M. WARMUS (Warszawa)

**ROZWIĄZYWANIE NUMERYCZNE RÓWNAŃ
TRZECIEGO I CZWARTEGO STOPNIA
O WSPÓŁCZYNNIKACH RZECZYWISTYCH**

I. Równania trzeciego stopnia. Jedną z najczęściej używanych metod rozwiązywania numerycznego równania

$$(1) \quad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a \neq 0, \quad a, b, c, d \text{ rzeczywiste},$$

jest metoda kolejnych przybliżeń Newtona. Stosując ją, zwłaszcza na maszynach rachunkowych, napotykamy nieraz trudności w podaniu wstępnego przybliżenia i oszacowaniu błędów przybliżeń. W pracy niniejszej jest zaproponowany sposób postępowania usuwający te trudności i dający już po trzykrotnym użyciu wzoru Newtona jeden z pierwiastków równania (1) z dokładnością wystarczającą dla praktyki. Sposób ten może być łatwo wykorzystany w maszynach rachunkowych.

Dzieląc obie strony równania (1) przez $3a$ otrzymujemy

$$(2) \quad \frac{1}{3}x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

gdzie

$$(3) \quad B = \frac{b}{3a}, \quad C = \frac{c}{3a}, \quad D = \frac{d}{3a}.$$

Obliczamy wartości

$$(4) \quad W = B^2 - C, \quad U = BC - 3D, \quad S = 2BW - U.$$

Metodę niżej opisaną zastosujemy do znalezienia tylko jednego pierwiastka rzeczywistego równania (2). Jeśli równanie (1) ma 3 pierwiastki rzeczywiste, metoda ta daje pierwiastek najmniejszy przy $S > 0$ i największy przy $S < 0$. Jeśli będzie nim $x = \bar{x}$, to dwa pozostałe, zarówno rzeczywiste jak i zespolone, obliczymy z wzoru

$$(5) \quad x = -B - \frac{\bar{x} + B}{2} \pm \sqrt{3 \left[W - \left(\frac{\bar{x} + B}{2} \right)^2 \right]}.$$

Jeśli $S = 0$, to przyjmujemy $\bar{x} = -B$. Jeśli $S \neq 0$, to obliczamy

$$(6) \quad R = \sqrt[3]{S}$$

i przyjmujemy następujące wstępne przybliżenia:

$$(7) \quad x_0 = \frac{7S}{12W - 7R^2} - B, \quad \text{gdy} \quad W \leq 0$$

oraz

$$(8) \quad x_0 = 0,05822R - B - (\operatorname{sgn} R)\sqrt{3W + R^2}, \quad \text{gdy} \quad W \geq 0.$$

Dla $W = 0$ można przyjąć którekolwiek z przybliżeń (7), (8). Przybliżenia następne obliczamy z wzoru

$$(9) \quad x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(\frac{2x_n(x_n + B)^2 + U}{(x_n + B)^2 - W} - B \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

powstałego z przekształcenia wzoru Newtona

$$(10) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{1}{3}x_n^3 + Bx_n^2 + Cx_n + D}{x_n^2 + 2Bx_n + C}.$$

Niech q_n oznacza błąd przybliżenia x_n , tzn.

$$(11) \quad q_n = \bar{x} - x_n,$$

gdzie $\bar{x}$ oznacza szukany pierwiastek równania (1).

Można podać następujące oszacowania:

dla $W \leq 0$:	dla $W \geq 0$:
$ q_0 < 0,06085 R ,$	$ q_0 < 0,06313 R ,$
$ q_1 < 0,003709 R ,$	$ q_1 < 0,003675 R ,$
$ q_2 < 0,00001376 R ,$	$ q_2 < 0,00001344 R ,$
$ q_3 < 1,9 \cdot 10^{-10} R ,$	$ q_3 < 1,81 \cdot 10^{-10} R ,$
$ q_4 < 4 \cdot 10^{-20} R ,$	$ q_4 < 3,3 \cdot 10^{-20} R ,$

gdzie R jest dane przez wzór (6).

