J. ODERFELD i E. PLESZCZYŃSKA (Warszawa)

PEWNE ZASTOSOWANIA PARTYCJI

1. Uwagi wstępne. Niech X będzie zbiorem liczb całkowitych, nieujemnych, który może spełniać pewne dodatkowe warunki; a niech będzie liczbą całkowitą nieujemną.

Partycją liczby a nazywamy przedstawienie a w postaci $\sum x_i$, gdzie $x_i \in X$, przy czym porządek dodawania jest obojętny, powtórzenia składników są dozwolone, liczba składników może być ustalona lub nie ustalona.

Od czasu Eulera wielu autorów zajmowało się liczbą partycji przy różnych założeniach szczegółowych. Obszerny przegląd takich prac można znaleźć na przykład w [1] i [2].

W zastosowaniach, o których będzie mowa w niniejszej pracy, przyjmujemy zespół założeń (I):

X jest zbiorem liczb całkowitych, nieujemnych, $x_i \in X$,

$$x_i \leq c,$$
$$\sum_{i=1}^b x_i = a,$$

gdzie a i c są ustalonymi liczbami całkowitymi, nieujemnymi, b jest ustaloną liczbą naturalną.

Liczbę partycji przy założeniach (I) będziemy oznaczali przez $p(a, b; c)$.

Usuając teraz z założeń (I) warunek, że $x_i \leq c$, otrzymujemy inny zespół założeń (II); odpowiednią liczbę partycji oznaczamy przez $p(a, b)$. Oczywiście

$$(1) \quad p(a, b; c) = p(a, b) \quad \text{dla} \quad c \geq a.$$

Dla wygody wprowadzimy jeszcze dwie umowy

$$(2) \quad p(a, 0; c) = 1,$$

$$(3) \quad p(a, b) = 0 \quad \text{dla} \quad a < 0.$$

Jak wiadomo (por. np. [2]), metodą funkcji tworzącej otrzymuje się związek

$$(4) \quad p(a, b) = \sum_{\lambda \geq 0} p(a - \lambda b, b - 1).$$

Jest to wzór rekurencyjny, z którego można obliczać $p(a, b)$ pamiętając, że

$$(5) \quad p(a, 1) = 1$$

$$(6) \quad p(a, 2) = \left[\frac{a}{2} \right] + 1.$$

Dowody są trywialne.

Dla $p(a, b; c)$ nie znaleźliśmy w dostępnych nam źródłach wzoru rekurencyjnego. Wyprowadzamy go w rozdziale 2 metodą kombinatoryczną; jako przypadek szczególny otrzymuje się nowy wzór rekurencyjny dla $p(a, b)$. W rozdziale 3 podajemy kilka wzorów roboczych ścisłych, w rozdziale 4 zajmujemy się wzorami asymptotycznymi. Wreszcie w rozdziale 5 podajemy zastosowania mechaniczne i probabilistyczne.

2. Wzory rekurencyjne dla $p(a, b; c)$ oraz $p(a, b)$.

Przypadek 1: $b = 1$

Jeśli $c \geq a$, istnieje jedna partycja, jeśli $c < a$, to założenia (I) są sprzeczne. Wskutek tego

$$(7) \quad p(a, 1; c) = \begin{cases} 0 & \text{dla } c < a, \\ 1 & \text{dla } c \geq a. \end{cases}$$

Przypadek 2: $b = 2$

Zgodnie z założeniami (I) $x_1 + x_2 = a$. Niech $x_1 \leq x_2$; wtedy $x_2 \geq a/2$. Jednocześnie zaś $x_2 \leq c$.

Jeśli $c < a/2$, to ostatnie dwie nierówności są sprzeczne.

Partycji jest tyle, ile jest liczb naturalnych na domkniętym odcinku

$$(a/2, c), \quad \text{gdy } a/2 \leq c < a,$$

lub

$$(a/2, a), \quad \text{gdy } c \geq a.$$

Stąd

$$(8) \quad p(a, 2; c) = \begin{cases} 0 & \text{dla } c < a/2, \\ [c - a/2] + 1 & \text{dla } a/2 \leq c < a, \\ [a/2] + 1 & \text{dla } c \geq a. \end{cases}$$

Przypadek 3: $b > 2$

Ze składników wszystkich możliwych partycji tworzymy macierz o b kolumnach porządkując je niemalejąco: $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_b$; suma każdego wiersza jest a , nie powtarzamy wierszy różniących się tylko porządkiem wyrazów.

Liczba wierszy macierzy, w których $x_b \leq c$, jest $p(a, b; c)$.

