Sur quelques propriétés du potentiel logarithmique

par Z. SZMYDT (Kraków)

Cette note a pour but de compléter nos résultats concernant les potentiels logarithmiques de simple couche et de double couche étendus au contour Σ d'un domaine plan (cf. [4], lemmes 7, 9, 10, 11 et [5], théorèmes 2 et 4).

Nos résultats antérieurs avaient permis de résoudre quelques problèmes liés au mémoire de M. G. Fichera [1] et posés par lui-même. On peut les trouver dans [4] et [5] (théorèmes 1 et 3).

Dans le présent mémoire nous n'aborderons pas la question des applications. Nous y établissons cinq théorèmes concernant les dérivées d'ordre supérieur du potentiel logarithmique, dont les quatre premiers se trouvent au § 2, tandis que le cinquième est au § 5.

§ 1. Notations. Une fonction $\psi(s)$ définie dans l'intervalle infini I : $-\infty < s < \infty$ est dite fonction de classe C^m (respect. C_β^m) lorsque sa dérivée d'ordre m est continue dans I (respect. vérifie la condition de Hölder avec l'exposant β , $0 < \beta \leq 1$).

Une courbe située dans le plan de la variable complexe z ($z = x + iy$) sera désignée par Σ et appelée courbe simple fermée, lorsqu'elle admet la représentation paramétrique

$$z = z(s) \quad \text{pour} \quad 0 \leq s \leq L,$$

où

- (i) $z(s)$ est une fonction périodique de période L ($L > 0$),
- (ii) $|z'(s)| = 1$ lorsque $0 \leq s \leq L$,
- (iii) $z(s_1) = z(s_2)$ avec $0 \leq s_1 < s_2 \leq L$ si, et seulement si, $s_1 = 0$ et $s_2 = L$.

Σ sera dite courbe de classe C^n (C_h^n) lorsque la fonction périodique $z(s)$ est de classe C^n (C_h^n).

Nous dirons que la représentation paramétrique $z = z(s)$, $0 \leq s \leq L$ d'une courbe simple fermée de classe C^n (C_h^n) est normale lorsque $z(s)$ est une fonction de classe C^n (C_h^n) satisfaisant aux conditions (i)-(iii).

Nous nous bornerons dans la suite aux représentations paramétriques normales de la courbe Σ , sans le répéter à chaque occasion.

Soit Ω le domaine limité par la courbe Σ , n_z le vecteur normal au point z de Σ dirigé vers l'intérieur de Ω et ν_z le vecteur-unité ayant le même sens.

Dans la suite on désignera par ϱ un nombre positif, par r un nombre réel arbitraire et par k, n, m des nombres entiers non négatifs.

D'autre part Σ_r désignera une courbe parallèle à Σ , à la distance $|r|$ de Σ , située à l'intérieur de Ω lorsque $r > 0$ et à l'extérieur de Ω lorsque $r < 0$; la courbe Σ_0 coïncide avec la courbe Σ .

La courbe Σ_r est donnée par l'équation

$$(1) \quad z = z_r(s), \quad 0 \leq s \leq L, \quad \text{où} \quad z_r(s) = z(s) + r\nu[z(s)].$$

Sans restreindre la généralité, nous admettrons dans la suite que

$$(2) \quad \nu[z(s)] = -y'(s) + ix'(s).$$

Il en résulte que l'équation de la courbe Σ_r peut être mise sous la forme: $x = x_r(s)$, $y = y_r(s)$ lorsque $0 \leq s \leq L$ où

$$(3) \quad x_r(s) = x(s) - ry'(s), \quad y_r(s) = y(s) + rx'(s), \quad 0 \leq s \leq L.$$

Remarque 1. Soit Σ une courbe simple fermée de classe C_1^1 .

On vérifie facilement qu'il existe un nombre $r_0 > 0$ tel que si $|r| \leq r_0$, la courbe Σ_r est une courbe fermée, et telle que $z_r(s_1) = z_r(s_2)$ avec $s_1 < s_2$ si, et seulement si, $s_1 = 0$ et $s_2 = L$.

Nous nous bornerons dans la suite aux valeurs de r telles que $|r| \leq r_0$, sans le répéter à chaque occasion.

On désignera par ds_r l'élément d'arc de la courbe Σ_r . En supposant que la courbe Σ est une courbe de classe C^2 on a

$$(4) \quad ds_r = \{[x'(s) - ry''(s)]^2 + [y'(s) + rx''(s)]^2\}^{1/2} ds.$$

Il en résulte $ds_0 = ds$.

Nous dirons que $f(z)$ est une fonction de classe $C^m(\Sigma_r)$ lorsque la fonction périodique $\varphi_r(s) = f[z_r(s)]$ ⁽¹⁾ est une fonction de classe C^m dans l'intervalle I : $-\infty < s < \infty$.

La fonction $f(z)$ sera dite de classe $C_\theta^m(\Sigma; r_1 \leq r \leq r_2)$ lorsqu'il existe des constantes $C > 0$, $0 < \theta \leq 1$, $-r_0 \leq r_1 \leq 0 \leq r_2 \leq r_0$, telles que pour chaque r , $r_1 \leq r \leq r_2$ la fonction $\varphi_r(s)$ est une fonction de classe C^m dans I , et la condition: $|\varphi_r^{(m)}(s) - \varphi_r^{(m)}(\sigma)| \leq C|s - \sigma|^\theta$ lorsque $0 \leq s, \sigma \leq L$ et $r_1 \leq r \leq r_2$ est vérifiée.

Dans le cas où $r_1 = r_2 = 0$ nous emploierons, pour simplifier l'écriture, la notation $C_\theta^m(\Sigma)$ au lieu de $C_\theta^m(\Sigma; r_1 \leq r \leq r_2)$.

⁽¹⁾ On suppose que la fonction $z_r(s)$ est définie par (1) et que $z = z(s)$, $0 \leq s \leq L$, est une représentation paramétrique normale de la courbe Σ .

CONDITIONS $K^m(\Sigma)$ ET $K_\theta^m(\Sigma)$. On dira que la fonction $p(z)$ vérifie la condition $K^m(\Sigma)$ (respect. $K_\theta^m(\Sigma)$) lorsqu'elle possède les propriétés suivantes:

(i) $p(z)$ est une fonction de classe $C^m(\Sigma_r)$ pour chaque $|r| \leq r_0$ (respect. $p(z)$ est une fonction de classe $C_\theta^m(\Sigma, -r_0 \leq r \leq r_0)$).

(ii) Les limites suivantes

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{d^j p[z_r(s)]}{ds^j} = \frac{d^j p[z(s)]}{ds^j} \quad (j = 0, 1, \dots, m)$$

existent, la convergence étant uniforme dans l'intervalle $0 \leq s \leq L$.

Remarque 2. Étant donnée une fonction arbitraire $p(z)$ de classe $C^m(\Sigma)$ (respect. $C_\theta^m(\Sigma)$), il existe toujours une fonction vérifiant la condition $K^m(\Sigma)$ (respect. $K_\theta^m(\Sigma)$), qui coïncide avec $p(z)$ sur la courbe Σ .

En effet, pour obtenir une telle fonction il suffit de poser (cf. la Remarque 1)

$$p(z_r) = p(z) \quad \text{lorsque} \quad z_r = z + r\nu(z) \quad \text{et} \quad |r| \leq r_0.$$

CONDITION $W(C_\beta^m, K_\theta^n)$. Nous dirons que la courbe Σ et la fonction $p(z)$ vérifient la condition $W(C_\beta^m, K_\theta^n)$ lorsque Σ est une courbe simple fermée de classe C_β^m et $p(z)$ est une fonction assujettie à la condition $K_\theta^n(\Sigma)$. D'une manière analogue on définit les symboles $W(C_\beta^m, K^n)$, $W(C^m, K_\theta^n)$ et $W(C^m, K^n)$.

§ 2. Passons maintenant à l'énoncé de quatre théorèmes concernant le potentiel logarithmique.

THÉORÈME 1. Soit m un nombre entier non négatif. Supposons que la courbe Σ et la fonction $p(z)$ vérifient la condition $W(C^{m+2}, K^m)$, lorsque $m \geq 1$, et $W(C_1^1, K^0)$, lorsque $m = 0$.

Dans ces hypothèses les limites suivantes existent uniformément par rapport à $\zeta \in \Sigma$

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \int_{\Sigma_{\pm\epsilon}} p(z_{\pm\epsilon}) \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_{\pm\epsilon} - \zeta| ds_{\pm\epsilon z} \\ = \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \int_\Sigma p(z) \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z - \zeta| ds_z \pm \pi \frac{\partial^k p(\zeta)}{\partial s_\zeta^k} \quad (k = 0, 1, \dots, m) \quad (2). \end{aligned}$$

(2) Les symboles ds_z et ds_{rz} introduits au lieu de ds et ds_r , indiquent que c'est le point z qui varie dans l'intégration, le point $z_r \in \Sigma_r$ étant lié au point z par la relation $z_r = z + r\nu(z)$. Si Σ est une courbe de classe C_1^1 , l'intégrale étendue à la courbe Σ_r est considérée comme une intégrale de Stieltjes.

