STUDIA MATHEMATICA, T. XXI. (1962)

Sur les fonctions presque-périodiques généralisées dont le spectre est vide

par

J.-P. KAHANE (Paris)

Soit f une fonction à valeurs complexes localement sommable sur la droite. Nous dirons qu'elle est *presque-périodique au sens de Hartman* (p. p. H.) si

$$a_f(\lambda) = \lim_{Y\to\infty} \frac{1}{2Y} \int_{-Y}^{Y} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx$$

existe pour tout λ réel, et nous dirons qu'elle est *presque-périodique au sens de Ryll-Nardzewski* (p. p. R.) si

$$b_f(\lambda) = \lim_{Y\to\infty} \text{unif} \frac{1}{Y} \int_{X}^{X+Y} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx \qquad (-\infty < X < \infty)$$

existe pour tout λ réel. Toute fonction p. p. R. est p. p. H., et satisfait pour tout λ, $a_f(\lambda) = b_f(\lambda)$. Toute fonction p. p. au sens de Weyl, et à fortiori au sens de Stepanoff ([1]) est p. p. R., et les $b_f(\lambda)$ sont ses coefficients de Fourier. Toute fonction p. p. au sens de Besicovitch ([1]) est p. p. H. (mais non nécessairement p. p. R.) et les $a_f(\lambda)$ sont ses coefficients de Fourier.

Le spectre des fonctions p. p. H. (resp. p. p. R.) sera défini comme l'ensemble des λ pour lesquels $a_f(\lambda) \neq 0$ (resp. $b_f(\lambda) \neq 0$). On sait ([2]) que le spectre des fonctions p. p. H., et à fortiori des fonctions p. p. R. est au plus dénombrable. D'autre part ([3]), toute fonction p. p. H. appartenant à une classe M_p de Marcinkiewicz ($p > 1$) est la somme d'une fonction p. p. H. à spectre vide et d'une fonction presque-périodique de la classe B_p de Besicovitch.

Désignons par H_0, resp. R_0, l'ensemble des fonctions p. p. H., resp. p. p. R., dont le spectre est vide. Ainsi $R_0 \subset H_0$. Il est facile de voir que, pour toute fonction g localement sommable resp. continue, il existe une fonction $f \in R_0$ localement sommable resp. continue, telle que $|f(x)| = |g(x)|$: il suffit de choisir pour $\arg f(x)$ une fonction très rapidement croissante quand $x \to \infty$. De même, toute fonction h continue est le produit de deux fonctions continues f_1 et f_2 appartenant à R_0. Les énoncés qui suivent montrent que, moyennant des restrictions convenables sur g et f, ces résultats subsistent même si l'on interdit que les arguments de f, f_1, f_2 varient très rapidement.

THÉORÈME 1. *Soit g une fonction localement sommable sur la droite. Soit g_n sa restriction à l'intervalle $[n, n+1]$; on suppose $\int |g_n| = O(|n|^a)$ quand $n \to \pm\infty$, avec $a < \frac{1}{2}$. Alors, pour presque tout choix des signes $+$ et $-$ (également probables et choisis indépendamment les uns des autres pour les différentes valeurs de n), la fonction $f = \sum_{-\infty}^{\infty} \pm g_n$ appartient à H_0.*

Il est facile de voir que le résultat ne vaut plus pour $a = \frac{1}{2}$; car, si $g_n(x) = \sqrt{n}$ sur $[n, n+1]$, il est presque sûr que $a_f(0)$ n'existe pas.

THÉORÈME 2. *Soit $g \in L^\infty$, et soit encore g_n sa restriction à $[n, n+1]$. Alors il existe un choix des $+$ et $-$ telle que $f = \sum_{-\infty}^{\infty} \pm g_n$ appartienne à R_0.*

THÉORÈME 3. *Toute fonction h uniformément continue et bornée est le produit de deux fonctions uniformément continues et bornées appartenant à R_0.*

Les démonstrations reposent sur le lemme suivant, intéressant en lui-même, et inspiré par [4]:

LEMME. *Soit $d\mu_j$ ($j = 1, 2, \ldots, \nu$; $\nu > 1$) des mesures de masses totales respectives m_j, portées par un même segment I de longueur l; on pose $m = \left(\sum_1^\nu m_j^2\right)^{1/2}$. Soit $d\mu$ la mesure aléatoire $\sum_{j=1}^{\nu} \pm d\mu_j$ (les signes $+$ et $-$ étant choisis au hasard indépendamment les uns des autres) et $M(u) = \int e^{iux} d\mu(x)$ la transformée de Fourier de $d\mu$. Pour chaque $T \geqslant 1/l$, posons $M^*(T) = \sup_{|u|<T} |M(u)|$. Alors il existe une constante absolue a telle que, pour tout $\xi > 0$,*

$$p\left(M^*(T) < am\sqrt{\log(l\nu T) + \xi}\right) > 1 - e^{-\xi}, \tag{1}$$

$p(\ )$ représentant la probabilité de l'évènement entre parenthèses.

