Einige algebraische Äquivalente zum Auswahlaxiom

von

J. Schmidt (Köln)

1. Einleitung: bekannte Äquivalente. Wir nehmen den Begriff der *Algebra* hier im Sinne von E. Marczewski [1]: als ein Paar $(A, \boldsymbol{F})$, bestehend aus einer Menge A und einer Menge $\boldsymbol{F}$ [2] von eindeutigen, unbeschränkt ausführbaren, endlichstelligen *Operationen* f in A, d.h. von eindeutigen Abbildungen f von $A^k = A \times \ldots \times A$ in A; k mit $0 \leqslant k < \omega_0$ ist die (von f abhängige, durch f eindeutig bestimmte) *Stellenzahl* von f. Eine Teilmenge $B \subseteq A$ ist *abgeschlossen*, wenn $f(B^k) \subseteq B$ für jedes $f \in \boldsymbol{F}$ [3]; eine solche (und nur eine solche) Teilmenge wird durch Einschränkung der Operationen selbst zu einer Algebra, einer *Unteralgebra* von $(A, \boldsymbol{F})$. Das System $\mathfrak{H}$ aller Unteralgebren (abgeschlossenen Teilmengen) [4] ist ein *Hüllensystem* über A, insofern $A \in \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}$ gegenüber beliebiger Durchschnittsbildung abgeschlossen ist. Über dieses Hüllensystem sagt der

Durchschnittssatz für voll durchschnittsirreduzible Unteralgebren (Birkhoff-Frink) [5]. *In einer Algebra $(A, \boldsymbol{F})$ ist jede Unteralgebra B Durchschnitt von voll durchschnittsirreduziblen Unteralgebren.*

---

[1] Marczewski [5]; siehe auch Birkhoff ([1], Def. 1), J. Schmidt ([11], § 2) (in letzterer Arbeit wurde allerdings die Stellenzahl $k = 0$ noch nicht zugelassen).

[2] Für die Zwecke dieser Arbeit, in der wir immer nur eine feste Algebra $(A, \boldsymbol{F})$, allenfalls noch ihre Unteralgebren, betrachten, ist diese Definition ausreichend. In der allgemeinen Theorie jedoch, in der man auch mehrere solche Algebren gleichzeitig wird behandeln müssen, wird man die Operationen $f \in \boldsymbol{F}$ zu indizieren haben: anstelle der Operationen menge $\boldsymbol{F}$ legt man eine Operationen familie $(f_i)_{i \in I}$ (I irgendeine abstrakte Menge als Indexbereich) zugrunde.

[3] Die leere Menge $\emptyset$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $k > 0$ für sämtliche auftretenden Stellenzahlen k, wenn die Algebra $(A, \boldsymbol{F})$ „konstantenfrei" ist.

[4] In der Praxis pflegt man ja abgeschlossene Teilmengen und Unteralgebren miteinander zu identifizieren.

[5] In des Verf. Note [10], p. 29, Mc Coy und L. Fuchs zugeschrieben, weil diese Autoren bereits, ohne den Satz in voller Schärfe zu formulieren, die wesentlichen dahin führenden Schlüsse gemacht haben. In verbandstheoretischer Form bei Birkhoff-Frink ([2], Theorem 7); siehe auch Diener [3].

Dabei heißt die Unteralgebra C *voll durchschnittsirreduzible*, wenn sie sich nicht als Durchschnitt anderer Unteralgebren darstellen läßt (6).

Der Durchschnittssatz impliziert den und wird impliziert von dem

EXISTENZSATZ FÜR VOLL DURCHSCHNITTSIRREDUZIBLE UNTERALGEBREN. *In einer Algebra $(A, \boldsymbol{F})$ gibt es zu je zwei Unteralgebren B und B' mit $B' \underset{\neq}{\not\subseteq} B$ eine voll durchschnittsirreduzible Unteralgebra C mit $B \subseteq C$ und $B' \underset{\neq}{\not\subseteq} C$.*

Spezialisierung auf den Fall $B' = A$ liefert das

KOROLLAR. *In einer Algebra $(A, \boldsymbol{F})$ gibt es zu jeder Unteralgebra $B \neq A$ eine voll durchschnittsirreduzible Unteralgebra $C \supseteq B$* (7).

Zu den voll durchschnittsirreduziblen Unteralgebren gehören insbesondere die maximalen unter den von A verschiedenen Unteralgebren. Über diese *maximalen Unteralgebren* sagt der

DURCHSCHNITTSSATZ FÜR MAXIMALE UNTERALGEBREN (B. H. Neumann) (8). *In einer Algebra $(A, \boldsymbol{F})$ ist der Durchschnitt aller maximalen Unteralgebren gleich der Menge aller absolut dispensablen Elemente.*

Dabei heißt *absolut dispensabel* oder *Nicht-Generator* ein Element $a \in A$ mit der Eigenschaft, daß mit $M \subseteq A$ allemal auch $M - \{a\}$ eine Erzeugende ist von A; M ist *Erzeugende* von A, wenn $\mathrm{C}M$ (die von M erzeugte = die kleinste M enthaltende Unteralgebra) gleich A ist.