Oznaczmy dla krótkości

$$(9) \quad x_{b-2} = i, \quad \sum_{j=1}^{b-3} x_j = k.$$

Zachodzi relacja

$$(10) \quad 0 \leq i \leq [a/3].$$

Górny kres odpowiada przypadkowi, gdy $x_b = x_{b-1} = i$.

Dla wszelkiej ustalonej wartości i mamy

$$(11) \quad 0 \leq k \leq (b-3)i.$$

Górny kres odpowiada przypadkowi, gdy $x_1 = x_2 = \dots = x_{b-3} = i$.

Teraz znajdziemy liczbę $S(k, i)$ par uporządkowanych $\langle x_{b-1}, x_b \rangle$ dla ustalonych wartości k, i . Gdyby nie było warunku uporządkowania wyrazów w wierszu i warunku nieprzekraczania c , to liczba ta równałaby się $p(a-k-i, 2)$. Należy jednak odliczyć te wszystkie partycje, dla których

$$(12) \quad x_{b-1} < i \quad \text{lub} \quad x_{b-1} > c,$$

bądź też

$$(13) \quad x_b > c \quad \text{czyli} \quad x_{b-1} < a-k-i-c.$$

Łącząc (12) i (13) znajdujemy

$$(14) \quad x_{b-1} < \max(i, a-c-k-i).$$

Z samego znaczenia $S(k, i)$ wynika, że $S(k, i)$ powinno być nie mniejsze od jedności. Jeśli ten warunek jest spełniony, to każdej wartości x_{b-1} odpowiada, przy ustalonych k, i , dokładnie jedna partycja. Wskutek tego

$$(15) \quad S(k, i) = \begin{cases} p(a-k-i, 2) - \max(i, a-c-k-i) & \text{dla } a-k-i \leq 2c, \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Ponieważ dla każdej pary k, i suma $b-3$ wyrazów jest k i żaden wyraz nie przekracza i , więc w pierwszych $b-3$ kolumnach liczba partycji jest $p(k, b-3; i)$. Wskutek tego ostatecznie

$$(16) \quad p(a, b; c) = \sum_{i=0}^{[a/3]} \sum_{k=0}^{(b-3)i} S(k, i) p(k, b-3; i).$$

[illegible]

Tablica 2. Wartości $p(a, 3; c)$

$a \backslash c$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
2	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	...
3	0	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	...
4	0	0	2	3	4	4	4	4	4	4	4	...
5	0	0	1	3	4	5	5	5	5	5	5	...
6	0	0	1	3	5	6	7	7	7	7	7	...
7	0	0	0	2	4	6	7	8	8	8	8	...
8	0	0	0	1	4	6	8	9	10	10	10	...
9	0	0	0	1	3	6	8	10	11	12	12	...
10	0	0	0	0	2	5	8	10	12	13	14	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

Dla $b = 3, 4, 5, 6$ wzór (17) przyjmuje następujące postacie:

$$(20) \quad p(a, 3) = \sum_{i=0}^{[a/3]} p(a-3i, 2),$$

$$(21) \quad p(a, 4) = \sum_{i=0}^{[a/3]} \sum_{k=0}^i p(a-3i-k, 2),$$

$$(22) \quad p(a, 5) = \sum_{i=0}^{[a/3]} \sum_{k=0}^{2i} p(a-3i-k, 2) p(k, 2; i),$$

$$(23) \quad p(a, 6) = \sum_{i=0}^{[a/3]} \sum_{k=0}^{3i} p(a-3i-k, 2) p(k, 3; i).$$

Przykład stosowania pokażemy dla $p(17, 5)$. Z wzoru (22) mamy

$$p(17, 5) = \sum_{i=0}^5 \sum_{k=0}^{2i} \left[\frac{19-3i-k}{2} \right] p(k, 2; i),$$

przy czym wartości $p(k, 2; i)$ można odczytać z tablicy 1. Obszar sumowania obejmuje pary k, i spełniające nierówności

$$0 \leq i \leq 5, \quad 0 \leq k \leq 2i, \quad k+3i \leq 17.$$

Trzecia nierówność pochodzi stąd, że tylko przy jej spełnieniu $\left[\frac{19-3i-k}{2} \right] > 0$. Wygodnie jest ująć całość rachunków w schemat, jak w tablicy 3.

Tablica 3. Obliczenie $p(17, 5)$

$k \backslash i$	0	1	2	3	4	5
0	9·1	8·1	6·1	5·1	3·1	2·1
1		7·1	6·1	4·1	3·1	1·1
2		7·1	5·2	4·2	2·2	1·2
3			5·1	3·2	2·2	
4			4·1	3·2	1·3	
5				2·1	1·2	
6				2·1		

Po przemnożeniu liczb w oczkach tablicy i dodaniu iloczynów znajdujemy $p(17, 5) = 119$.