Démonstration du lemme. Nous représenterons par $\mathscr{E}(X)$ la valeur moyenne d'une variable aléatoire X. Nous supposerons (ce qu'il est permis de faire, quitte à considérer séparément les parties réelles et imaginaires) que les transformées de Fourier $M_j(u)$ des $d\mu_j$ sont réelles et que $I = [0, l]$. Comme

$$|M'(u)| \leqslant l \int_0^l |d\mu(x)| \leqslant l \sum_1^\nu m_j \leqslant lm\sqrt{\nu}$$

(inégalité de Schwarz), il existe dans $[-T, T]$ un intervalle aléatoire I de longueur $M^*(T)/2lm\sqrt{\nu}$ sur lequel on a $|M(u)| \geqslant M^*(T)/2$. Ainsi, pour tout $y > 0$,

$$\mathscr{E}\left(\frac{M^*(T)}{2lm\sqrt{\nu}} e^{yM^*(T)}\right) \leqslant \mathscr{E}\left(\int_{-T}^{T} (e^{2yM(u)} + e^{-2yM(u)})\, du\right). \tag{2}$$

or

$$\mathscr{E}(e^{2yM(u)}) = \prod_{j=1}^{\nu} \mathscr{E}(e^{\pm 2yM_j(u)})$$

puisque les signes $\pm$ sont indépendants, et

$$\mathscr{E}(e^{\pm 2yM_j(u)}) = \operatorname{Ch}(2yM_j(u)) < e^{2y^2M_j^2(u)} \leqslant e^{2y^2m_j^2}$$

de sorte que

$$\mathscr{E}(e^{2yM(u)}) < e^{2y^2m^2}. \tag{3}$$

D'après (2) et (3), on a

$$\mathscr{E}\left(\frac{M^*(T)}{2lm\sqrt{\nu}} e^{yM^*(T)}\right) < 4Te^{2y^2m^2}$$

soit encore, pour tout $\xi > 0$,

$$\mathscr{E}\left(\frac{M^*(T)}{m} \exp\left(yM^*(T) - 2y^2m^2 - \log(8lT\sqrt{\nu}) - \xi\right)\right) < e^{-\xi}. \tag{4}$$

Il en résulte que la probabilité d'avoir simultanément

$$M^*(T) > m, \tag{5}$$

$$M^*(T) > 2ym^2 + \frac{1}{y}\left(\log(8lT\sqrt{\nu}) + \xi\right) \tag{6}$$

est inférieure à $e^{-\xi}$. Choisissons

$$y = m^{-1}\left(\log(8lT\sqrt{\nu}) + \xi\right)^{1/2}.$$

Alors (6) s'écrit

$$M^*(T) > 3m\left(\log(8lT\sqrt{\nu}) + \xi\right)^{1/2} \tag{7}$$

et, d'après l'hypothèse $lT \geqslant 1$, (7) entraîne (5). Donc

$$p\left(M^*(T) > 3m\left(\log(8lT\sqrt{\nu}) + \xi\right)^{1/2}\right) < e^{-\xi}$$

d'où découle immédiatement la conclusion du lemme.

Démonstration du théorème 1. Pour simplifier les notations, nous supposons g portée par $[0, \infty)$, c'est-à-dire $g = \sum_1^\infty g_{n-1}$. Prenons dans le lemme $d\mu_n(x) = g_{n-1}(x)dx$, $l = \nu$ et $I = [0, \nu]$, $\xi = 2\log\nu$, $T = \nu$. Ainsi (1) s'écrit (quitte à changer la constante absolue a)

$$p\left(\sup_{|u|\leqslant\nu}\left|\int_0^\nu e^{iux}f(x)\,dx\right| < am\sqrt{\log\nu}\right) > 1 - \frac{1}{\nu^2}.$$

D'après l'hypothèse $\int|g_n| = O(n^a)$, on a $m^2 = O(\nu^{2a+1})$, de sorte qu'il existe une suite $\{\varepsilon_\nu\}$ tendant vers zéro, telle que

$$p\left(\sup_{|u|\leqslant\nu}\left|\frac{1}{\nu}\int_0^\nu e^{iux}f(x)\,dx\right| < \varepsilon_\nu\right) > 1 - \frac{1}{\nu^2}.$$

Donc, presque sûrement, on a

$$\sup_{|u|\leqslant\nu}\frac{1}{\nu}\left|\int_0^\nu e^{iux}f(x)\,dx\right| < \varepsilon_\nu$$

à partir d'un certain rang, c'est-à-dire $a_f(\lambda) = 0$ pour tout λ.