Der Durchschnittssatz impliziert den und wird impliziert von dem

EXISTENZSATZ FÜR MAXIMALE UNTERALGEBREN. *In einer Algebra $(A, \boldsymbol{F})$ gibt es zu jedem nicht absolut dispensablen Element $a \in A$ eine maximale Unteralgebra C mit $a \notin C$.*

Die Elemente einer minimalen Erzeugenden M können nicht absolut dispensable sein; demnach hat man das

KOROLLAR (9). *In einer Algebra $(A, \boldsymbol{F})$ gibt es zu jedem Element a einer minimalen Erzeugenden M eine maximale Unteralgebra C mit $a \notin C$.*

In *endlich erzeugten*, d.h. eine endliche Erzeugende besitzenden Algebren gilt ein weiterer

(6) Indem man den auf die Grundmenge A bezogenen relativen Durchschnitt des leeren Mengensystems sinnvoll gleich A setzt (das Infimum der leeren Menge im vollständigen Verbande $\mathfrak{P}(A)$ gleich seinem Einselement A), wird man die größte Unteralgebra, eben A, als reduzibel zu rechnen haben.

(7) Hier ist die in Fußnote 6 getroffene Vereinbarung zu beachten. Eine verbandstheoretische Formulierung dieses Korollars bei Diener [3], p. 342.

(8) Diese Verallgemeinerung eines Satzes von Frattini über endliche Gruppen geht auf B. H. Neumann zurück; cf. J. Schmidt [10], p. 36.

(9) J. Schmidt [10], p. 40.

EXISTENZSATZ FÜR MAXIMALE UNTERALGEBREN (Krull) (10). *In einer endlich erzeugten Algebra $(A, \boldsymbol{F})$ gibt es zu jeder Unteralgebra $B \neq A$ eine maximale Unteralgebra $C \supseteq B$.*

Von diesen Sätzen hat Verfasser gezeigt, daß sie mit dem Auswahlaxiom äquivalent sind (11).

2. Hüllentheoretische Unabhängigkeit und Auswahlaxiom. Vorstehende Definitionen und Sätze sind insofern rein „hüllentheoretischer“ Natur, als sie nur Kenntnis des Hüllensystems $\mathfrak{H}$ oder, was auf dasselbe hinausläuft, des zugehörigen *Hüllenoperators* C voraussetzen; demgemäß lassen sie sich als Definitionen und Sätze über *algebraische* — wie oben aus algebraischen Strukturen $\boldsymbol{F}$ erzeugte — Hüllensysteme (Hüllenoperatoren) (12) fassen.

Hüllentheoretischer Natur ist auch der folgende Unabhängigkeitsbegriff: eine Teilmenge M der Algebra $(A, \boldsymbol{F})$ heißt *hüllentheoretisch unabhängig* (13), wenn sie minimale Erzeugende ist der von ihr erzeugten Unteralgebra $\mathrm{C}M$ oder, was auf dasselbe hinausläuft, wenn „keines ihrer Elemente von den übrigen abhängt“, $a \notin \mathrm{C}(M - \{a\})$ für alle $a \in M$.

Das System $\mathfrak{M}_h$ der hüllentheoretisch unabhängigen Teilmengen von $(A, \boldsymbol{F})$ ist von *finitem Charakter* im Sinne von Tukey: $M \in \mathfrak{M}_h$ genau dann, wenn $F \in \mathfrak{M}_h$ für jede endliche Menge $F \supseteq M$; überdies ist $\mathfrak{M}_h$ nichtleer: die leere Menge $\emptyset$ gehört zu $\mathfrak{M}_h$. Das Lemma von Teichmüller und Tukey über Mengensysteme von finitem Charakter liefert den

EXISTENSATZ FÜR MAXIMALE HÜLLENTHEORETISCH UNABHÄNGIGE TEILMENGEN. *In einer Algebra $(A, \boldsymbol{F})$ gibt es zu jeder hüllentheoretisch unabhängigen Teilmenge M_0 eine maximale hüllentheoretisch unabhängige Teilmenge $M \supseteq M_0$.*

Kurz: jede hüllentheoretisch unabhängige Teilmenge läßt sich zu einer maximalen derartigen ergänzen („hüllentheoretischer Ergänzungssatz“). Spezialisierung auf den Fall $M_0 = \emptyset$ liefert das

(10) Verallgemeinerung eines ringtheoretischen Satzes von Krull; siehe J. Schmidt [10], p. 40. Als Satz der Metamathematik auch schon bei Lindenbaum (in dieser Form mitgeteilt von Tarski), als Satz der Gruppentheorie bei B. H. Neumann.

(11) J. Schmidt [10], Beisp. 4, pp. 31, 41; siehe auch Diener [3]. Interessant ist, daß auch dem äußeren Anschein nach extreme Spezialfälle dieser Sätze noch mit dem Auswahlaxiom äquivalent sein können, so z. B. der obige Krullsche Existenzats für maximale Unteralgebren in seiner Spezialisierung auf die Ideale eines distributiven Verbandes mit Einselement; cf. Mrówka [7], (T_2).

(12) Innere Kennzeichnungen der algebraischen Hüllensysteme bei Birkhoff-Frink [2], Theorem 1, J. Schmidt [9], §§ 3, 5 und [10], § 3.

(13) J. Schmidt [9], § 7, [10], § 7, [11], p. 235; der Zusatz „hüllentheoretisch” hier zur Unterscheidung von anderen Unabhängigkeitsbegriffen. Diese naheliegende Idee der Unabhängigkeit hat eine lange Vorgeschichte; zu nennen wären in diesem Zusammenhang Tarski für die Metamathematik, Teichmüller für die Algebra.