4. Wyrażenia asymptotyczne. W niektórych zastosowaniach użyteczna jest przybliżona liczba partycji. Bardzo prosty sposób na tworzenie wzorów asymptotycznych pokażemy na przykładzie wzoru (21).

Otóż $p(a-3i-k, 2) = \left(\frac{a-3i-k}{2} + \frac{3}{4} \right) \pm \frac{1}{4}$, gdzie znak plus stosuje się, gdy $a-3i-k$ jest parzyste, a znak minus, gdy jest nieparzyste.

Jeśli a jest duże, to liczba wartości $p(a-3i-k, 2)$ na brzegu obszaru sumowania we wzorze (21) jest mała w porównaniu z liczbą wartości we wnętrzu obszaru. Ponieważ zaś dla ustalonego k wyrażenie $a-3i-k$ staje się kolejno parzyste i nieparzyste, gdy i przebiega zbiór liczb całkowitych, więc przyjmując

$$p(a-3i-k, 2) = \frac{a-3i-k}{2} + \frac{3}{4}$$

popelniamy błąd względny malejący do zera, gdy $a \rightarrow \infty$. Wskutek tego

$$p(a, 4) \cong \sum_{i=0}^{[a/3]} \sum_{k=0}^i \left(\frac{a}{2} + \frac{3}{4} - \frac{k+3i}{2} \right).$$

Po wykonaniu wskazanych działań znajdujemy ostatecznie

$$(24) \quad p(a, 4) \cong \left(\left[\frac{a}{3} \right] + 1 \right) \left\{ \frac{a}{2} + \frac{3}{4} + \left[\frac{a}{3} \right] \left(\frac{a}{4} - \frac{19}{24} \right) - \frac{7}{12} \left[\frac{a}{3} \right]^2 \right\}.$$

W tablicy 4 porównaliśmy kilka wartości $p(a, 4)$ ścisłych i przybliżonych.

Tablica 4. Wartości $p(a, 4)$

a	10	15	20	25
ściśle (21)	23	54	108	185
w przybliżeniu (24)	22,5	50,6	105,0	176,2

Podobnie możemy na przykład otrzymać z (20)

$$(25) \quad p(a, 3) \cong \left(\left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor + 1 \right) \left(\frac{a}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor \right),$$

a z (18) i (25)

$$(26) \quad p(a, 4) - p(a, 4; c-1) \cong \frac{(a-c+1)((a+2)(a+4) - (a+3)(a+c))}{12} + \frac{a(a+1)(2a+1) - c(c-1)(2c-1)}{72},$$

dla $c \geq \frac{a}{2} + 1$.

Zastosowanie wzorów (24) i (26) pokażemy w rozdziale 5.

5. Zastosowanie. Jako pierwszy przykład rozpatrzmy zagadnienie ze struktury mechanizmów. Nie wchodząc w szczegóły techniczne podamy, że każdy mechanizm można (por. [3]) podzielić na *obwody*, a każdy obwód na *gałęzie*, złożone z *członów* (por. schemat na rysunku 1).

Rys. 1

Niech oznaczają:

a — łączną liczbę członów w obwodzie,

b — liczbę gałęzi w obwodzie.

Jeśli uważamy za identyczne dwa obwody różniące się tylko przedstawieniem liczb członów w gałęziach i jeśli uwzględniamy również obwody zdegenerowane, o zerowej liczbie członów w niektórych gałęziach, to wszystkich możliwych obwodów jest dokładnie $p(a, b)$.

Jeśli największa liczba dozwolonych członów w gałęzi jest c , to wszystkich możliwych obwodów jest dokładnie $p(a, b; c)$. W [3] przyto-

czono wzór na $p(a, 2)$; oczywiście można by zastosować całość rozdziałów 2, 3, 4 niniejszej pracy.

Z kolei parę słów o zastosowaniach probabilistycznych.

Wprowadzamy zmienną losową ξ zdefiniowaną jako wektor b -wymiarowy taki, że realizacjami jego b współrzędnych są partycje spełniające założenia (II). Przyjmijmy ponadto hipotezę H_0 , że dla ustalonych a, b jest jednakowe prawdopodobieństwo każdej partycji. Zajmowanie się hipotezą H_0 ma, naszym zdaniem, sens w dwóch przypadkach:

1° gdy z pozamatematycznej wiedzy o badanym zjawisku wynika, że należałoby spodziewać się jednakowego prawdopodobieństwa partycji;

2° gdy o badanym zjawisku wiemy tak mało, że hipoteza H_0 jest równie rozsądna jak inne hipotezy konkurencyjne.