Gdyby w przypadku $W \leq 0$ zamiast (7) przyjąć wstępne przybliżenie

$$(12) \quad x_0 = \frac{S}{3W - R^2} - B,$$

otrzymalibyśmy następujące oszacowania:

$$\begin{aligned} |q_0| &< 0,18565 |R|, \\ |q_1| &< 0,045540 |R|, \\ |q_2| &< 0,0019552 |R|, \\ |q_3| &< 0,000003813 |R|, \\ |q_4| &< 1,5 \cdot 10^{-11} |R|, \\ |q_5| &< 3 \cdot 10^{-22} |R|. \end{aligned}$$

Gdyby w przypadku $W \geq 0$ zamiast (8) przyjąć wstępne przybliżenie

$$(13) \quad x_0 = -B - (\operatorname{sgn} R) \sqrt{3W + R^2},$$

otrzymalibyśmy następujące oszacowania:

$$|q_0| < 0,12135 |R|,$$

$$|q_1| < 0,012659 |R|,$$

$$|q_2| < 0,0001576 |R|,$$

$$|q_3| < 2,49 \cdot 10^{-8} |R|,$$

$$|q_4| < 6,2 \cdot 10^{-16} |R|,$$

$$|q_5| < 4 \cdot 10^{-33} |R|.$$

Podane oszacowania nie uwzględniają oczywiście błędów zaokrągleń a dotyczą jedynie błędów metody.

Opiszę teraz pokrótce drogę, na której otrzymałem podane wzory i oszacowania.

Wzór (5) otrzymujemy dzieląc stronami równanie (2) przez $x - \bar{x}$ i następnie rozwiązując otrzymane równanie kwadratowe.

Podstawiając w (2)

$$(14) \quad x = Rz - B,$$

otrzymujemy równanie

$$(15) \quad \frac{1}{3}Sz^3 - WRz + \frac{1}{3}S = 0.$$

Jeśli $S = 0$, to $R = 0$ i na mocy (14) oraz (15) $x = -B$ jest pierwiastkiem równania (2) a zatem i (1).

Jeśli $S \neq 0$, to dzielimy równanie (15) obustronnie przez $\frac{1}{3}S$ i otrzymujemy

$$(16) \quad z^3 - Mz + 1 = 0,$$

gdzie

$$(17) \quad M = \frac{3WR}{S} = \frac{3W}{R^2}.$$

Zależność między z a M daną równaniem (16) można przedstawić wykreslnie jak na rysunku 1.

Zastosujemy teraz metodę Newtona do najmniejszego z pierwiastków równania (16). Jak widać z rysunku 1, dla $M \leq 0$ mamy $-1 \leq z < 0$, a dla $M \geq 0$ jest $z \leq -1$. W pierwszym z tych przypadków dla bardzo małych z (a zatem dla M dużych co do modułu) mamy $z^3 \approx 0$ i na mocy (16)

$$z \approx 1/M.$$

Takie przybliżenie nie byłoby jednak dobre dla $M = 0$ (czyli dla $z = -1$). Przyjmując wstępne przybliżenie

$$(18) \quad z_0 = 1/(M-1)$$

mamy poprawne wartości z dla $M \rightarrow -\infty$ i dla $M = 0$. Podstawiając

Rys. 1

(14) i (17) do (18) otrzymujemy właśnie (12). Aby oszacować błąd przybliżenia (18), rozpatrujemy na mocy (16) funkcję

$$y = z - \frac{1}{M-1} = z - \frac{1}{(z^3+1)/z-1} = \frac{z^4 - z^2}{z^3 - z + 1}.$$

Jest $dy/dz = 0$, gdy $z = 0$ lub

$$z^5 - 2z^3 + 4z^2 + z - 2 = 0.$$

Równanie to ma w przedziale $-1 \leq z < 0$ tylko 1 pierwiastek

$$z \approx -0.73417006.$$

Wtedy $y \approx -0,18564674$. Ponieważ w przedziale $-1 \leq z < 0$ jest $z^3 - z + 1 \neq 0$, a dla $z = -1$ i $z = 0$ jest $y = 0$, więc

$$-0,18565 < y \leq 0.$$

Jest to oszacowanie błędu przybliżenia (18). Na mocy (14) otrzymujemy stąd oszacowanie błędu q_0 dla przybliżenia (12).