KOROLLAR. *In einer Algebra $(A, \boldsymbol{F})$ existiert eine maximale hüllentheoretisch unabhängige Teilmenge M.*

Auch dieser Existenzsatz, ja noch sein Korollar ist mit dem Auswahlaxiom äquivalent. Zum Beweise betrachten wir eine Menge A von geordneten Paaren (x, y); ihr Definitionsbereich sei E: $x \in E$, sofern mindestens ein y mit $(x, y) \in A$ existiert. Gesucht wird eine Menge $M \subseteq A$ derart, daß zu jedem $x \in E$ genau ein y mit $(x, y) \in M$ existiert. Wir machen A zur Algebra $(A, \boldsymbol{F})$, indem wir jedem Paar $(a, b) \in A$ eine einstellige Operation f_{ab} wie folgt zuordnen:

$$f_{ab}(x, y) = \begin{cases} (a, b), & \text{wenn} \quad x = a, \\ (x, y), & \text{wenn} \quad x \neq a. \end{cases}$$

Für eine beliebige Teilmenge $M \subseteq A$ zeigt man dann leicht: die von M erzeugte Unteralgebra $\mathrm{C}M$ besteht genau aus denjenigen Elementen $(x, y) \in A$, deren erste Koordinate x zum Definitionsbereich von M gehört. Hieraus folgt: hüllentheoretisch unabhängig sind genau die eindeutigen Mengen $M \subseteq A$, die $M \subseteq A$ derart, daß zu jedem $x \in E$ höchstens ein y mit $(x, y) \in M$ existiert. Obiges Korollar sichert dann die Existenz einer „Auswahlfunktion" zu A.

3. Algebraische Unabhängigkeit. E. Marczewski hat die Bedeutung eines „algebraischen" Unabhängigkeitsbegriffes herausgestellt, in den die Operationen $f \in \boldsymbol{F}$ unmittelbar eingehen und der demgemäß wesentlich stärker ist als der hüllentheoretische. Zu seiner Formulierung leiten wir aus der Menge $\boldsymbol{F}$ der *primären* (14) Operationen die Menge $\boldsymbol{H}$ der *sekundären* (15) Operationen ab als die kleinste Operationenmenge, welche

1. alle Projektions- oder „identischen" Operationen $e^k_\varkappa(x_1, \ldots, x_k) = x_\varkappa$ $(x_1, \ldots, x_k \in A)$ mit $k = 1, 2, \ldots$, $\varkappa = 1, \ldots, k$ enthält und

2. gegenüber „direkter Komposition" mit primären Operationen abgeschlossen ist: wenn $f \in \boldsymbol{F}$ (Stellenzahl k) und $h_1, \ldots, h_k \in \boldsymbol{H}$ (gemeinsame Stellenzahl l), so $f(h_1, \ldots, h_k) \in \boldsymbol{H}$, wobei $f(h_1, \ldots, h_k)(x_1, \ldots, x_l) = f\big(h_1(x_1, \ldots, x_l), \ldots, h_k(x_1, \ldots, x_l)\big)$ $(x_1, \ldots, x_l \in A)$ (16).

Es gilt der

SATZ (G. Birkhoff) (17). *Die von M erzeugte Unteralgebra $\mathrm{C}M$ besteht genau aus denjenigen Elementen $x \in A$, die sich in der Form $x = h(x_1, \ldots, x_l)$ mit $h \in \boldsymbol{H}$, $x_1, \ldots, x_l \in M$ darstellen lassen.*

(14) Marczewski [5]: fundamental operations; an anderer Stelle nennt Marczewski diese Operationen primitiv.

(15) Marczewski [5]: algebraic operations (nach dem Vorbild von Mc Kinsey-Tarski [6], p. 161); an anderer Stelle nennt Marczewski diese Operationen elementar. Birkhoff [1], p. 312: compound operations.

(16) Marczewski [5], siehe auch Mc Kinsey-Tarski [6], p. 161. Es sind zahlreiche äquivalente Varianten dieser Definition möglich.

(17) Birkhoff [1], p. 312.

Man beweist leicht den

ZUSATZ. *Man kann diese Darstellung von $x \in \mathrm{C}M$ stets so einrichten, daß die Elemente $x_1, \ldots, x_l$ voneinander verschieden sind.*

Weiter gilt der

SATZ (E. Marczewski) (18). *Folgende Aussagen über die Teilmenge M der Algebra $(A, \boldsymbol{F})$ sind äquivalent:*

1. *ist $g(x_1, \ldots, x_l) = h(x_1, \ldots, x_l)$ mit sekundären Operationen g und h und l verschiedenen Elementen $x_1, \ldots, x_l \in M$, so ist allemal $g = h$;*

2. *jede Belegung β von M mit Werten aus der Menge A läßt sich zu einem Homomorphismus φ der Unteralgebra $\mathrm{C}M$ in die Algebra A fortsetzen.*

Bedingung 1 sichert also, über die Existenz der Darstellung eines jeden $x \in \mathrm{C}M$ nach dem obigen Satz von Birkhoff hinaus, eine gewisse Eindeutigkeit dieser Darstellung; „dual" dazu sichert Bedingung 2, über die stets geltende Eindeutigkeit der homomorphen Fortsetzung hinaus, deren Existenz. Nach E. Marczewski heißt eine Menge M mit den obigen Eigenschaften eine (*algebraisch*) *unabhängige* Teilmenge der Algebra (A, F). Eine solche ist, sofern die Grundmenge A mindestens zwei Elemente enthält, hüllentheoretisch unabhängig; die Umkehrung ist nicht richtig.

Im Gegensatz zur hüllentheoretischen Unabhängigkeit ist diese algebraische Unabhängigkeit von relativem Charakter: sei A Unteralgebra der Algebra E (E Erweiterung von A) und $M \subseteq A$, so ist die hüllentheoretische Unabhängigkeit von M in A mit der in E äquivalent (19), allein aus der algebraischen Unabhängigkeit von M in A kann (Bedingung 2!) nicht auf die in E geschlossen werden.

