set of the values assumed an infinity of times by a function F on an interval I.

A function F will be said to *fulfil the condition* (T_0) on an interval I if (i) the set $N(F; I)$ is at most enumerable; (ii) for each y belonging to $N(F; I)$ the set $F^{-1}(y) - \mathrm{int}(F^{-1}(y))$ is at most enumerable.

We shall say that a function F is *non-decreasing* (resp. *non-increasing*) *at a point* x_0 if there exists a neighbourhood of x_0 such that for x belonging to this neighbourhood

$$(x-x_0)\big(F(x)-F(x_0)\big) \geqslant 0 \qquad (\text{resp. } (x-x_0)\big(F(x)-F(x_0)\big) \leqslant 0).$$

A function which is either non-decreasing or non-increasing at x_0 will be termed *monotone at* x_0. We shall now prove the following

THEOREM 1. *Let F be a continuous function defined on an interval $[a, b]$. Then the following conditions are equivalent*:

(i) *F is MG_* on $[a, b]$*,

(ii) *every perfect subset of $[a, b]$ contains a portion on which the function F is M_**,