THÉOREME 2. Dans les hypothèses du Théorème 1 on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \int_{\Sigma_{\pm\epsilon}} p(z_{\pm\epsilon}) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |z_{\pm\epsilon} - \zeta| ds_{\pm\epsilon z} \\ = \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \int_{\Sigma} p(z) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |z - \zeta| ds_z \mp \pi \frac{\partial^k p(\zeta)}{\partial s_\zeta^k} \quad (k = 0, 1, \dots, m),$$

uniformément par rapport à $\zeta \in \Sigma$.

THÉOREME 3. Soit m un entier non négatif. Supposons que la courbe Σ et la fonction $p(z)$ vérifient la condition $W(C^{m+1}, K_0^{m-1})$, lorsque $m \geq 1$, et $W(C_1^1, K^0)$, lorsque $m = 0$.

Dans ces hypothèses les limites suivantes existent uniformément par rapport à $\zeta \in \Sigma$

$$(5) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \int_{\Sigma_r} p(z_r) \log |z_r - \zeta| ds_{rz} = \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \int_{\Sigma} p(z) \log |z - \zeta| ds_z \\ (k = 0, 1, \dots, m).$$

THÉOREME 4. Soit m un nombre entier non négatif. Supposons que la courbe Σ et la fonction $p(z)$ vérifient la condition $W(C^{m+2}, K^m)$ si $m \geq 1$ et la condition $W(C_1^1, K^0)$ si $m = 0$. Soit (cf. le renvoi (1))

$$(6) \quad \alpha_r(s) = p[z_r(s)].$$

Supposons que

$$(7) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^L \frac{|\alpha_{-\epsilon}^{(k)}(s) - \alpha_{-\epsilon}^{(k)}(\sigma) - \alpha_{\epsilon}^{(k)}(s) + \alpha_{\epsilon}^{(k)}(\sigma)|}{(s - \sigma)^2 + \epsilon^2} ds = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, m),$$

uniformément dans l'intervalle $0 \leq \sigma \leq L$.

Dans ces hypothèses (cf. le renvoi (2))

$$(8) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \left[\int_{\Sigma_{-\epsilon}} p(z_{-\epsilon}) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_{-\epsilon} - \zeta| ds_{-\epsilon z} - \right. \\ \left. - \int_{\Sigma_{\epsilon}} p(z_{\epsilon}) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_{\epsilon} - \zeta| ds_{\epsilon z} \right] = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, m),$$

uniformément par rapport à $\zeta \in \Sigma$.

Remarque 3. La condition (7) résulte de la suivante: Il existe des nombres $\mu > 0$, $C > 0$ et une fonction $\Psi_\epsilon(s)$ de classe C^{m+1} tels que

$$\alpha_{-\epsilon}(s) - \alpha_{\epsilon}(s) = \epsilon^\mu \Psi_\epsilon(s) \quad \text{lorsque} \quad 0 \leq s \leq L \quad \text{et} \quad \epsilon \leq r_0, \\ |\Psi_\epsilon^{(k)}(s)| \leq C \quad \text{lorsque} \quad 0 \leq s \leq L, \quad \epsilon \leq r_0 \quad (k = 0, 1, \dots, m+1).$$

En effet, on vérifie facilement que

$$|a_{-e}^{(k)}(s) - a_{-e}^{(k)}(\sigma) - a_e^{(k)}(s) + a_e^{(k)}(\sigma)| = e^\mu |\Psi_e^{(k)}(s) - \Psi_e^{(k)}(\sigma)| \leq C e^\mu |s - \sigma|$$

d'où découle la relation (7).

Les Théorèmes 1 et 2 ont été démontrés dans le mémoire [5], (cf. [5], théorèmes 2, 4 et remarque 4). Les Théorèmes 3 et 4 seront démontrés respectivement aux §§ 3 et 4 de cette note. Ils généralisent les lemmes 7 et 11 de la note [4]. Il est à remarquer que, dans tous ces résultats, le nombre m peut prendre l'une quelconque des valeurs $0, 1, 2, \dots$. Or, autant que je le sache, les propriétés intégrales du potentiel logarithmique n'ont été étudiées que dans les cas $m = 0$ et $m = 1$. Le Théorème 2, dans le cas particulier où $m = 0$, est intimement lié à un résultat établi par G. Fichera dans le mémoire [2] (cf. [2], théorème V), tandis que le Théorème 3, dans le cas où $m = 1$, généralise le théorème VI du mémoire [2], cité ci-dessus.

Remarquons ensuite que le Théorème 4 n'assure pas l'existence des limites

$$\lim_{e \rightarrow 0} \frac{\partial^k}{\partial s^k} \int_{\Sigma_{\pm e}} p(z_{\pm e}) \frac{\partial}{\partial n_z} \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_{\pm e} - \zeta| ds_{\pm e}$$

pour aucune valeur de k . L'existence de telles limites pour les valeurs $k = 0, 1, \dots, m$ sera démontrée au § 5 (cf. Théorème 5) sous des hypothèses plus restrictives sur la fonction $p(z)$. Elles ont le même caractère que celles qui intervenaient dans les lemmes 7 et 11 du mémoire [4].

Dans les démonstrations des Théorèmes 3 et 4 nous nous servirons des deux lemmes établis dans [4] que voici ⁽³⁾:

LEMME 1. *Admettons que $q(s)$ soit une fonction périodique de période L , de classe C^m et que les fonctions $g(s, \sigma)$, $\gamma(s, \sigma)$ soient de classe C^m dans l'ensemble $-\infty < s < \infty$, où $a \leq \sigma \leq b$, $a < b$, périodiques par rapport à la variable s et de période L . On suppose qu'il existe une constante $B > 0$ telle que*

$$g(s, \sigma) \geq B \quad \text{lorsque} \quad 0 \leq s \leq L, \quad a \leq \sigma \leq b.$$

Soit

$$\begin{aligned} \gamma_0(s, \sigma) &= \gamma(s, \sigma), \quad g_0(s, \sigma) = g(s, \sigma), \\ \gamma_j(s, \sigma) &= \frac{\partial \gamma_{j-1}}{\partial s} + \frac{\partial \gamma_{j-1}}{\partial \sigma}, \quad g_j(s, \sigma) = \frac{\partial g_{j-1}}{\partial s} + \frac{\partial g_{j-1}}{\partial \sigma} \quad (j = 1, \dots, m). \end{aligned}$$

Dans ces hypothèses la fonction $\Psi(\sigma)$, définie par la formule

$$\Psi(\sigma) = \int_0^L q(s) \frac{\gamma(s, \sigma)}{g(s, \sigma)} ds \quad \text{lorsque} \quad a \leq \sigma \leq b$$

⁽³⁾ Le Lemme 1 (Lemme 2) constitue un cas particulier du lemme 4 (lemme 5*) de la note [4].

admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre m . Nous affirmons que les dérivées $d^k \Psi(\sigma)/d\sigma^k$ ($k = 1, \dots, m$), sont de la forme suivante:

$$\frac{d^k \Psi(\sigma)}{d\sigma^k} = \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{k-j} \sum_{a_1, \dots, a_k} A_{a_1, \dots, a_k}^{ij} \int_0^L q^{(i)} \frac{\gamma_j}{g_0} \left(\frac{g_1}{g_0} \right)^{a_1} \dots \left(\frac{g_k}{g_0} \right)^{a_k} ds,$$

où $A_{a_1, \dots, a_k}^{ij}$ désignent des constantes indépendantes des fonctions $q(s)$, $g(s, \sigma)$ et $\gamma(s, \sigma)$; $0 \leq a_i \leq k$, lorsque $i = 1, \dots, k$, $a_1 + 2a_2 + \dots + ka_k = k - (i + j)$.

LEMME 2. Soit m un entier non négatif. Supposons que pour chaque r , $|r| \leq r_0$, $r_0 > 0$, la fonction $q_r(s)$ soit une fonction périodique de période L , de classe C^m lorsque $-\infty < s < \infty$, et que les fonctions $g_r(s, \sigma)$, $\gamma_r(s, \sigma)$ de classe C^m dans l'ensemble $-\infty < s < \infty$, $a \leq \sigma \leq b$, où $0 < a < b < L$, soient périodiques par rapport à la variable s avec la période L .

Nous admettons en plus que

$$\lim_{r \rightarrow 0} q_r^{(j)}(s) = q_0^{(j)}(s) \quad (j = 0, 1, \dots, m),$$

uniformément par rapport à s dans l'intervalle $0 \leq s \leq L$, et nous supposons qu'il existe des fonctions $M(s, \sigma)$, $P(s, \sigma)$, $Q(s, \sigma)$, $R(s, \sigma)$ de classe C^m dans l'ensemble $-\infty < s < \infty$, $a \leq \sigma \leq b$ et une constante $A > 0$ telles que

$$\gamma_r(s, \sigma) = M(s, \sigma)(s - \sigma)^2 + P(s, \sigma)(s - \sigma)r,$$

$$g_r(s, \sigma) = [R(s, \sigma) + 2Q(s, \sigma)r](s - \sigma)^2 + r^2,$$

$$R(s, \sigma) + 2Q(s, \sigma)r \geq A \quad \text{lorsque} \quad 0 \leq s \leq L, \quad a \leq \sigma \leq b, \quad |r| \leq r_0.$$

Dans ces hypothèses on a

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{d^k}{d\sigma^k} \int_0^L q_r(s) \frac{\gamma_r(s, \sigma)}{g_r(s, \sigma)} ds = \frac{d^k}{d\sigma^k} \int_0^L q_0(s) \frac{M(s, \sigma)}{R(s, \sigma)} ds \quad (k = 0, 1, \dots, m),$$

uniformément par rapport à σ dans l'intervalle $a \leq \sigma \leq b$.

§ 3. LEMME 3. Soit Σ une courbe simple fermée de classe C^k , $k \geq 1$. Choisissons arbitrairement une représentation paramétrique normale $z = z(s)$, $0 \leq s \leq L$ de la courbe Σ et soit $\zeta = z(\sigma)$, $z_r = z_r(s)$ (cf. (1) et (2)). Il existe alors une constante $c > 0$ et des fonctions $R(s, \sigma)$, $U(s, \sigma)$, $V(s, \sigma)$, $W(s, \sigma)$, $X(s, \sigma)$, $Y(s, \sigma)$ de classe C^{k-1} dans l'ensemble E : $-\infty < s < \infty$, $-\infty < \sigma < \infty$ telles que ⁽⁴⁾

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log |z_r - \zeta| = \frac{(s - \sigma) U(s, \sigma) + r V(s, \sigma)}{|z_r(s) - z(\sigma)|^2},$$

(4) Pour simplifier l'écriture, on emploie la notation $\frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log |z_r - \zeta|$ au lieu de la notation plus précise $\left[\frac{\partial}{\partial s_z} \log |z - \zeta| \right]_{z=z_r}$.

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial s_{\zeta}} \log |z_r - \zeta| + \frac{\partial}{\partial s_z} \log |z_r - \zeta| = \frac{(s - \sigma) W(s, \sigma) + r Y(s, \sigma)}{|z_r(s) - z(\sigma)|^2},$$

$$(11) \quad |z_r(s) - z(\sigma)|^2 = R(s, \sigma)(s - \sigma)^2 + 2r(s - \sigma)X(s, \sigma) + r^2,$$

$$(12) \quad R(s, \sigma) \geq c \quad \text{lorsque} \quad 0 \leq s \leq L, \quad L/5 \leq \sigma \leq 4L/5.$$

Si Σ est une courbe de classe C^1_β il existe une constante C telle que

$$(13) \quad \begin{aligned} |V(s, \sigma)| &\leq C |s - \sigma|^\beta, & |X(s, \sigma)| &\leq C |s - \sigma|^\beta, \\ |W(s, \sigma)| &\leq C |s - \sigma|^\beta, & |Y(s, \sigma)| &\leq C |s - \sigma|^\beta \end{aligned}$$

et on a

$$(14) \quad \frac{\partial}{\partial s_{\zeta}} \log |z - \zeta| + \frac{\partial}{\partial s_z} \log |z - \zeta| = O(1/|z - \zeta|^{1-\beta}).$$

Si Σ est une courbe de classe C^k avec $k \geq 2$, il existe des fonctions $M(s, \sigma)$, $N(s, \sigma)$, $P(s, \sigma)$, $Q(s, \sigma)$ de classe C^{k-2} dans E telles que

$$(15) \quad \begin{aligned} V(s, \sigma) &= N(s, \sigma)(s - \sigma), & X(s, \sigma) &= Q(s, \sigma)(s - \sigma), \\ W(s, \sigma) &= M(s, \sigma)(s - \sigma), & Y(s, \sigma) &= P(s, \sigma)(s - \sigma); \end{aligned}$$

d'autre part il existe des constantes $A > 0$ et $0 < r_1 \leq r_0$ (cf. la Remarque 1) telles que

$$(16) \quad R(s, \sigma) + 2rQ(s, \sigma) \geq A \quad \text{lorsque} \quad |r| \leq r_1, \quad 0 \leq s \leq L, \\ L/5 \leq \sigma \leq 4L/5,$$

donec

$$(17) \quad |z_r(s) - z(\sigma)|^2 = [R(s, \sigma) + 2rQ(s, \sigma)](s - \sigma)^2 + r^2 \geq A(s - \sigma)^2 + r^2 \\ \text{lorsque} \quad |r| \leq r_1, \quad 0 \leq s \leq L, \quad L/5 \leq \sigma \leq 4L/5.$$

Les fonctions $P(s, \sigma)(s - \sigma)$, $U(s, \sigma)(s - \sigma)$, $N(s, \sigma)(s - \sigma)$ et $M(s, \sigma)(s - \sigma)^2$ sont périodiques de période L par rapport à chacune des variables s et σ séparément.

Démonstration. On vérifie facilement que

$$(18) \quad \frac{\partial}{\partial s_{\zeta}} \log |z_r - \zeta| = \frac{-[x_r(s) - x(\sigma)]x'(\sigma) - [y_r(s) - y(\sigma)]y'(\sigma)}{|z_r(s) - z(\sigma)|^2}$$

et que (cf. le renvoi (4))

$$(19) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_{\zeta}} \log |z_r - \zeta| + \frac{\partial}{\partial s_z} \log |z_r - \zeta| \\ = \frac{[x'(s) - x'(\sigma)][x_r(s) - x(\sigma)] + [y'(s) - y'(\sigma)][y_r(s) - y(\sigma)]}{|z_r(s) - z(\sigma)|^2}. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$(20) \quad \frac{\partial}{\partial s_{\zeta}} \log |z - \zeta| = O(1/|z - \zeta|)$$

et dans l'hypothèse que Σ est une courbe de classe C^1_β , la relation (14).

Soit

$$\begin{aligned}
 U(s, \sigma) &= -x'(\sigma) \int_0^1 x'(\sigma + \tau(s - \sigma)) d\tau - y'(\sigma) \int_0^1 y'(\sigma + \tau(s - \sigma)) d\tau, \\
 V(s, \sigma) &= x'(\sigma)y'(s) - x'(s)y'(\sigma), \\
 W(s, \sigma) &= [x'(s) - x'(\sigma)] \int_0^1 x'(\sigma + \tau(s - \sigma)) d\tau + \\
 &\quad + [y'(s) - y'(\sigma)] \int_0^1 y'(\sigma + \tau(s - \sigma)) d\tau, \\
 Y(s, \sigma) &= x'(s)[y'(s) - y'(\sigma)] - y'(s)[x'(s) - x'(\sigma)].
 \end{aligned}$$

Remarquons d'abord que les fonctions définies ci-dessus sont de classe C^{k-1} dans E et que les fonctions $(s - \sigma)U(s, \sigma)$, $V(s, \sigma)$, $(s - \sigma)W(s, \sigma)$, $Y(s, \sigma)$ sont périodiques de période L par rapport à chacune des variables s et σ séparément. Les relations (9) et (10) résultent de (18) et (19) en vertu de (3).

D'une manière analogue on démontre que les fonctions $R(s, \sigma)$, $X(s, \sigma)$ définies par les formules:

$$\begin{aligned}
 X(s, \sigma) &= -y'(s) \int_0^1 x'(\sigma + \tau(s - \sigma)) d\tau + x'(s) \int_0^1 y'(\sigma + \tau(s - \sigma)) d\tau, \\
 R(s, \sigma) &= \left\{ \int_0^1 x'(\sigma + \tau(s - \sigma)) d\tau \right\}^2 + \left\{ \int_0^1 y'(\sigma + \tau(s - \sigma)) d\tau \right\}^2
 \end{aligned}$$

sont de classe C^{k-1} dans E et vérifient les relations (11) et (12).

Observons que

$$V(s, \sigma) = [x'(\sigma) - x'(s)]y'(s) - [y'(\sigma) - y'(s)]x'(s).$$

Si Σ est une courbe de classe C^1_β , la première des inégalités (13) en résulte et, si elle est de classe C^k avec $k \geq 2$, on en déduit la première des relations (15), où la fonction

$$N(s, \sigma) = -y'(s) \int_0^1 x''[\sigma + \tau(s - \sigma)] d\tau + x'(s) \int_0^1 y''[\sigma + \tau(s - \sigma)] d\tau$$

est une fonction de classe C^{k-2} dans E . D'une manière analogue on vérifie les autres relations de (13) et (15).

Si l'on remarque enfin que la relation (16) découle immédiatement de (12) en vertu de la continuité de la fonction $Q(s, \sigma)$, la démonstration du Lemme 3 est achevée.