Diese Relativität läßt sich durch eine leichte Modifikation der Marczewskischen Unabhängigkeit sofort beseitigen: die Teilmenge M der Algebra A heiße *in sich algebraisch unabhängig*, wenn sie algebraisch unabhängig ist als Teilmenge der von ihr erzeugten Unteralgebra $\mathrm{C}M$, d.h. wenn sich jede Belegung β von M mit Werten aus $\mathrm{C}M$ zu einem Endomorphismus φ der Algebra $\mathrm{C}M$ fortsetzen läßt. Offenbar ist diese algebraische Unabhängigkeit „in sich" immer noch stärker als die hüllentheoretische (jedenfalls soweit $\mathrm{C}M$ mindestens zwei Elemente enthält). Sie ist (Bedingung 2!) schwächer als die relative algebraische Unabhängigkeit von Marczewski, und zwar, nach dem oben Gesagten, d.h. eben wegen des relativen Charakters der letzteren, wirklich schwächer; für Erzeugende M von A jedoch stimmen Unabhängigkeit im Sinne von Marczewski und Unabhängigkeit „in sich" überein.

(18) Marczewski [7], § 2, (ii) (ohne Beweis); Bedingung 1 findet sich bereits bei Mc Kinsey-Tarski [6], p. 170.

(19) Entsprechend dem absoluten Charakter des Begriffs „isolierte Punktmenge" in der mengentheoretischen Topologie.

Sowohl das System $\mathfrak{M}_a$ der (relativ) algebraisch als auch das System $\mathfrak{M}_i \supseteqq \mathfrak{M}_a$ der in sich algebraisch unabhängigen Teilmengen der Algebra (A, F) ist nichtleer und von finitem Charakter. In der Tat hat man trivialerweise (Bedingung 2!) $\emptyset \in \mathfrak{M}_a$, erst recht also $\emptyset \in \mathfrak{M}_i$. Der Beweis des finiten Charakters von $\mathfrak{M}_a$ ist mit Hilfe der Bedingung 1 unmittelbar. Die Übertragung dieses Schlusses auf $\mathfrak{M}_i$ legt die Betrachtung der sekundären Operationen von Unteralgebren nahe; für sie gilt der

Relativierungssatz. *Sei $(B, \boldsymbol{F}_B)$ eine Unteralgebra der Algebra $(A, \boldsymbol{F})$; $\boldsymbol{F}_B$ bestehe also gerade aus den Einschränkungen f_B auf die abgeschlossene Menge B der Operationen $f \in \boldsymbol{F}$. Dann ist die Menge $\boldsymbol{H}_B$ der Einschränkungen h_B auf B der sekundären Operationen $h \in \boldsymbol{H}$ der Algebra $(A, \boldsymbol{F})$ gleich der Menge $\boldsymbol{H}^B$ der sekundären Operationen der Algebra $(B, \boldsymbol{F}_B)$.*

Man beweist dazu $\boldsymbol{H}_B \subseteqq \boldsymbol{H}^B$, genauer: $h_B \in \boldsymbol{H}^B$ für jedes $h \in \boldsymbol{H}$, durch das mit der Definition von $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{H}^B \subseteqq \boldsymbol{H}_B$ durch das mit der Definition von $\boldsymbol{H}^B$ gegebene Induktionsverfahren; wesentlich ist dabei die Gleichung $f(h_1, \ldots, h_k)_B = f_B(h_{1B}, \ldots, h_{kB})$ (Einschränkung der direkten Komposition = direkte Komposition der Einschränkungen).

Zusammen mit dem Satz von E. Marczewski liefert dieser Relativierungssatz das

Kriterium für Unabhängigkeit in sich. *Eine Teilmenge M der Algebra $(A, \boldsymbol{F})$ ist genau dann in sich algebraisch unabhängig, wenn*

$g(x_1, \ldots, x_l) = h(x_1, \ldots, x_l)$ mit sekundären Operationen g und h der Algebra $(A, \boldsymbol{F})$ und l verschiedenen Elementen $x_1, \ldots, x_l \in M$ allemal $g_B = h_B$ $(B = \mathrm{C}M)$ nach sich zieht.

Übrigens hätte man dieses Kriterium, anstatt mittels Relativierung auf den Satz von E. Marczewski zurückzugehen, auch nach dem Muster des Satzes von E. Marczewski direkt beweisen, ja man hätte gleich einen den Satz von E. Marczewski und dieses Kriterium umfassenden Obersatz beweisen können.

Aus dem Unabhängigkeitskriterium resultiert nun der finite Charakter von $\mathfrak{M}_i$ wie folgt. Sei M in sich algebraisch unabhängig und F eine (nicht notwendig endliche) Teilmenge von M, sei $g(x_1, \ldots, x_l) = h(x_1, \ldots, x_l)$ mit sekundären Operationen $g, h \in \boldsymbol{H}$ und verschiedenen Elementen $x_1, \ldots, x_l \in F$ und damit aus M, so stimmen g und h auf $\mathrm{C}M$, erst recht also auf $\mathrm{C}F \subseteqq \mathrm{C}M$ überein: F ist in sich algebraisch unabhängig. Sei umgekehrt $M \subseteqq A$ derart, daß $F \in \mathfrak{M}_i$ für jedes endliche $F \subseteqq M$; sei $g(x_1, \ldots, x_l) = h(x_1, \ldots, x_l)$ mit sekundaren Operationen $g, h \in \boldsymbol{H}$ und verschiedenen Elementen $x_1, \ldots, x_l \in M$. Zu zeigen: $g(y_1, \ldots, y_l) = h(y_1, \ldots, y_l)$ für beliebige Elemente $y_1, \ldots, y_l \in \mathrm{C}M$. Zu jedem $\lambda = 1, \ldots, l$ gibt es aber, auf Grund der sog. Englichkeitsbedingung [20] (einer unmittelbaren Folge des obigen Satzes von G. Birkhoff), eine endliche Menge $F \subseteqq M$ mit $y_\lambda \in \mathrm{C}F_\lambda$. Die Vereinigungsmenge F aller F_λ und der Menge $\{x_1, \ldots, x_l\}$ ist dann eine endliche Teilmenge von M, nach Voraussetzung also in sich algebraisch unabhängig. Wegen $x_1, \ldots, x_l \in F$ stimmen demnach g und h auf $\mathrm{C}F$, wegen $y_\lambda \in \mathrm{C}F$ also insbesondere an der Stelle $(y_1, \ldots, y_l)$ überein: $M \in \mathfrak{M}_i$.