Niech C będzie zmienną losową jednowymiarową której realizacjami są największe współrzędne w realizacjach wektora ξ . Prawdopodobieństwo⁽¹⁾, że $C \geq c$ wyraża się w postaci

$$(27) \quad \Pr(C \geq c) = \frac{p(a, b) - p(a, b; c-1)}{p(a, b)}.$$

Za pomocą (27) możemy testować hipotezę o jednakowym prawdopodobieństwie partycji. Będziemy ją odrzucali na poziomie istotności α , gdy $\Pr(C \geq c) < \alpha$, gdzie c oznacza zaobserwowaną realizację zmiennej losowej C .

Zaproponowany test, który opiera się na badaniu największego składnika partycji, może być użyteczny w tych przypadkach, gdy dysponujemy tylko danymi o wartości tego składnika. Oczywiście test ma małą moc, jak zresztą większość testów nieparametrycznych. Można by ją nieco zwiększyć przez pełniejsze wykorzystanie informacji, na przykład przez dodatkowe rejestrowanie drugiego składnika po największym.

A oto przykład stosowalności testu:

Analizujemy budżety rodzin 4-osobowych mających 32 tysiące złotych rocznie przychodu, przy czym wszystkie sumy występujące w analizie są zaokrąglone do tysiąca złotych. Interesujemy się udziałem członków rodziny w przychodzie, a dysponujemy tylko zarejestrowanymi danymi o przychodzie najwięcej zarabiającego członka rodziny. Nie mamy wyraźnej koncepcji ekonomicznej, która by świadczyła *a priori* za hipotezą równego udziału wszystkich członków rodziny w przychodzie, za hipotezą jedynego żywiciela, lub za jakąś pośrednią. W tej sytuacji nie jest nierozsądne testować hipotezę równie prawdopodobnych partycji o parametrach $a = 32$, $b = 4$.

⁽¹⁾ Na oznaczenie prawdopodobieństwa używamy tu symbolu $\Pr$, gdyż zwykle stosowany symbol p wykorzystaliśmy dla liczby partycji.

Prace cytowane

- [1] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford 1954.
- [2] H. H. Ostmann, *Additive Zahlentheorie*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.
- [3] A. Morecki, *Zagadnienie zupełności w klasyfikacji strukturalnych ruchomych grup*, *Archiwum Budowy Maszyn* 7 (1960), str. 231-242.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
KATEDRA TEORII MASZYN I MECHANIZMÓW POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Praca wpłynęła 28. 8. 1960

Я. ОДЕРФЕЛЬД и Э. ПЛЕЩИНСКА (Варшава)

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ РАЗЛОЖЕНИЙ ЧИСЛА НА СУММУ

РЕЗЮМЕ

Через $p(a, b; c)$ обозначим число всех разложений числа a на сумму вида $\sum_{i=1}^b x_i$, где a, c и $x_i < c$ — целые неотрицательные числа, b — натуральное число; порядок слагаемых не учитывается. Для числа разложений $p(a, b; c)$ дается вывод рекуррентной формулы (16). Отбрасывая требование $x_i < c$, получаем известные разложения Эйлера, число которых $p(a, b)$ можно найти по формуле (17), являющейся частным случаем формулы (16). В некоторых случаях формула (17) удобнее формулы Эйлера. Формула (18) позволяет легко вычислить $p(a, b; c)$ для $c > a/2$.

После вывода нескольких дальнейших точных и асимптотических формул, строим одномерный непараметрический критерий для проверки статистических гипотез; критерий получается путём рандомизации, где появляются числа разложений (ф-ла (26)). Приводим также двухмерный вариант критерия, который несколько мощнее предыдущего. Другим приложением найденных формул является теория структуры механизмов.

J. ODERFELD and E. PLESZCZYŃSKA (Warszawa)

ON SOME APPLICATION OF PARTITIONS

SUMMARY

We denote by $p(a, b; c)$ the number of partitions, i.e. representations of the number a in the form $\sum_{i=1}^b x_i$, where a, c and $x_i < c$ are nonnegative integers, b is a positive integer, and the order of summation is irrelevant. We derive the recursive formula (16) for the number of partitions $p(a, b; c)$. Deleting the condition $x_i < c$ we obtain the well-known Euler's formula for partitions, whose number $p(a, b)$ may

be found from formula (17), which is a special case of (16); in some instances formula (17) is more convenient than that of Euler. Formula (18) allows us to compute easily $p(a, b; c)$ for $c > a/2$.

After deriving some other auxiliary formulas, exact as well as asymptotic, we construct a one-dimensional nonparametric test for testing the statistical hypotheses; this test is obtained by randomization in which the numbers $p(a, b; c)$ of partitions appear (formula (26)). We give also the two-dimensional modification of this test, which is slightly more powerful. Another application of the formulas derived is in the theory of structures of mechanisms.