LEMME 4. Supposons que Σ soit une courbe simple fermée de classe C^1_β et que $p(z)$ soit une fonction de classe $C^0_\beta(\Sigma)$. Dans ces hypothèses on a

$$(21) \quad \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \int_{\Sigma} p(z) \log |z - \zeta| ds_z = \int_{\Sigma}^* p(z) \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log |z - \zeta| ds_z,$$

où l'intégrale pourvue d'un astérisque a le sens d'une intégrale singulière de Cauchy, c'est-à-dire

$$(22) \quad \int_{\Sigma}^* p(z) \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log |z - \zeta| ds_z = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Sigma - S(\zeta, \delta)} p(z) \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log |z - \zeta| ds_z,$$

où $S(\zeta, \delta)$ désigne le cercle de centre ζ et de rayon $\delta > 0$. En outre, on a

$$(23) \quad \begin{aligned} & \int_{\Sigma}^* p(z) \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log |z - \zeta| ds_z \\ &= \int_{\Sigma} [p(z) - p(\zeta)] \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log |z - \zeta| ds_z + p(\zeta) \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log |z - \zeta| + \frac{\partial}{\partial s_z} \log |z - \zeta| \right] ds_z. \end{aligned}$$

Démonstration. Il est évident que

$$(24) \quad \begin{aligned} & \int_{\Sigma - S(\zeta, \delta)} p(z) \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log |z - \zeta| ds_z \\ &= \int_{\Sigma - S(\zeta, \delta)} [p(z) - p(\zeta)] \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log |z - \zeta| ds_z + p(\zeta) \int_{\Sigma - S(\zeta, \delta)} \left[\frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log |z - \zeta| + \frac{\partial}{\partial s_z} \log |z - \zeta| \right] ds_z, \end{aligned}$$

d'où, en vertu des relations (14), (20) et de l'hypothèse sur la fonction $p(z)$, résulte la relation (23).

D'autre part la formule (21) est bien connu et une simple démonstration de ce résultat se trouve dans l'ouvrage [3] ⁽⁵⁾. Le Lemme 4 est ainsi établi.

Voici encore un résultat qui nous sera utile dans les démonstrations des Lemmes 5 et 6 qui suivent. À savoir, si Σ est une courbe simple fermée de classe C^2 on a:

$$(25) \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial s_z} \log |z_r - \zeta| \right\} \frac{ds_r}{ds} = \frac{d}{ds} \log |z_r(s) - \zeta|.$$

La formule (25) résulte facilement des relations (3) et (4) (cf. le renvoi ⁽⁴⁾).

⁽⁵⁾ Cf. [3], § 13, pp. 30-33.

LEMME 5. Si la courbe Σ et la fonction $p(z)$ vérifient la condition $W(C^2, K_0^0)$ on a

$$(26) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \int_{\Sigma_r} p(z_r) \log |z_r - \zeta| ds_{rz} = \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \int_{\Sigma} p(z) \log |z - \zeta| ds_z$$

uniformément par rapport à $\zeta \in \Sigma$.

Démonstration. Remarquons d'abord qu'on a pour chaque $|r| \leq r_0$ et $\zeta \in \Sigma$

$$(27) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \int_{\Sigma_r} p(z_r) \log |z_r - \zeta| ds_{rz} \\ = \int_{\Sigma_r} [p(z_r) - p(\zeta_r)] \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log |z_r - \zeta| ds_{rz} + \\ + p(\zeta_r) \int_{\Sigma_r} \left\{ \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log |z_r - \zeta| + \frac{\partial}{\partial s_z} \log |z_r - \zeta| \right\} ds_{rz}. \end{aligned}$$

En effet, dans le cas où $r = 0$, l'égalité (27) résulte du Lemme 4 (cf. les relations (21) et (23)). Si $r \neq 0$ elle s'ensuit de la relation

$$(28) \quad \int_{\Sigma_r} \frac{\partial}{\partial s_z} \log |z_r - \zeta| ds_{rz} = \int_0^L \frac{d}{ds} \log |z_r(s) - \zeta| ds = 0$$

(cf. la relation (25)).

Soit ζ_0 un point choisi arbitrairement sur la courbe Σ . Il est évident qu'il suffit d'établir que la relation (26) a lieu au voisinage du point ζ_0 sur la courbe Σ . Nous le démontrerons en nous servant de la représentation paramétrique normale $z = z(s)$, $0 \leq s \leq L$ de la courbe Σ telle que $\zeta_0 = z(L/2)$.

Soit

$$a_r(s) = p[z_r(s)] \quad \text{pour} \quad 0 \leq s \leq L,$$

$$w_r(\zeta) = \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \int_{\Sigma_r} p(z_r) \log |z_r - \zeta| ds_{rz} \quad \text{lorsque} \quad \zeta \in \Sigma \quad \text{et} \quad |r| \leq r_0.$$

En vertu du Lemme 3 et de la relation (27) on constate que

$$\begin{aligned} w_r[z(\sigma)] = \int_0^L \frac{[a_r(s) - a_r(\sigma)] \cdot [(s - \sigma) U(s, \sigma) + r(s - \sigma) N(s, \sigma)]}{[R(s, \sigma) + 2rQ(s, \sigma)](s - \sigma)^2 + r^2} ds_r + \\ + a_r(\sigma) \int_0^L \frac{M(s, \sigma)(s - \sigma)^2 + r(s - \sigma)P(s, \sigma)}{[R(s, \sigma) + 2rQ(s, \sigma)](s - \sigma)^2 + r^2} ds_r \end{aligned}$$

lorsque $L/5 \leq \sigma \leq 4L/5$; les fonctions $U(s, \sigma)$, $N(s, \sigma)$, $M(s, \sigma)$, $P(s, \sigma)$, $Q(s, \sigma)$, $R(s, \sigma)$ sont continues dans l'ensemble E .

D'autre part, on a dans nos hypothèses:

$$|a_r(s) - a_r(\sigma)| \leq C |s - \sigma|^{\theta} \quad \text{lorsque} \quad 0 \leq s, \sigma \leq L \quad \text{et} \quad |r| \leq r_0,$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} a_r(s) = a_0(s), \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{ds_r}{ds} = 1,$$

la convergence étant uniforme dans l'intervalle $0 \leq s \leq L$.

Or les propriétés énumérées ci-dessus entraînent (cf. la relation (17))

$$\lim_{r \rightarrow 0} w_r[z(\sigma)] = w_0[z(\sigma)],$$

la convergence étant uniforme dans le voisinage $L/5 \leq \sigma \leq 4L/5$ du point $\sigma = L/2$.

La relation (26) est donc satisfaite dans le voisinage du point ζ_0 .
Le Lemme 5 se trouve ainsi démontré.

LEMME 6. *Supposons que Σ soit une courbe simple fermée de classe C^2 et que $p(z)$ soit une fonction de la classe $C^1(\Sigma_r)$ pour chaque $|r| \leq r_0$. Soit (cf. le renvoi (1))*

$$(29) \quad a_r(s) = p[z_r(s)] \quad \text{lorsque} \quad 0 \leq s \leq L, \quad |r| \leq r_0.$$

Supposons $q(z_r)$ une fonction définie sur la courbe Σ_r ($|r| \leq r_0$) au moyen de la formule

$$(30) \quad q(z_r) = \frac{da_r(s)}{ds} \left(1 \left/ \frac{ds_r}{ds} \right. \right)$$

dans laquelle s désigne une valeur quelconque du paramètre vérifiant la relation $z_r = z_r(s)$ ().*

Dans ces hypothèses on a pour chaque $|r| \leq r_0$ (cf. le renvoi ())*

$$(31) \quad \frac{\partial}{\partial s_{\zeta}} \int_{\Sigma_r} p(z_r) \log |z_r - \zeta| ds_{rz} \\ = \int_{\Sigma_r} q(z_r) \log |z_r - \zeta| ds_{rz} + \int_{\Sigma_r} p(z_r) \left[\frac{\partial}{\partial s_{\zeta}} \log |z_r - \zeta| + \frac{\partial}{\partial s_z} \log |z_r - \zeta| \right] ds_{rz}.$$

Démonstration. Supposons d'abord que $0 < |r| \leq r_0$. On a alors

$$(32) \quad \frac{\partial}{\partial s_{\zeta}} \int_{\Sigma_r} p(z_r) \log |z_r - \zeta| ds_{rz} \\ = \int_{\Sigma_r} p(z_r) \left[\frac{\partial}{\partial s_{\zeta}} \log |z_r - \zeta| + \frac{\partial}{\partial s_z} \log |z_r - \zeta| \right] ds_{rz} - \int_{\Sigma_r} p(z_r) \frac{\partial}{\partial s_z} \log |z_r - \zeta| ds_{rz}.$$

(*) En effet, la fonction du second membre de (30) est périodique, de période L . On en déduit d'après la Remarque 1 que la relation (30) définit une fonction sur la courbe Σ_r ($|r| \leq r_0$).

D'autre part, en vertu des relations (25), (29) et (30),

$$(33) \quad \int_{\Sigma_r} p(z_r) \frac{\partial}{\partial s_z} \log |z_r - \zeta| ds_{rz} = \int_0^L a_r(s) \frac{\partial}{\partial s} \log |z_r(s) - z(\sigma)| ds \\ = - \int_{\Sigma_r} q(z_r) \log |z_r - \zeta| ds_{rz}.$$

Dans le cas où $0 < |r| \leq r_0$, la relation (31) résulte immédiatement de (32) et (33).