[20] Cf. J. Schmidt [9], p. 169, [10], p. 24; diese ist für die Algebraizität eines Hüllenoperators C charakteristisch.

Das Lemma von Teichmüller und Tukey sichert nun wieder den

Existenzsatz für maximale (in sich) algebraisch unabhängige Teilmengen (Ergänzungssatz). *In einer Algebra $(A, \boldsymbol{F})$ gibt es zu jeder (in sich) algebraisch unabhängigen Teilmenge M_0 eine maximale (in sich) algebraisch unabhängige Teilmenge $M \supseteqq M_0$.*

$M_0 = \emptyset$ liefert das

Korollar. *In einer Algebra $(A, \boldsymbol{F})$ existiert eine maximale (in sich) algebraisch unabhängige Teilmenge M.*

4. Algebraische Unabhängigkeit in sich, finiter Charakter und Auswahlaxiom. Existenzsatz und Korollar, jedenfalls soweit sie die algebraische Unabhängigkeit in sich betreffen, sind wieder mit dem Auswahlaxiom äquivalent.

Wir beweisen ein weit stärkeres Resultat, nämlich den

Satz. *Sei $\mathfrak{M}$ ein nichtleeres Mengensystem von finitem Charakter über der Grundmenge A, das entweder sämtliche einelementigen Teilmengen von A enthält oder aber deren mindestens zwei nicht enthält. Dann läßt sich A so zur Algebra $(A, \boldsymbol{F})$ machen, daß $\mathfrak{M}$ gerade aus den in sich algebraisch unabhängigen Teilmengen dieser Algebra besteht, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_i$.*

Beweis. Wir machen A zur Algebra (A, F), indem wir jeder natürlichen Zahl $k \geqslant 1$ und jedem Element $a \in A$ eine k-stellige Operation f_a^k wie folgt zuordnen:

$$f_a^k(x_1, \ldots, x_k) = \begin{cases} x_1, & \text{wenn} \quad \{x_1, \ldots, x_k\} \in \mathfrak{M}, \\ a, & \text{wenn} \quad \{x_1, \ldots, x_k\} \notin \mathfrak{M} \end{cases}$$

$(x_1, \ldots, x_k \in A)$. Unteralgebren dieser Algebra sind dann neben der Grundmenge A selbst gerade noch die Mengen $M \in \mathfrak{M}$. In der Tat, sei $M \in \mathfrak{M}$ und $x_1, \ldots, x_k \in M$, so ist $\{x_1, \ldots, x_k\} \in \mathfrak{M}$ und damit $f_a^k(x_1, \ldots, x_k) = x_1 \in M$: M ist abgeschlossen. Umgekehrt gibt es zu $M \notin \mathfrak{M}$ eine endliche Menge $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteqq M$ mit $\{x_1, \ldots, x_k\} \notin \mathfrak{M}$, wobei $k \geqslant 1$ wegen $\emptyset \in \mathfrak{M}$; ist überdies $M \neq A$, d.h. gibt es ein $a \notin M$, so bekommt man $f_a^k(x_1, \ldots, x_k) = a \notin M$: M ist nicht abgeschlossen. Man hat also $\mathrm{C}M = M$ bzw. A, je nachdem $M \in \mathfrak{M}$ oder $M \notin \mathfrak{M}$.

Die in sich algebraisch unabhängigen Teilmengen sind genau die Mengen $M \in \mathfrak{M}$. In der Tat, jede Belegung β von $M \in \mathfrak{M}$ mit Werten aus $\mathrm{C}M = M$ ist selbst schon ein Endomorphismus von $\mathrm{C}M$; denn mit

$x_1, \ldots, x_k \in M$ hat man auch $\beta x_1, \ldots, \beta x_k \in M$, mithin $\{x_1, \ldots, x_k\} \in \mathfrak{M}$ und ebenso $\{\beta x_1, \ldots, \beta x_k\} \in \mathfrak{M}$, weswegen

$$\beta f_a^k(x_1, \ldots, x_k) = \beta x_1 = f_a^k(\beta x_1, \ldots, \beta x_k).$$

Umgekehrt ist $M \notin \mathfrak{M}$ gewiß nicht in sich algebraisch unabhängig. In der Tat gibt es ja eine endliche Menge $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq M$ mit $\{x_1, \ldots, x_k\} \notin \mathfrak{M}$, wobei wieder $k \geqslant 1$ wegen $\emptyset \in \mathfrak{M}$. Im Falle $k \geqslant 2$ gibt es eine A-Belegung β von M, welche $\{x_1, \ldots, x_k\}$ nicht-trivial permutiert; diese läßt sich nicht zu einem Endomorphismus φ von $\mathrm{C}M = A$ fortsetzen, hätte man sonst doch, für beliebiges $a \in A$,

$$\varphi a = \varphi f_a^k(x_1, \ldots, x_k) = f_a^k(\varphi x_1, \ldots, \varphi x_k) = a,$$

dies speziell für $a = x_1, \ldots, x_k$: β ließe die $x_\varkappa$ fest. Und im Falle $k = 1$ existiert, nach Voraussetzung, ein $y \neq x_1$ mit $\{y\} \in \mathfrak{M}$, und es gibt eine A-Belegung β von M mit $\beta x_1 = y$; diese läßt sich gleichfalls nicht zu einem Endomorphismus φ von $\mathrm{C}M = A$ fortsetzen, hätte man sonst doch, für beliebiges $a \in A$,

$$\varphi a = \varphi f_a^1 x_1 = f_a^1 \varphi x_1 = f_a^1 y = a,$$

dies speziell für $a = x_1$: β ließe x_1 fest.