Gdyby zamiast (18) przyjąć

$$z_0 = \alpha / (M - \beta)$$

i zażądać, żeby przybliżenie to było dokładne dla $z = -1, -0,5, 0$, tzn. na mocy (16) dla $M = 0, -1,75, -\infty$, to otrzymalibyśmy $\alpha = \beta = 1,75$, czyli

$$(19) \quad z_0 = 7 / (4M - 7).$$

Podstawiając (14) i (17) do (19) otrzymujemy (7). Błędy przybliżeń (19) a następnie (7) szacujemy analogicznie jak poprzednio.

W przypadku $M \geq 0$, gdy M (a zatem i z co do modułu) jest bardzo duże, możemy napisać (16) w postaci

$$z^2 - M + 1/z = 0,$$

skąd

$$z^2 - M \approx 0,$$

czyli

$$z \approx -\sqrt{M}.$$

Przybliżenie takie nie byłoby dobre dla $M = 0$, tzn. gdy $z = -1$. Przyjmując

$$(20) \quad z_0 = -\sqrt{M+1}$$

otrzymujemy przybliżenie dokładne zarówno dla $M = 0$ jak i $M \rightarrow \infty$. Szacując błąd takiego przybliżenia analogicznie jak dla (18), i oznaczając jego błąd przez p_0 , otrzymujemy

$$0 \leq p_0 < 0,12135.$$

Na mocy (14) i (17) otrzymujemy stąd przybliżenie (13) i oszacowanie jego błędu q_0 .

Przyjmując zamiast (20)

$$z_0 = \alpha - \sqrt{M+1}$$

i dobierając takie α , żeby największa i najmniejsza wartość błędu następnego przybliżenia z_1 w przedziale $z \leq -1$ miały przeciwne znaki, a moduły równe, otrzymujemy $\alpha \approx 0,05822$, skąd mamy

$$(21) \quad z_0 = 0,05822 - \sqrt{M+1}.$$

Podstawiając tu (14) i (17) otrzymujemy (8). Błędy przybliżeń (21) i (8) szacujemy analogicznie jak poprzednio.

Oszacowania przybliżeń następnych otrzymujemy na mocy łatwego do wprowadzenia wzoru

$$p_{n+1} = \frac{3z_n + p_n}{M - 3z_n^2} p_n^2, \quad n = 0, 1, \dots,$$

gdzie z_n oznacza n -te kolejne przybliżenie Newtona dla równania (16), a p_n błąd tego przybliżenia, tzn. $p_n = z - z_n$, gdzie z jest szukanym pierwiastkiem równania (16). Podstawiając na mocy (16)

$$M = (z^3 + 1)/z \quad \text{oraz} \quad z_n = z - p_n$$

otrzymujemy

$$p_{n+1} = \frac{(3z - 2p_n)zp_n^2}{-2z^3 + 6p_n z^2 - 3p_n^2 z + 1}.$$

Traktujemy teraz p_{n+1} jako funkcję 2 zmiennych z i p_n , wykazujemy, że funkcja ta nie ma ekstremów ani biegunów w rozpatrywanym obszarze prostokątnym, i poszukujemy jej wartości ekstremalnych na brzegu prostokąta. Rachunki są żmudne, ponieważ wymagają wielokrotnego obliczania w danym przedziale wszystkich pierwiastków równań czwartego stopnia.