Démonstration du théorème 2. Supposons encore $g = \sum_1^\infty g_{n-1}$. Nous devons construire $f = \sum_1^\infty \pm g_{n-1}$, $f \in R_0$.

f sera la limite en chaque point d'une suite de fonctions f_k définies de la manière suivante:

$$f_1 = g, \quad f_{1,n} = g_n, \quad f_k = \sum_{n=1}^\infty f_{k,n-1}$$

chaque $f_{k,n}$ ayant pour support $[n(k!)^2, (n+1)(k!)^2]$

(8)
$$f_{k,n} = \sum_{j=1}^{k^2} \pm f_{k-1,n(k!)^2+(j-1)((k-1)!)^2}$$

les signes $\pm$ étant choisis de façon à minimiser

(9)
$$\sup_{|u|<k!}\left|\int f_{k,n}(x)\,e^{iux}\,dx\right|$$

et le signe $+$ étant affecté à $j = 1$. Grâce à cette dernière convention, $f_{k,0} = f_{k-1,0}$ sur $[0, ((k-1)!)^2]$, de sorte que les f_k forment bien une suite convergente en chaque point. Par construction, chaque f_k est de la forme

$$f_k = \sum_{n=1}^\infty \pm f_{k-1,n-1} = \sum_{n=1}^\infty \pm f_{k-2,n-1} = \ldots = \sum_{n=1}^\infty \pm g_{n-1}.$$

Il en est donc de même de f. Reste à montrer que $f \in R_0$.

Remarquons d'abord que, si nous convenons que $\|g\|_{L^\infty} = 1$, on a pour tout k et tout m

(10)
$$\int |f_{k-1,m}| \leqslant ((k-1)!)^2.$$

Avec les notations du lemme, (8) peut s'écrire

$$d\mu = \sum_{j=1}^{\nu} \pm d\mu_j$$

avec $\nu = k^2$, $l = (k!)^2$ et $I = [n(k!)^2, (n+1)(k!)^2]$. D'après (10) on a $m_j \leqslant ((k-1)!)^2$ donc $m \leqslant k((k-1)!)^2$. Si de plus nous posons $T = k!$, (9) n'est autre que $M^*(T)$. D'après (1), le choix des $\pm$ minimisant (9) rend (9) inférieur ou égal à $am\sqrt{\log(l\nu T)}$, soit

(11)
$$\sup_{|u|<k!}\left|\int f_{k,n}(x)\,e^{iux}\,dx\right| < \varepsilon_k (k!)^2$$

avec $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$.

Rappelons que, pour $n = 1, 2, \ldots$, les $f_{k,n}$ sont portés par des intervalles adjacents $I_{k,n}$ de longueur $(k!)^2$, et que $f = \sum_{n=1}^\infty \pm f_{k,n-1}$. Fixons k, et choisissons $u \in [-k!, k!]$, $X > 0$ et $Y > k(k!)^2$. Désignons par α et β les entiers tels que $X \in I_{k,\alpha}$ et $X + Y \in I_{k,\beta-1}$; ainsi, sur $[X, X+Y]$, on a $f = \sum_{n=\alpha+1}^{\beta} \pm f_{k,n-1}$, et

$$\int_X^{X+Y} f(x)\,e^{iux}dx = A + B$$

avec

$$A = \sum_{n=\alpha+1}^{\beta} \pm \int_{I_{k,n-1}} f_{k,n-1}(x)\,e^{iux}\,dx,$$

$$B = \pm \int_{I_{k,\alpha}\cap[0,X]} f_{k,\alpha}(x)\,e^{iux}\,dx \pm \int_{I_{k,\beta-1}\cap[X+Y,\infty]} f_{k,\beta-1}(x)\,e^{iux}\,dx.$$

D'après (10) (appliqué en changeant $k-1$ en k, et m en α resp. $\beta-1$) et (11), on a

$$|B| \leqslant 2(k!)^2, \quad |A| \leqslant (\beta-\alpha)\,\varepsilon_k (k!)^2,$$

donc

(12)
$$\left|\int_X^{X+Y} f(x)\,e^{iux}\,dx\right| < ((\beta-\alpha)\,\varepsilon_k + 2)(k!)^2$$

tandis que, par hypothèse sur Y et par définition de α et β

(13)
$$\begin{cases} Y > k(k!)^2, \\ (\beta-\alpha-2)(k!)^2 \leqslant Y \leqslant (\beta-\alpha)(k!)^2. \end{cases}$$

D'après (12) et (13),

$$\left|\frac{1}{Y}\int_X^{X+Y} f(x)\,e^{iux}\,dx\right| \leqslant \frac{k\varepsilon_k+2}{k-2},$$

donc $b_f(\lambda)$ existe pour tout λ, et $f\in R_0$. Cela achève la démonstration du théorème 2.

Démonstration du théorème 3. Désignons par C l'ensemble des fonctions uniformément continues et bornées. Soit Δ_1 et Δ_2 deux fonctions continues, périodiques et de période 1, respectivement nulles en 0 et 1/2, telles que $\Delta_1^2+\Delta_2^2=1$. Toute fonction $h\in C$ s'écrit $h=g^2$, $g\in C$. Posons $g_1=g\Delta_1$ et $g_2=g\Delta_2$. D'après le théorème 2, il existe une fonction $f_1\in R_0\cap C$ telle que $f_1^2=g_1^2$ (f_1 est construit à partir de g_1 comme, dans le théorème, f à partir de g); de même il existe $f_2\in R_0\cap C$ telle que $f_2^2=g_2^2$. Ainsi $h=g^2=g_1^2+g_2^2=f_1^2+f_2^2$, soit $h=(f_1+if_2)(f_1-if_2)$, et le théorème 3 est démontré.

Remarquons qu'au lieu de C, on aurait pu considérer, par exemple, la classe D des fonctions indéfiniment dérivables et bornées ainsi que toutes leurs dérivées. Il est alors faux que toute $h\in D$ s'écrive $h=g^2$, $g\in D$. Mais il est facile de montrer que toute $h\in D$ est la somme des carrés de quatre fonctions $\in R_0\cap D$.

Travaux cités

[1] A. S. Besicovitch, *Almost periodic functions*, Cambridge 1934.

[2] J.-P. Kahane, *Sur les coefficients de Fourier-Bohr*, Studia Mathematica

[3] K. Urbanik, *Fourier analysis in Marcinkiewicz spaces*, ibidem

[4] R. Salem et A. Zygmund, *Some properties of trigonometrical series whose terms have random signs*, Acta Math. 91 (1954), p. 245-301.

Reçu par la Rédaction le 2. 5. 1961

STUDIA MATHEMATICA T. XXI. (1962)

On some spaces of functions and distributions (II)

Integral transforms in $\mathscr{D}_M$ and $\mathscr{D}'_M$

by

J. MUSIELAK (Poznań)

1. Preliminaries. Let $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,\ldots,y_m)$ and let $k(x,y)$ be a measurable function of $n+m$ variables. We shall write (¹)

$$K\varphi(x)=\int k(x,y)\varphi(y)\,dy \tag{1}$$

for every function $\varphi(y)$ such that the above integral exists for almost every x; the integral is taken over the whole m-dimensional space. $K\varphi$ is called the *integral transform of the function* $\varphi(y)$ *generated by the kernel* $k(x,y)$. Assume that $k(x,y)$ is such that K is a linear operator from $\mathscr{L}^*_{N_2}$ to $\mathscr{D}_{N_1}$. Then we denote by K^* the adjoint of K, i. e. an operator over $\mathscr{D}'_{M_1}$ defined by

$$(K^*T)(\varphi)=T(K\varphi), \tag{2}$$

where $\varphi\in\mathscr{L}^*_{N_2}$. Assuming that $N_2(u)$ satisfies condition (Δ_2) for all u, it is obvious that K^*T is a linear functional over $\mathscr{L}^*_{N_2}$, i. e. $K^*T\in\mathscr{L}^*_{M_2}$. We shall call K^*T the *integral transform of the distribution* T *generated by the kernel* $k(x,y)$.

The following assumption concerning the kernel $k(x,y)$ will be made

(As) *The function $k(x,y)$ is measurable in $R^n\times R^m$, belongs to $\mathscr{E}(R^n)$ for almost every $y\in R^m$ and satisfies the following three conditions:*

1° *$D_x^p k(x,y)$ are equicontinuous for $x\in R^n$ in every bounded set of $y\in R^m$, p being fixed,*

2° *$k_p(x)=\|D_x^p k(x,\cdot)\|_{M_2}$ is bounded for every p separately,*

3° *the double-norm $|||D_x^p k|||_{M_2N_1}=\|k_p\|_{N_1}$ is finite for every p.*

For instance, the function $k(x,y)=\exp(-|x|^2-|y|^2)$ satisfies assumption (As).

As is well known, the following two notions of convergence and boundedness in a dual space $\mathscr{X}'$ of a B_0-space $\mathscr{X}$ are considered: on one hand, convergence and boundedness defined by the strong topology in

(¹) We apply here the same notation as in [10] and [9].