KOROLLAR 1. *Sei $\mathfrak{M}$ ein nichtleeres Mengensystem von finitem Charakter über der Grundmenge A. Dann läßt sich entweder A selbst oder aber die aus A durch Hinzufügung eines einzigen neuen Elements ω entstehende erweiterte Grundmenge A' so zur Algebra machen, daß $\mathfrak{M}$ gerade aus den in sich algebraisch unabhängigen Teilmengen dieser Algebra besteht.*

Indem man also, wie in Korollar 1, nicht an einer bestimmten Grundmenge A festhält, hat man das zusammenfassende

KOROLLAR 2. *Die nichtleeren Mengensysteme von finitem Charakter (über beliebigen Grundmengen) sind genau diejenigen Mengensysteme, welche aus allen in sich algebraisch unabhängigen Teilmengen beliebiger Algebren (in beliebigen Grundmengen) bestehen.*

Insbesondere erweist sich (da der Beweis dieses Korollars völlig konstruktiv verlief) unser Existenzsatz für maximale in sich algebraisch unabhängige Mengen, auch noch in der schwachen Form seines Korollars, als nichts Anderes denn eine algebraische Formulierung des Lemmas von Teichmüller und Tukey and demnach als mit dem Auswahlaxiom äquivalent.

Will man allerdings an der Grundmenge A festhalten, so stellt sich eine bemerkenswerte Komplikation ein: in unserem Satz läßt sich die die einelementigen Teilmengen von A betreffende Voraussetzung gewiß nicht ohne Weiteres entbehren; das wird evident durch den

SATZ. *In einer beliebigen Algebra $(A, \boldsymbol{F})$ gibt es zu jeder nicht in sich algebraisch unabhängigen einelementigen Teilmenge $\{a\}$ eine dazu disjunkte, gleichfalls nicht in sich algebraisch unabhängige Teilmenge von höchstens zwei Elementen* [21].

Dem Beweis schicken wir folgende Bemerkung voraus: ein Endomorphismus φ der Algebra $(A, \boldsymbol{F})$ ist auch ein solcher der Algebra $(A, \boldsymbol{H})$, wo $\boldsymbol{H}$ die Menge der sekundären Operationen der Algebra $(A, \boldsymbol{F})$; man beweist dies leicht durch „Induktion nach $h \in \boldsymbol{H}$". Diese Bemerkung werden wir insbesondere auf Unteralgebren B von $(A, \boldsymbol{F})$ anzuwenden haben, deren sekundäre Operationen wir ja mittels obigen Relativierungssatzes mit denen von $(A, \boldsymbol{F})$ selbst in den denkbar einfachsten Zusammenhang gebracht haben. Damit zum eigentlichen

Beweis. Angenommen, die Behauptung unseres Satzes sei falsch: es gäbe eine in sich algebraisch „abhängige" einelementige Teilmenge $\{a\}$ derart, daß alle das Element a nicht enthaltenden höchstens zweielementigen Teilmengen von A in sich algebraisch unabhängig wären. Wegen der Abhängigkeit von $\{a\}$ gibt es dann, auf Grund unseres Kriteriums für Unabhängigkeit in sich, sekundäre einstellige Operationen $g, h \in \boldsymbol{H}$, welche an der Stelle a übereinstimmen, $ga = ha$, an einer gewissen Stelle $b \in \mathrm{C}\{a\}$ indes nicht, $gb \neq hb$. Man hat dann jedenfalls $b \neq a$. Sicherlich ist $gb \in \{a, b\}$; denn im Falle $gb = c \neq a$, b gäbe es, wegen der Unabhängigkeit der a nicht enthaltenden Zweiermenge $\{b, c\}$, Endomorphismen φ und ψ der Unteralgebra $\mathrm{C}\{b, c\}$ mit $\varphi b = \psi b$, $\varphi c = b$, $\psi c = c$, und man bekäme, auf Grund der Vorbemerkung, den Widerspruch $b = \varphi c = \varphi g b = g \varphi b = g \psi b = \psi g b = \psi c = c$. Wegen der Symmetrie in bezug auf g und h hat man damit auch $hb \in \{a, b\}$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit also $gb = a$, $hb = b$. Wegen $gb = a$ hat man dann zunächst $a \in \mathrm{C}\{b\}$; wegen der Unabhängigkeit der das Element a nicht enthaltenden Einermenge $\{b\}$ gibt es also einen Endomorphismus χ der Unteralgebra $\mathrm{C}\{b\}$ mit $\chi b = a$, und man bekommt, wieder auf Grund der Vorbemerkung, $ga = ha = h\chi b = \chi h b = \chi b = a$ und damit $\chi a = \chi g b = g \chi b = ga = a$. Zum endgültigen Widerspruch gelangt man, indem man nun noch $b \in \mathrm{C}\{a\}$ berücksichtigt: nach dem Satz von G. Birkhoff, genauer: seinem Zusatz, gibt es eine sekundäre einstellige Operation $q \in H$ mit $qa = b$, und man bekommt, abermals auf Grund der Vorbemerkung, $\chi b = \chi q a = q \chi a = qa = b$, während doch $\chi b = a$ sein sollte.