Zwróćmy teraz uwagę, że jeżeli x_n i z_n oznaczają odpowiadające sobie przybliżenia newtonowskie dla równań (1) i (16), to na mocy (10) i (14) jest

$$x_n = Rz_n - B \quad \text{i} \quad q_n = Rp_n.$$

Tą drogą przechodzimy od oszacowań błędów przybliżeń z_n do oszacowań błędów przybliżeń x_n .

II. Równania czwartego stopnia. Niech będzie dane równanie

$$(22) \quad ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \quad a \neq 0.$$

Równanie (22) sprowadzamy do 2 równań kwadratowych

$$(23) \quad x^2 + m_i x + n_i = 0, \quad i = 1, 2,$$

tzn. przedstawiamy (22) w postaci

$$a(x^2 + m_1 x + n_1)(x^2 + m_2 x + n_2) = 0.$$

Współczynniki równań (23) obliczamy sposobem podanym niżej ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Sposób ten jest znany. Por. np. A. Mostowski i M. Stark, *Algebra wyższa*, cz. II, str. 79-81.

Najpierw obliczamy

$$(24) \quad B = \frac{b}{2a}, \quad H = B^2 - \frac{c}{a}, \quad K = BH + \frac{d}{a}, \quad L = H^2 - \frac{4e}{a}.$$

Jeżeli $K = 0$ i $L \geq 0$, to

$$(25) \quad m_1 = m_2 = B, \quad n_1 = \frac{1}{2}(-H - \sqrt{L}), \quad n_2 = \frac{1}{2}(-H + \sqrt{L}).$$

Jeżeli $K = 0$ i $L < 0$, to obliczamy

$$(26) \quad Q = \frac{1}{2}B^2 + H + \sqrt{(\frac{1}{2}B^2 + H)^2 - L},$$

a następnie

$$(27) \quad \begin{aligned} m_1 &= B - \sqrt{Q}, & m_2 &= B + \sqrt{Q}, \\ n_1 &= \frac{1}{2}(Q - B\sqrt{Q} - H), & n_2 &= \frac{1}{2}(Q + B\sqrt{Q} - H). \end{aligned}$$

Jeśli wreszcie $K \neq 0$, to obliczamy sposobem podanym w pierwszej części niniejszej pracy dowolny pierwiastek dodatni Q równania

$$(28) \quad Q^3 - (B^2 + 2H)Q^2 + (2BK + L)Q - K^2 = 0$$

(pierwiastek taki zawsze istnieje z uwagi na to, że dla $Q = 0$ lewa strona równania (28) ma wartość ujemną, a dla Q zdążającego do $+\infty$ zdąża również do $+\infty$, a więc dla dostatecznie dużych Q jest dodatnia). Następnie obliczamy

$$(29) \quad \begin{aligned} m_1 &= B - \sqrt{Q}, & m_2 &= B + \sqrt{Q}, \\ n_1 &= \frac{1}{2}(Q - B\sqrt{Q} - H) + K/(2\sqrt{Q}), & n_2 &= \frac{1}{2}(Q + B\sqrt{Q} - H) - K/(2\sqrt{Q}). \end{aligned}$$

Podam jeszcze uzasadnienie powyższego postępowania.

Podstawiając (24) do (22) otrzymujemy równanie

$$x^4 + 2Bx^3 + (B^2 - H)x^2 + (K - BH)x + \frac{1}{4}(H^2 - L) = 0.$$

Ponieważ z podzielenia lewej strony tego równania przez

$$x^2 + mx + n$$

otrzymujemy resztę

$$\begin{aligned} &(-m^3 + 2Bm^2 + 2mn - B^2m + Hm - 2Bn + K - BH)x + \\ &+ (-m^2n + 2Bmn + n^2 - B^2n + Hn + \frac{1}{4}(H^2 - L)), \end{aligned}$$

więc równanie

$$x^2 + mx + n = 0$$

może być jednym z równań (23) wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony układ

$$(30) \quad \begin{aligned} -m^3 + 2Bm^2 + 2mn - B^2m + Hm - 2Bn + K - BH &= 0, \\ -m^2n + 2Bmn + n^2 - B^2n + Hn + \frac{1}{4}(H^2 - L) &= 0. \end{aligned}$$