Soit maintenant $r = 0$. Compte tenu du Lemme 4 on démontre, en s'appuyant sur les relations (21), (22) et (14), que

$$(34) \quad \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \int_{\Sigma} p(z) \log |z - \zeta| ds_z \\ = \int_{\Sigma} p(z) \left[\frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log |z - \zeta| + \frac{\partial}{\partial s_z} \log |z - \zeta| \right] ds_z - \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Sigma - \tilde{S}(\zeta, \delta)} p(z) \frac{\partial}{\partial s_z} \log |z - \zeta| ds_z.$$

On vérifie ensuite facilement que

$$(35) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Sigma - \tilde{S}(\zeta, \delta)} p(z) \frac{\partial}{\partial s_z} \log |z - \zeta| ds_z = - \int_{\Sigma} q(z) \log |z - \zeta| ds_z.$$

Ainsi les relations (34) et (35) entraînent l'égalité (31) avec $r = 0$. Le Lemme 6 se trouve complètement démontré.

Démonstration du Théorème 3. Si $m = 0$ le Théorème 3 est évident; si $m = 1$ il est vrai en vertu du Lemme 5. Supposons, pour la démonstration par récurrence, que le Théorème 3 soit vrai lorsque $m = n \geq 1$ et que la condition $W(C^{n+2}, K_\theta^n)$ soit satisfaite.

Soit ζ_0 un point arbitrairement choisi sur la courbe Σ . Afin de démontrer le théorème il suffit d'établir que la relation (5) avec $m = n + 1$ a lieu dans le voisinage du point ζ_0 sur la courbe Σ . Nous le démontrerons en nous servant de la représentation paramétrique normale $z = z(s)$, $0 \leq s \leq L$ de la courbe Σ telle que $\zeta_0 = z(L/2)$.

Soit (cf. (1) et (2))

$$(36) \quad a_r(s) = p[z_r(s)] \quad \text{lorsque} \quad 0 \leq s \leq L$$

et soit $q(z_r)$ la fonction définie par (30).

Conformément au Lemme 6 on a pour chaque $|r| \leq r_0$

$$(37) \quad \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \int_{\Sigma_r} p(z_r) \log |z_r - \zeta| ds_{rz} \\ = \int_{\Sigma_r} q(z_r) \log |z_r - \zeta| ds_{rz} + \int_{\Sigma_r} p(z_r) \left[\frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log |z_r - \zeta| + \frac{\partial}{\partial s_z} \log |z_r - \zeta| \right] ds_{rz}.$$

Vu l'hypothèse de récurrence, les dérivées

$$\frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \int_{\Sigma} q(z) \log |z - \zeta| ds_z \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

existent et on a

$$(38) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \int_{\Sigma_r} q(z_r) \log |z_r - \zeta| ds_{r\zeta} = \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \int_{\Sigma} q(z) \log |z - \zeta| ds_z$$

uniformément par rapport à $\zeta \in \Sigma$ ($k = 1, \dots, n$).

Soit

$$w(\zeta) = \int_{\Sigma} p(z) \left[\frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log |z - \zeta| + \frac{\partial}{\partial s_z} \log |z - \zeta| \right] ds_z.$$

Si l'on tient compte de la relation (36), on déduit du Lemme 3 (cf. (10), (11) et (15)) que

$$w[z(\sigma)] = \int_0^L \alpha_0(s) \frac{M(s, \sigma)}{R(s, \sigma)} ds,$$

où $M(s, \sigma)$, $R(s, \sigma)$ sont des fonctions de classe C^n et la relation (12) est satisfaite.

Il en résulte que la fonction $\varphi(\sigma) = w[z(\sigma)]$ est de classe C^n dans le voisinage $L/5 \leq \sigma \leq 4L/5$ du point $\sigma = L/2$, ce qui entraîne l'existence de la dérivée $\frac{\partial^n}{\partial s_\zeta^n} w(\zeta)$ dans le voisinage du point ζ_0 sur la courbe Σ .

Soit, pour chaque $|r| \leq r_0$,

$$w_{rn}(\zeta) = \frac{\partial^n}{\partial s_\zeta^n} \int_{\Sigma_r} p(z_r) \left[\frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log |z_r - \zeta| + \frac{\partial}{\partial s_z} \log |z_r - \zeta| \right] ds_{r\zeta}.$$

D'après les relations (37) et (38) il nous suffit de démontrer que

$$(39) \quad \lim_{r \rightarrow 0} w_{rn}(\zeta) = w_{0n}(\zeta)$$

et que la convergence est uniforme par rapport à $\zeta \in \Sigma$ dans le voisinage du point ζ_0 .

Il résulte du Lemme 3 que

$$w_{rn}[z(\sigma)] = \frac{d^n}{d\sigma^n} \int_0^L \alpha_r(s) \frac{M(s, \sigma)(s - \sigma)^2 + r(s - \sigma)P(s, \sigma)}{(s - \sigma)^2[R(s, \sigma) + 2rQ(s, \sigma)] + r^2} \frac{ds_{r\zeta}}{ds} ds,$$

d'où il s'ensuit en vertu du Lemme 2 que

$$(40) \quad \lim_{r \rightarrow 0} w_{rn}[z(\sigma)] = \frac{d^n}{d\sigma^n} \int_0^L \alpha_0(s) \frac{M(s, \sigma)}{R(s, \sigma)} ds$$

uniformément dans l'intervalle $L/5 \leq \sigma \leq 4L/5$.

Remarquons que

$$(41) \quad w_{0n}[z(\sigma)] = \frac{d^n}{d\sigma^n} \int_0^L a_0(s) \frac{M(s, \sigma)}{R(s, \sigma)} ds.$$

Les relations (40) et (41) impliquent

$$\lim_{r \rightarrow 0} w_{rn}[z(\sigma)] = w_{0n}[z(\sigma)]$$

la convergence étant uniforme dans le voisinage $L/5 \leq \sigma \leq 4L/5$ du point $\sigma = L/2$. Cette dernière relation prouve que la relation (39) est satisfaite dans le voisinage du point $\zeta_0 = z(L/2)$ sur la courbe Σ .

Le Théorème 3 se trouve ainsi complètement démontré.

§ 4. Démonstration du Théorème 4. Soit

$$\begin{aligned} \Gamma_\varrho(\zeta) = & \int_{\Sigma_{-\varrho}} p(z_{-\varrho}) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_{-\varrho} - \zeta| ds_{-\varrho z} - \\ & - \int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_\varrho - \zeta| ds_{\varrho z} \quad \text{lorsque} \quad \zeta \in \Sigma, \quad \varrho \leq r_0. \end{aligned}$$

Soit ζ_0 un point choisi arbitrairement sur la courbe Σ . Il est évident qu'afin de démontrer le Théorème 4 il suffit d'établir

$$(42) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \Gamma_\varrho(\zeta) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, m),$$

et que la convergence est uniforme par rapport à $\zeta \in \Sigma$ dans le voisinage du point ζ_0 .

Remarquons que

$$\frac{\partial}{\partial n_\zeta} \int_{\Sigma_r} \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_r - \zeta| ds_{rz} = 0 \quad \text{lorsque} \quad \zeta \in \Sigma, \quad r \neq 0.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} (43) \quad \Gamma_\varrho(\zeta) = & \int_{\Sigma_{-\varrho}} [p(z_{-\varrho}) - p(\zeta_{-\varrho})] \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_{-\varrho} - \zeta| ds_{-\varrho z} - \\ & - \int_{\Sigma_\varrho} [p(z_\varrho) - p(\zeta_\varrho)] \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_\varrho - \zeta| ds_{\varrho z}. \end{aligned}$$

Dans la démonstration de la relation (42) nous nous servirons de la représentation paramétrique normale $z = z(s)$, $0 \leq s \leq L$ de la courbe Σ telle que $\zeta_0 = z(L/2)$.

Distinguons maintenant deux cas conformément aux deux hypothèses admises dans le Théorème 4 relativement à la courbe Σ : l'un lorsque $m \geq 1$ et l'autre lorsque $m = 0$. Voici d'abord la proposition A qui entraîne le Théorème 4 dans le cas où $m \geq 1$.

PROPOSITION A. Si la courbe Σ et la fonction $p(z)$ vérifient la condition $W(C^{m+2}, K^m)$ où m désigne un nombre entier non négatif, les conditions (7) entraînent la relation (42), donc la conclusion du Théorème 4.

Démonstration de la Proposition A. En vertu du Lemme 3 il existe dans l'ensemble E : $-\infty < s < \infty$, $-\infty < \sigma < \infty$ des fonctions $R(s, \sigma)$, $Q(s, \sigma)$ de classe C^m et des constantes $A > 0$, $0 < r_1 \leq r_0$ telles que (cf. (17))

$$(44) \quad |z_r(s) - z(\sigma)|^2 = [R(s, \sigma) + 2rQ(s, \sigma)](s - \sigma)^2 + r^2 \geq A(s - \sigma)^2 + r^2$$

lorsque $0 \leq s \leq L$, $L/5 \leq \sigma \leq 4L/5$, $|r| \leq r_1$.

Par un procédé analogue à celui appliqué dans la démonstration du Lemme 3 on établit l'existence des fonctions ${}^iL(s, \sigma)$ ($i = 1, 2, 3$), de classe C^m dans l'ensemble E telles que (7)

$$(45) \quad \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_r - \zeta| = \frac{{}^1L(s - \sigma)^2 + {}^2Lr(s - \sigma)^2 + {}^3Lr^2}{|z_r(s) - z(\sigma)|^4}.$$

En s'appuyant sur les relations (44) et (45) on démontre l'existence des fonctions ${}^iK(s, \sigma)$ ($i = 1, 2, 3$), de classe C^m dans l'ensemble E et telles que

$$(46) \quad \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_{-\varrho} - \zeta| - \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_\varrho - \zeta| = \varrho(s - \sigma)^2 \frac{{}^1K(s - \sigma)^4 + {}^2K\varrho^2(s - \sigma)^2 + {}^3K\varrho^4}{|z_{-\varrho}(s) - z(\sigma)|^4 \cdot |z_\varrho(s) - z(\sigma)|^4}.$$

Soit (cf. la relation (6))

$$\begin{aligned} {}^1\gamma_\varrho(s, \sigma) &= \varrho[a_{-\varrho}(s) - a_{-\varrho}(\sigma)] \cdot [{}^1K(s - \sigma)^6 + {}^2K\varrho^2(s - \sigma)^4 + {}^3K\varrho^4(s - \sigma)^2], \\ {}^2\gamma_\varrho(s, \sigma) &= \varrho[a_{-\varrho}(s) - a_{-\varrho}(\sigma)] \cdot [{}^1L(s - \sigma)^2 + {}^2L\varrho(s - \sigma)^2 + {}^3L\varrho^2], \\ {}^3\gamma_\varrho(s, \sigma) &= [a_{-\varrho}(s) - a_{-\varrho}(\sigma) - a_\varrho(s) + a_\varrho(\sigma)] \cdot [{}^1L(s - \sigma)^2 + {}^2L\varrho(s - \sigma)^2 + {}^3L\varrho^2], \\ {}^1g_\varrho(s, \sigma) &= |z_\varrho(s) - z(\sigma)|^4 \cdot |z_{-\varrho}(s) - z(\sigma)|^4, \\ {}^2g_\varrho(s, \sigma) &= {}^3g_\varrho(s, \sigma) = |z_\varrho(s) - z(\sigma)|^4. \end{aligned}$$

(7) On supprimera, pour abréger, les arguments des fonctions lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté à craindre.

Il nous sera utile d'observer que lorsque Σ est une courbe simple fermée de classe C_1^1 , on a

$$\frac{\partial}{\partial n_\zeta} \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_r - \zeta| = \{{}^1L(s - \sigma)^2 + \Phi r(s - \sigma) + {}^3Lr^2\} / |z_r(s) - z(\sigma)|^4,$$

les fonctions ${}^1L(s, \sigma)$, $\Phi(s, \sigma)$, ${}^3L(s, \sigma)$ étant continues dans E et $|\Phi(s, \sigma)| \leq C|s - \sigma|$ où C désigne une constante.

On vérifie facilement que les fonctions ${}^{\nu}g_e(s, \sigma)$, ${}^{\nu}\gamma_e(s, \sigma)$ ($\nu = 1, 2, 3$), sont de classe C^m dans l'ensemble E , périodiques de période L par rapport à la variable s ; en outre (cf. (44))

$$(47) \quad {}^1g_e(s, \sigma) \geq e^8, \quad {}^{\nu}g_e(s, \sigma) \geq e^4 \quad (\nu = 2, 3),$$

lorsque $0 \leq s \leq L$, $L/5 \leq \sigma \leq 4L/5$.

Soit

$$(48) \quad \begin{aligned} {}^1q_r(s) &= \frac{ds_{-r}}{ds}, \quad {}^3q_e(s) = \frac{ds_r}{ds} \quad \text{lorsque } r \geq 0, \\ {}^2q_r(s) &= \begin{cases} 2[x'(s)y''(s) - y'(s)x''(s)] & \text{lorsque } r = 0, \\ \frac{1}{r}[ds_{-r}/ds - ds_r/ds] & \text{lorsque } r > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

On voit bien qu'en vertu de la relation (4)

$${}^2q_r(s) = 4(x'y'' - y'x'')/(ds_r/ds + ds_{-r}/ds) \quad \text{lorsque } r \geq 0.$$

En tenant toujours compte de la relation (4) on démontre que les fonctions ${}^{\nu}q_r(s)$ ($\nu = 1, 2, 3$), sont de classe C^m , périodiques, de période L et qu'on a

$$(49) \quad \lim_{r \rightarrow 0} {}^{\nu}q_r^{(j)}(s) = {}^{\nu}q_0^{(j)}(s) \quad (j = 0, 1, \dots, m; \nu = 1, 2, 3),$$

uniformément dans l'intervalle $0 \leq s \leq L$.

On déduit à l'aide des relations (6), (45), (46), (48) et des notations introduites ci-dessus que la relation (43) entraîne

$$(50) \quad \Gamma_e[z(\sigma)] = \sum_{\nu=1}^3 \int_0^L {}^{\nu}q_e(s) \frac{{}^{\nu}\gamma_e(s, \sigma)}{{}^{\nu}g_e(s, \sigma)} ds.$$

A présent il est évident qu'afin de démontrer la relation (42) il suffit d'établir que

$$(51) \quad \lim_{e \rightarrow 0} \frac{d^k}{d\sigma^k} \int_0^L {}^{\nu}q_e(s) \frac{{}^{\nu}\gamma_e(s, \sigma)}{{}^{\nu}g_e(s, \sigma)} ds = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, m; \nu = 1, 2, 3)$$

uniformément dans l'intervalle $L/5 \leq \sigma \leq 4L/5$. Cette démonstration sera basée sur le Lemme 1. Posons à cet effet

$${}^{\nu}\gamma_{e0}(s, \sigma) = {}^{\nu}\gamma_e(s, \sigma), \quad {}^{\nu}g_{e0}(s, \sigma) = {}^{\nu}g_e(s, \sigma),$$

$${}^{\nu}\gamma_{ej}(s, \sigma) = \frac{\partial}{\partial s}({}^{\nu}\gamma_{e,j-1}) + \frac{\partial}{\partial \sigma}({}^{\nu}\gamma_{e,j-1}),$$

$${}^{\nu}g_{ej}(s, \sigma) = \frac{\partial}{\partial s}({}^{\nu}g_{e,j-1}) + \frac{\partial}{\partial \sigma}({}^{\nu}g_{e,j-1}),$$

.

et d'une manière analogue:

$$\begin{aligned} {}^v K_0(s, \sigma) &= {}^v K(s, \sigma), \quad {}^v L_0(s, \sigma) = {}^v L(s, \sigma), \\ {}^v K_j(s, \sigma) &= \frac{\partial}{\partial s} ({}^v K_{j-1}) + \frac{\partial}{\partial \sigma} ({}^v K_{j-1}), \\ {}^v L_j(s, \sigma) &= \frac{\partial}{\partial s} ({}^v L_{j-1}) + \frac{\partial}{\partial \sigma} ({}^v L_{j-1}), \end{aligned} \quad (j = 1, 2, \dots, m; \nu = 1, 2, 3).$$

Soit j un nombre entier, $0 \leq j \leq m$. On démontre aisément l'existence des constantes a_{hj} ($h = 0, 1, \dots, j$), telles que $a_{jj} = 1$ et que

$$(52) \quad {}^1 \gamma_{ej}(s, \sigma) = \varrho \sum_{h=0}^j a_{hj} [a_{-e}^{(h)}(s) - a_{-e}^{(h)}(\sigma)] \times \\ \times [{}^1 K_{j-h}(s - \sigma)^6 + {}^2 K_{j-h} \varrho^2 (s - \sigma)^4 + {}^3 K_{j-h} \varrho^4 (s - \sigma)^2],$$

$$(53) \quad {}^2 \gamma_{ej}(s, \sigma) = \varrho \sum_{h=0}^j a_{hj} [a_{-e}^{(h)}(s) - a_{-e}^{(h)}(\sigma)] \times \\ \times [{}^1 L_{j-h}(s - \sigma)^2 + {}^2 L_{j-h} \varrho (s - \sigma)^2 + {}^3 L_{j-h} \varrho^2],$$

$$(54) \quad {}^3 \gamma_{ej}(s, \sigma) = \sum_{h=0}^j a_{hj} [a_{-e}^{(h)}(s) - a_{-e}^{(h)}(\sigma) - a_e^{(h)}(s) + a_e^{(h)}(\sigma)] \times \\ \times [{}^1 L_{j-h}(s - \sigma)^2 + {}^2 L_{j-h} \varrho (s - \sigma)^2 + {}^3 L_{j-h} \varrho^2].$$

Comme la fonction $p(z)$ vérifie la condition $K^m(\Sigma)$, on a

$$(55) \quad \lim_{r \rightarrow 0} a_r^{(k)}(s) = a_0^{(k)}(s) \quad (k = 0, 1, \dots, m),$$

la convergence étant uniforme dans l'intervalle $0 \leq s \leq L$.

Or les relations (44), (52) - (55) entraînent l'existence d'une constante C telle que, si $\varrho \leq r_0$ et $s \neq \sigma$, les inégalités suivantes sont satisfaites:

$$(56) \quad \left| \frac{{}^v \gamma_{ej}(s, \sigma)}{{}^v g_e(s, \sigma)} \right| \leq C \varrho \sum_{h=0}^j \frac{|a_{-e}^{(h)}(s) - a_{-e}^{(h)}(\sigma)|}{A(s - \sigma)^2 + \varrho^2} \quad (\nu = 1, 2),$$

$$(57) \quad \left| \frac{{}^3 \gamma_{ej}(s, \sigma)}{{}^3 g_e(s, \sigma)} \right| \leq C \sum_{h=0}^j \frac{|a_{-e}^{(h)}(s) - a_{-e}^{(h)}(\sigma) - a_e^{(h)}(s) + a_e^{(h)}(\sigma)|}{A(s - \sigma)^2 + \varrho^2} \\ (j = 0, 1, \dots, m).$$

D'une manière analogue on démontre l'existence d'une constante C_1 telle que

$$(58) \quad \left| \frac{{}^v g_{ej}(s, \sigma)}{{}^v g_e(s, \sigma)} \right| \leq C_1 \quad (\nu = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, m), \\ \text{lorsque} \quad \varrho \leq r_0, \quad s \neq \sigma.$$

En s'appuyant sur la relation (55) on démontre aisément⁽⁸⁾ que

$$(59) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \int_0^L \frac{\varrho |a_{-\varrho}^{(k)}(s) - a_{-\varrho}^{(k)}(\sigma)|}{A(s-\sigma)^2 + \varrho^2} ds = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, m),$$

la convergence étant uniforme dans l'intervalle $0 \leq \sigma \leq L$.

Si l'on tient compte des inégalités (56)-(58), des relations (49), (59) et de l'hypothèse (7), on déduit du Lemme 1 (cf. la relation (47)) que

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{d^k}{d\sigma^k} \int_0^L {}^v q_{\varrho}(s) \frac{{}^v \gamma_{\varrho}(s, \sigma)}{{}^v g_{\varrho}(s, \sigma)} ds = 0 \quad (v = 1, 2, 3; k = 0, 1, \dots, m),$$

uniformément dans l'intervalle $L/5 \leq \sigma \leq 4L/5$.

Il en résulte (cf. (50)) que la relation (42) est satisfaite.

La Proposition A étant ainsi établie, nous allons compléter la démonstration du Théorème 4 dans le cas où $m = 0$.

Remarquons d'abord que, lorsque Σ est une courbe simple fermée de classe C_1^1 , les intégrales qui interviennent au premier membre de (8) ainsi que celles qui définissent la fonction $\Gamma_{\varrho}(\zeta)$ (cf. (43)) sont considérées comme des intégrales de Stieltjes (cf. le renvoi⁽²⁾). Bien que la formule (4) ne soit pas applicable, on peut définir les fonctions ${}^i q_r(s)$ ($i = 1, 2, 3$) par des formules (48) lorsque $r > 0$ et démontrer l'existence d'une constante $C_1 > 0$ telle que

$$(60) \quad |{}^i q_r(s)| \leq C_1 \quad \text{lorsque} \quad 0 \leq s \leq L, \quad 0 < r \leq r_0.$$

D'autre part, compte tenu des relations (11)-(13) et de celles du renvoi⁽⁷⁾, on démontre l'existence des constantes $C_2 > 0$, $A > 0$ et $0 < r_1 \leq r_0$ telles que les inégalités suivantes:

$$(61) \quad \left| \frac{\partial}{\partial n_{\zeta}} \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_r - \zeta| \right| \leq \frac{C_2}{A(s-\sigma)^2 + r^2},$$

$$(62) \quad \left| \frac{\partial}{\partial n_{\zeta}} \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_{-\varrho} - \zeta| - \frac{\partial}{\partial n_{\zeta}} \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_{\varrho} - \zeta| \right| \leq \frac{\varrho C_2}{A(s-\sigma)^2 + \varrho^2}$$

sont satisfaites lorsque $|r| \leq r_1$, $0 \leq s \leq L$, $L/5 \leq \sigma \leq 4L/5$ et $s \neq \sigma$.

Cependant les inégalités (60) et (61) entraînent, en vertu de l'hypothèse (7) (dans le cas où $m = 0$), la relation

$$(63) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \int_0^L {}^3 q_{\varrho}(s) [a_{-\varrho}(s) - a_{-\varrho}(\sigma) - a_{\varrho}(s) + a_{\varrho}(\sigma)] \frac{\partial}{\partial n_{\zeta}} \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_{\varrho} - \zeta| ds = 0$$

⁽⁸⁾ Cf. le lemme 4 de la note [5].

et en vertu de la formule (59), dans le cas où $m = 0$, la suivante:

$$(64) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^L {}^2q_\epsilon(s) \varrho[a_{-\epsilon}(s) - a_{-\epsilon}(\sigma)] \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_\epsilon - \zeta| ds = 0,$$

la convergence étant uniforme dans l'intervalle $L/5 \leq \sigma \leq 4L/5$ dans les deux cas.

D'une manière analogue il s'ensuit des relations (60), (62) et (59) que

$$(65) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^L {}^1q_\epsilon(s) [a_{-\epsilon}(s) - a_{-\epsilon}(\sigma)] \times \\ \times \left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta} \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_{-\epsilon} - \zeta| - \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_\epsilon - \zeta| \right] ds = 0$$

uniformément dans l'intervalle $L/5 \leq \sigma \leq 4L/5$.

Les relations (63)-(65) entraînent (cf. (43))

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma_\epsilon[z(\sigma)] = 0$$

la convergence étant uniforme dans le voisinage $L/5 \leq \sigma \leq 4L/5$ du point $\sigma = L/2$. Il en résulte la relation (42) avec $m = 0$, ce qui achève notre démonstration.

§ 5. Notations. La fonction $p(z)$ sera dite de classe C^m lorsque la fonction $p^*(x, y) = p(x + iy)$ est une fonction de classe C^m dans l'ensemble E : $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$.

Remarque 4. Dans l'hypothèse que Σ est une courbe de classe C^{m+1} , chaque fonction $p(z)$ de classe C^m vérifie la condition $K^m(\Sigma)$.

En effet, on a d'après nos notations

$$p[z_r(s)] = p^*[x_r(s), y_r(s)]$$

où la fonction $p^*(x_r, y_r)$ est de classe C^m dans le plan $-\infty < x_r < \infty$, $-\infty < y_r < \infty$ et les fonctions $x_r(s)$, $y_r(s)$ (cf. (3)) sont de classe C^m dans l'intervalle $-\infty < s < \infty$. La proposition énoncée s'ensuit facilement.

CONDITION $H(C^h, C^k)$. Nous dirons que la courbe Σ et la fonction $p(z)$ vérifient la condition $H(C^h, C^k)$ lorsque Σ est une courbe simple fermée de classe C^h et $p(z)$ est une fonction de classe C^k .

Le domaine limité par la courbe Σ_r , $|r| \leq r_0$ (cf. la Remarque 1) sera désigné par Ω_r . On a (cf. le § 1) $\Omega = \Omega_0$.

Le cercle de centre ζ et de rayon δ sera désigné par $S(\zeta, \delta)$ et la circonférence de ce cercle par $\Gamma(\zeta, \delta)$.

LEMME 7. Soit m un nombre entier non négatif. Supposons que la courbe Σ et la fonction $w(z)$ vérifient la condition $H(C^m, C^{m-1})$, lorsque $m \geq 2$, et $H(C_1^1, C^0)$, lorsque $m = 0$ et $m = 1$.

On a alors

$$(66) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \iint_{\Omega_r} w(z) \log |z - \zeta| d\tau_z = \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \iint_{\Omega} w(z) \log |z - \zeta| d\tau_z$$

$$(k = 0, 1, \dots, m),$$

la convergence étant uniforme par rapport à $\zeta \in \Sigma$.

Démonstration. Il est évident que le Lemme 7 est vrai lorsque $m = 0$ et $m = 1$. Supposons qu'il soit vrai aussi lorsque $m = \mu$, $\mu \geq 1$ et admettons que la courbe Σ et la fonction $w(z)$ vérifient l'hypothèse $H(C^{\mu+1}, C^\mu)$.

Nous allons montrer que pour chaque $\zeta \in \Sigma$ et $|r| \leq r_0$ (*)

$$(67) \quad \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \iint_{\Omega_r} w(z) \log |z - \zeta| d\tau_z$$

$$= \cos(s_\zeta, x) \left\{ \int_{\Sigma_r} w(z) \cos(n_z, x) \log |z - \zeta| ds_{rz} + \iint_{\Omega_r} \frac{\partial w}{\partial x} \log |z - \zeta| d\tau_z \right\} +$$

$$+ \cos(s_\zeta, y) \left\{ \int_{\Sigma_r} w(z) \cos(n_z, y) \log |z - \zeta| ds_{rz} + \iint_{\Omega_r} \frac{\partial w}{\partial y} \log |z - \zeta| d\tau_z \right\}.$$

Voici la démonstration de la relation (67) dans le cas où $r \leq 0$. On vérifie facilement que

$$\frac{\partial}{\partial s_\zeta} \iint_{\Omega_r} w(z) \log |z - \zeta| d\tau_z = \iint_{\Omega_r} w(z) \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log |z - \zeta| d\tau_z$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{\Omega_r - S(\zeta, \delta)} w(z) \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log |z - \zeta| d\tau_z.$$

D'autre part:

$$\iint_{\Omega_r - S(\zeta, \delta)} w(z) \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log |z - \zeta| d\tau_z$$

$$= \cos(s_\zeta, x) \left\{ \iint_{\Omega_r - S(\zeta, \delta)} \frac{\partial w}{\partial x} \log |z - \zeta| d\tau_z - \iint_{\Omega_r - S(\zeta, \delta)} \frac{\partial}{\partial x} [w(z) \log |z - \zeta|] d\tau_z \right\} +$$

$$+ \cos(s_\zeta, y) \left\{ \iint_{\Omega_r - S(\zeta, \delta)} \frac{\partial w}{\partial y} \log |z - \zeta| d\tau_z - \iint_{\Omega_r - S(\zeta, \delta)} \frac{\partial}{\partial y} [w(z) \log |z - \zeta|] d\tau_z \right\}.$$

En vertu du théorème de Green on a la relation (67) car, comme on le sait bien,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Gamma(\zeta, \delta)} |\log |z - \zeta|| ds_z = 0.$$

(*) Les symboles (s_ζ, x) et (s_ζ, y) (respect. (n_z, x) et (n_z, y)) désignent les angles que fait la tangente à la courbe Σ au point ζ (respect. la normale dirigée à l'intérieur de la courbe Σ au point z) avec l'axe x et y respectivement.

Dans le cas où $r > 0$, la démonstration de la relation (67) est encore plus simple, car le point ζ est alors à l'extérieur du domaine d'intégration.

Remarquons ensuite (cf. la Remarque 4) que les fonctions $w(z)\cos(n_z, x)$ et $w(z)\cos(n_z, y)$ satisfont à la condition $K^\mu(\Sigma)$. Par conséquent, d'après le Théorème 3 et l'hypothèse de récurrence, l'égalité (67) entraîne la relation (66) lorsque $k = \mu + 1$. Le Lemme 7 se trouve ainsi démontré.

LEMME 8. *Soit m un nombre entier non négatif. Supposons que la courbe Σ et la fonction $v(z)$ vérifient la condition $H(C^{m+1}, C^m)$ lorsque $m \geq 1$ et $H(C_1^1, C^0)$ lorsque $m = 0$.*

On a alors

$$(68) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \int_{\Omega_r} v(z) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |z - \zeta| d\tau_z = \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \int_{\Omega} v(z) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |z - \zeta| d\tau_z$$

$$(k = 0, 1, \dots, m),$$

la convergence étant uniforme par rapport à $\zeta \in \Sigma$.

Démonstration. La conclusion du Lemme 8 est évidente si $m = 0$. Dans le cas où $m > 0$ elle résulte du Lemme 7 et du Théorème 3 en vertu de la relation:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_r} v(z) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |z - \zeta| d\tau_z \\ &= \cos(n_\zeta, x) \left\{ \int_{\Omega_r} \frac{\partial v}{\partial x} \log |z - \zeta| d\tau_z + \int_{\Sigma_r} v(z) \cos(n_z, x) \log |z - \zeta| ds_{rz} \right\} + \\ &+ \cos(n_\zeta, y) \left\{ \int_{\Omega_r} \frac{\partial v}{\partial y} \log |z - \zeta| d\tau_z + \int_{\Sigma_r} v(z) \cos(n_z, y) \log |z - \zeta| ds_{rz} \right\} \end{aligned}$$

lorsque $|r| \leq r_0$ et $\zeta \in \Sigma$,

dont la démonstration ne diffère pas de celle de la relation (67).

LEMME 9. *Soit Σ une courbe simple fermée de classe C_1^1 et $p(z)$ une fonction de classe C^2 .*

On a alors pour chaque $\zeta \in \Sigma$ et $0 < \rho \leq r_0$ les relations suivantes:

$$(69) \quad \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \int_{\Sigma_{-\rho}} p(z_{-\rho}) \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_{-\rho} - \zeta| ds_{-\rho z}$$

$$= \int_{\Sigma_{-\rho}} \frac{\partial p}{\partial n_z} \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |z - \zeta| ds_{-\rho z} + \int_{\Sigma_{-\rho}} \Delta p \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |z - \zeta| d\tau_z - 2\pi \frac{\partial p}{\partial n_\zeta},$$

$$(70) \quad \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \int_{\Sigma} p(z) \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z - \zeta| ds_z$$

$$= \int_{\Sigma} \frac{\partial p}{\partial n_z} \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |z - \zeta| ds_z + \int_{\Omega} \Delta p \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |z - \zeta| d\tau_z - \pi \frac{\partial p}{\partial n_\zeta},$$

$$\begin{aligned}
 (71) \quad \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho) \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_\varrho - \zeta| ds_{\varrho z} \\
 = \int_{\Sigma_\varrho} \frac{\partial p}{\partial n_z} \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |z_\varrho - \zeta| ds_{\varrho z} + \iint_{\Omega_\varrho} \Delta p \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |z - \zeta| d\tau_z.
 \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $\varrho \leq r_0$, $\zeta \in \Sigma$ et $S(\zeta, \delta_0) \subset \Omega_{-\varrho}$. On établit aisément, en s'appuyant sur le théorème de Green, pour chaque $0 < \delta \leq \delta_0$ et $\zeta \in \Sigma$, l'identité suivante ⁽¹⁰⁾

$$\begin{aligned}
 \int_{\Sigma_{-\varrho}} p(z) \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z - \zeta| ds = \int_{\Sigma_{-\varrho}} \frac{\partial p}{\partial n_z} \log |z - \zeta| ds - \int_{\Gamma(\zeta, \delta)} p(z) \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z - \zeta| ds + \\
 + \int_{\Gamma(\zeta, \delta)} \frac{\partial p}{\partial n_z} \log |z - \zeta| ds + \iint_{\Omega_{-\varrho} - S(\zeta, \delta)} \Delta p \log |z - \zeta| d\tau.
 \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}
 \int_{\Sigma_{-\varrho}} p(z) \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z - \zeta| ds \\
 = \int_{\Sigma_{-\varrho}} \frac{\partial p}{\partial n_z} \log |z - \zeta| ds + \iint_{\Omega_{-\varrho}} \Delta p \log |z - \zeta| d\tau - 2\pi p(\zeta),
 \end{aligned}$$

d'où l'on obtient immédiatement la proposition (69), (cf. le renvoi ⁽¹⁰⁾). La démonstration de la relation (70) est analogue, tandis que celle de la relation (71) est plus simple car, dans ce cas, le point ζ est à l'extérieur du domaine Ω_ϱ .

THÉORÈME 5. Soit m un nombre entier non négatif. Supposons que la courbe Σ et la fonction $p(z)$ vérifient la condition $H(C^{m+2}, C^{m+2})$ lorsque $m \geq 1$ et la condition $H(C_1^1, C^2)$ lorsque $m = 0$.

On a alors

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \left\{ \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \int_{\Sigma_r} p(z_r) \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_r - \zeta| ds_{rz} \right\} \\
 = \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \left\{ \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \int_{\Sigma} p(z) \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z - \zeta| ds_z \right\} \quad (k = 0, 1, \dots, m),
 \end{aligned}$$

la convergence étant uniforme par rapport à $\zeta \in \Sigma$.

Le Théorème résulte immédiatement des Lemmes 9, 8 et du Théorème 2 (cf. Remarque 4).

⁽¹⁰⁾ Dans les intégrales qui interviennent ci-dessus le point ζ est toujours fixe, le point z seul variant dans le domaine d'intégration. Nous pouvons donc supprimer les indices en mettant par exemple:

$$\int_{\Sigma_{-\varrho}} p(z) \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z - \zeta| ds \quad \text{au lieu de} \quad \int_{\Sigma_{-\varrho}} p(z_{-\varrho}) \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_{-\varrho} - \zeta| ds_{-\varrho z},$$

car il n'y a pas d'ambiguïté à craindre.

Travaux cités

- [1] G. Fichera, *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni*, Annali di Matematica Pura ed Applicata 27 (1948), p. 1-28.
- [2] — *Approssimazione uniforme delle funzioni olomorfe mediante funzioni razionali aventi poli semplici prefissati*, Rend. Acc. Naz. Lincei, Serie VIII, 27 (1959), p. 193-201.
- [3] N. I. Muskhelishvili, *Singular integral equations*, Groningen, Holland 1953.
- [4] Z. Szmydt, *On a certain boundary problem for Laplace equation*, Annales Polonici Mathematici 11 (1961), p. 27-48.
- [5] — *Sur l'approximation par des polynômes harmoniques sur le contour d'un domaine plan*, Annales Polonici Mathematici 11 (1962), p. 283-305.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 12. 6. 1961