Nur eine andere Formulierung dieses Satzes ist das

KOROLLAR. *In einer beliebigen Algebra $(A, \boldsymbol{F})$ gibt es*
entweder überhaupt keine in sich algebraisch abhängige einelementige Teilmenge,

[21] Vgl. die Untersuchungen über „self-dependent elements" (einelementige Teilmengen, die nicht algebraisch unabhängig sind im Sinne von Marczewski) von Nitka [5].

oder genau eine in sich algebraisch abhängige einelementige Teilmenge und mindestens eine dazu disjunkte in sich algebraisch abhängige zweielementige Teilmenge,

oder mindestens zwei in sich algebraisch abhängige einelementige Teilmengen.

Hiernach ist z.B., für beliebiges $a \in A$, das Mengensystem $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}(A - \{a\})$ aller das Element a nicht enthaltenden Teilmengen von A zwar nichtleer und von finitem Charakter und daher das System $\mathfrak{M}_i$ für passende Algebren (A', F), allein letzteres gewiß nicht mit $A' = A$.

Zumindest im ersten und dritten der oben genannten drei Fälle ist eine Umkehrung des Korollars möglich: das ist, grob gesprochen, der Inhalt des vorherigen Satzes. Der kritische zweite Fall kann in einer Algebra von höchstens zwei Elementen nicht auftreten; genauer: in einer einelementigen Algebra ist notwendig $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{P}(A)$, in einer zweielementigen Algebra entweder $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{P}(A)$ oder $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{P}(A) - \{A\}$ (und nach dem vorherigen Satz kommen diese Möglichkeiten auch wirklich vor). Es gibt aber schon dreielementige Algebren, in denen sich dieser kritische zweite Fall verwirklicht, z.B. $A = \{a, b, c\}$ mit den (einstelligen) Operationen

	a	b	c
$h^2g = g^2 = g$	b	b	c
$h^3 = gh = h$	b	c	b
h^2	c	b	c
hg	c	c	b

oder

	a	b	c
$g^2 = g$	b	b	c
$gh = h$	b	c	c
$hg = h^2$	c	c	c

Unteralgebren im 1. Beispiel: $\emptyset$, $\{b, c\}$, A; im 2. Beispiel: $\emptyset$, $\{c\}$, $\{b, c\}$, A; in sich algebraisch unabhängige Teilmengen in beiden Beispielen: $\emptyset$, $\{b\}$, $\{c\}$.

5. Schlußbemerkungen: Probleme. Es erhebt sich folgende Frage: gegeben ein nichtleeres Mengensystem $\mathfrak{M}$ von finitem Charakter über der Grundmenge A, gesucht sind die genauen notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_i$ für eine Algebra (A, F) mit der vorgegebenen Grundmenge A. Unser erster Satz gibt hinreichende, allein auf Grund unserer dreielementigen Beispiele nicht notwendige Bedingungen, unser zweiter Satz gibt notwendige Bedingungen; präzisere Frage: sind letztere auch hinreichend? Für diese Frage genügt es, die Betrachtungen auf den allein noch ausstehenden kritischen Fall einzuengen: A enthält mindestens drei Elemente, und $\mathfrak{M}$ enthält genau eine einelementige Teilmenge $\{a\}$ von A nicht als Element.

Die Frage, wann ein Mengensystem $\mathfrak{M}$ von finitem Charakter über A das System $\mathfrak{M}_a$ der im Sinne von Marczewski (relativ) algebraisch unabhängigen Teilmengen einer Algebra (A', F) (sei es mit $A' = A$ oder nicht), bleibt völlig offen; offen bleibt auch das Problem der Äquivalenz des Existenzsatzes für maximale algebraisch unabhängige Teilmengen mit dem Auswahlaxiom.

Für die hüllentheoretische (anstelle der algebraischen) Unabhängigkeit ist letzteres Problem hier positiv gelöst worden, allain, anders als bei der algebraischen Unabhängigkeit „in sich", mit einer Ad-hoc-Methode: ein allgemeiner Zusammenhang zwischen Mengensystemen $\mathfrak{M}$ von finitem Charakter und Systemen $\mathfrak{M}_h$ aller hüllentheoretisch unabhängigen Teilmengen einer Algebra wurde nicht hergestellt. Daß die Verhältnisse hier völlig anders liegen als bei der algebraischen Unabhängigkeit „in sich", zeigt ein Beispiel von Ladner ([4], § 1): das Mengensystem von finitem Charakter $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}(\{1, 2, 3\}) \cup \mathfrak{P}(\{3, 4, 5\}) \cup \mathfrak{P}(\{1, 5, 6\})$ über der Grundmenge $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ist kein $\mathfrak{M}_h$ für irgendeine Algebra (A, F) (in der gleichen Grundmenge A); dabei enthält dieses $\mathfrak{M}$ doch alle einelementigen Teilmengen von A. Es liegt nur folgendes Resultat des Verfassers vor: bei fester Grundmenge A sind die nichtleeren Mengensysteme $\mathfrak{M}$ von finitem Charakter über A genau die (formal ganz genau so gebildeten) Systeme $\mathfrak{M}_h$ für sog. „mehrstufige Austauschstrukturen", gewisse „mehrstufige", d.h. nicht notwendig idempotente, dabei aber immer noch quasi „algebraische", nämlich der Endlichkeitsbedingung genügende Hüllenoperatoren C; ja die Entsprechung zwischen diesen „mehrstufigen Austauschstrukturen" und den nichtleeren Mengensystemen $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_h$ von finitem Charakter ist sogar eineindeutig (J. Schmidt [11], § 1). Bei dieser eineindeutigen Entsprechung ist das Axiom der Einstufigkeit (Idempotenz) von C einem von Haupt, Nöbeling und Pauc herrührenden Austauschaxiom für $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_h$ äquivalent (J. Schmidt [11], § 2); letzteres stellt also hinreichende Bedingung dafür dar, daß ein nichtleeres Mengensystem $\mathfrak{M}$ von finitem Charakter das System $\mathfrak{M}_h$ für eine Algebra (A, F) (in der gleichen Grundmenge A) ist.