Jeżeli $K = 0$, to pierwsze z tych równań można napisać w postaci

$$(31) \quad -(m-B)(m^2-Bm-H-2n) = 0.$$

Gdyby $m-B = 0$, to z drugiego równania (30) otrzymalibyśmy

$$(32) \quad n^2 + Hn + \frac{1}{4}(H^2 - L) = 0.$$

Jeżeli zatem $K = 0$ i $L \geq 0$, to można przyjąć $m = B$ i na mocy (32)

$$n = \frac{1}{2}(-H \pm \sqrt{L}).$$

Mamy stąd wzory (25).

Jeżeli $K = 0$ i $L < 0$, to równość (32) nie zachodzi, a zatem $m-B \neq 0$ i na mocy (31)

$$(33) \quad n = \frac{1}{2}(m^2 - Bm - H).$$

Podstawiając (33) do drugiego równania (30) otrzymujemy po uporządkowaniu

$$(m-B)^4 - (B^2 + 2H)(m-B)^2 + L = 0.$$

Podstawiając

$$(34) \quad Q = (m-B)^2$$

otrzymujemy stąd i z (33) wzory (26) i (27); na Q wybieramy to spośród dwu rozwiązań, które zapewnia spełnienie warunku $Q > 0$.

Jeżeli wreszcie $K \neq 0$, to na mocy pierwszego równania (30)

$$m-B \neq 0$$

i

$$n = \frac{m^3 - 2Bm^2 + B^2m - Hm + BH - K}{2(m-B)},$$

czyli

$$(35) \quad n = \frac{1}{2}(m^2 - Bm - H) - K/2(m-B).$$

Podstawiając (35) do drugiego równania (30), a następnie podstawiając (34) otrzymujemy równanie (28). Na mocy (34) i (35) otrzymujemy stąd wzory (29).

Na zakończenie warto zauważyć, że warunek

$$K = L = 0$$

jest konieczny i wystarczający na to, by lewa strona równania (22) była pełnym kwadratem.

INSTYTUT BADAŃ JĄDROWYCH PAN WARSZAWA
INSTYTUT MATEMATYCZNY PAN WARSZAWA

Praca wpłynęła 14. 11. 1960

М. ВАРМУС (Варшава)

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕЙ И ЧЕТВЕРТОЙ
СТЕПЕНИ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

РЕЗЮМЕ

Пользуясь методом последовательных приближений Ньютона для численного решения уравнений третьей и четвертой степени, особенно на автоматически работающих цифровых машинах, мы наталкиваемся на трудности в задании исходного приближения и в оценке погрешностей.

В настоящей статье предлагается для уравнений третьей степени процесс вычислений, который просто и однозначно определяет предварительное приближение и дает один из корней уравнения с точностью до десяти знаков уже после трехкратного применения формулы Ньютона.

Уравнения четвертой степени сводятся к паре квадратных уравнений, коэффициенты которых вычисляются однозначно определенным методом. В общем случае сводится он к решению уравнений третьей степени.

М. WARMUS (Warszawa)

**NUMERICAL SOLVING OF EQUATIONS OF THIRD AND FOURTH ORDER
WITH REAL COEFFICIENTS**

SUMMARY

If we apply Newton's method of successive approximation to the problem of the solution of an equation of third or fourth order, we meet, especially when using automatic computers, difficulties connected with giving the first approximation and determining estimation of error. The present paper gives a method for equation of third order which in a simple way determines the first approximation uniquely, and which, after applying Newton's formula three times, gives one of the roots up to 10 decimal places.

The equations of fourth order are reduced to two equations whose coefficients are uniquely determined. In general, this method of reduction leads to the solution of an equation of third order.