Literaturverzeichnis

[1] G. Birkhoff, *Universal algebra*, Proc. First Canad. Math. Congr. Montreal 1945, S. 310-326.

[2] — und O. Frink, *Representation of lattices by sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), S. 299-316.

[3] K. H. Diener, *Über zwei Birkhoff-Frinksche Struktursätze der allgemeinen Algebra*, Arch. Math. 7 (1956), S. 339-345.

[4] G. Ladner, *On two problems of J. Schmidt*, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955), S. 647-650.

[5] E. Marczewski, *A general scheme of the notions of independence in mathematics*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys. 6 (1958), S. 731-736.
[6] J. C. C. McKinsey und A. Tarski, *The algebra of topology*, Ann. Math. 45 (1944), S. 141-191.
[7] S. Mrówka, *Two remarks on my paper: "On the ideals' extension theorem and its equivalence to the axiom of choice"*, Fund. Math. 46 (1959), S. 165-166.
[8] W. Nitka, *Self-dependent elements in abstract algebras*, Coll. Math. 8 (1961), S. 15-17.
[9] J. Schmidt, *Über die Rolle der transfiniten Schlußweisen in einer allgemeinen Idealtheorie*, Math. Nachr. 7 (1952), S. 165-182.
[10] — *Über einige grundlegende Begriffe und Sätze aus der Theorie der Hüllenoperatoren*, Ber. Math. Tag. Berlin 1953, S. 21-48.
[11] — *Mehrstufige Austauschstrukturen*, Z. math. Logik Grundl. Math. 2 (1956), S. 233-249.

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT KÖLN

Reçu par la Rédaction le 2. 6. 1961

Zusatz bei der Korrektur: Herr Dr. S. Świerczkowski hat mit freundlich auf seine im „Colloquium Mathematicum" erscheinende Arbeit *A sufficient condition for independence* aufmerksam gemacht. In dieser Arbeit wird das auf p. 495 oben gestellte Problem dahingehend gelöst, daß das Analogon zum Korollar 2, p. 492 nun auch für die relative algebraische Unabhägigkeit in Sinne von Marczewski gillt; damit erweist sich auch der entsprechende Existenzsatz (p. 491) als mit dem Auswahlaxiom äquivalent.

Remarque à un travail de Z. Waraszkiewicz

par

J. J. Charatonik (Wrocław)

Le travail de Z. Waraszkiewicz *Sur quelques invariants des transformations continues*, paru en 1934 dans le volume XXIII de „Fundamenta Mathematicae", contient une erreur. Cette erreur se laise d'ailleurs corriger sans modifier la suite des raisonnements, mais elle semble mériter d'être envisagée, car elle donne lieu à quelques considérations d'ordre plus général.

Le travail de Waraszkiewicz dont il est question apporte, entre autres, une construction d'une famille $\mathcal{S}$ de $2^{\aleph_0}$ courbes (c'est-à-dire de continus de dimension 1) topologiquement assez simples, mais bien singulières: aucune d'elles n'est image continue d'aucune autre (incomparabilité), pas plus qu'elles ne sont à la fois des images continues d'aucune d'entre elles (absence de modèle commun parmi elles).

Waraszkiewicz fait correspondre d'une manière univoque à chaque suite $\alpha = \{a_i\}$ d'entiers positifs une suite $\overline{\alpha} = \{\overline{a}_i\}$ non-décroissante d'entiers positifs qu'il appelle *la base de* α. La définition qu'il donne à cette notion est assez compliquée (voir ibidem, p. 173 et 174), mais telle que $\overline{\alpha}$ coïncide avec α dans le cas particulier où α est une suite croissante — le seul cas qui nous intéresse ici.

Puis, deux suites $\alpha = \{a_i\}$ et $\beta = \{b_i\}$ d'entiers positifs sont appelées par Waraszkiewicz incomparables lorsque leurs bases $\overline{\alpha} = \{\overline{a}_i\}$ et $\overline{\beta} = \{\overline{b}_i\}$ sont croissantes et qu'il existe pour tout i et j un k satisfaisant à la condition

$$\frac{\overline{a}_{i+k+2}-\overline{a}_{i+k+1}}{\overline{a}_{i+k+1}-\overline{a}_{i+k}} \neq \frac{\overline{b}_{j+k+2}-\overline{b}_{j+k+1}}{\overline{b}_{j+k+1}-\overline{b}_{j+k}}$$

(ibidem, p. 175). L'erreur consiste dans l'affirmation que les suites $\{E(10^i \cdot x)\}$ et $\{E(10^i \cdot y)\}$ sont „évidemment incomparables pour chaque couple $x \neq y$ des nombres réels dépassant 1, ..." (ibidem, p. 185).

Cette affirmation est inexacte. En effet, la définition précitée de l'incomparabilité équivaut par contraposition à la suivante:

(1) Deux suites α et β d'entiers positifs sont *comparables* lorsque l'une des alternatives (qui s'excluent mutuellement) se présente: