W. RUDZKI (Warszawa)

*SZACOWANIE WŁAŚCIWOŚCI ŚREDNICH
PRODUKTÓW BEZKSZTAŁTNYCH*

1. W pracach [1], [2], [3] i [4] rozpatrywano zagadnienie szacowania właściwości średnich produktów bezkształtnych pakowanych w kształcie dowolnej bryły geometrycznej, a także towarów składanych lub zsypywanych luzem w bryły o symetrycznych przekrojach pionowych. Rozważania dotyczyły przypadku, gdy wartość właściwości w każdym punkcie Q wewnątrz bryły, jest zależna od położenia tego punktu w stosunku do środka geometrycznego P bryły.

Przyjęto, że wartość badanej właściwości w na każdej półprostej łączącej środek P z powierzchnią bryły, jest określona przez jednakową funkcję $w = f(r)$, gdzie r ($0 \leq r \leq 1$) jest umowną miarą odległości od środka P , będącą stosunkiem długości odcinka PQ do długości odcinka łączącego punkt P z powierzchnią bryły na tej samej prostej.

Przyjęto również, co nie zmniejsza ogólności rozważań, że $f(0) = 1$ oraz $f(1) = 0$.

Przyjęcie zależności $w = f(r)$ oznacza, że powierzchnie stałej wartości właściwości w są jednokładne z powierzchnią ograniczającą bryłę, ze środkiem jednokładności w punkcie P .

Średnia wartość $\bar{w}$ badanej właściwości określona jest przez wzór

$$(1.1) \quad \bar{w} = 3 \int_0^1 r^2 f(r) dr.$$

Przyjęto wreszcie w pracy [4], że zależność między wartością właściwości w a odległością r jest typu

$$(1.2) \quad w = f(r) = 1 - r^m,$$

gdzie m może przyjmować dowolną wartość nie mniejszą od jedności, a więc $m \geq 1$.

W przypadku przyjęcia tej zależności, wartość średnia $\bar{w}$ jest

$$(1.3) \quad \bar{w} = \frac{m}{m+3}.$$

W cytowanych pracach przyjęto następującą metodę szacowania średniej $\bar{w}$. Z bryły produktu pobiera się jedną próbkę z miejsca w określonej odległości $r = R$ i jako oszacowanie średniej $\bar{w}$ przyjmuje się wartość właściwości w odległości R , a więc wartość $f(R)$. Odległość $r = R_0 = 0,838$ została dobrana metodą minimaks i zapewnia możliwie najmniejszy maksymalny błąd oceny. Jak pokazano w pracy [4], górny kres błędu w tamtej metodzie wynosi 10,25%, co w niektórych przypadkach może stanowić zbyt dużą wartość.

2. Zajmę się teraz poszukiwaniem innego sposobu pobierania próbki, takiego, żeby przy zależności typu (1.2), błąd oszacowania był mniejszy od 10,25%, a jednocześnie, żeby nie trzeba było pobierać zbyt wielkiej próbki losowej.

Przyjmuję, że pobiera się nie jedną, lecz dwie próbki z dwóch różnych miejsc w odległościach r_1 i r_2 , wybranych z góry. Za oszacowanie średniej $\bar{w}$ w bryle przyjmuję średnią arytmetyczną z wartości właściwości w tych miejscach, a więc średnią arytmetyczną z wartości $f(r_1)$ i $f(r_2)$.

Oszacowaniem średniej będzie w tym przypadku wartość estymatora

$$(2.1) \quad \hat{w} = \frac{1}{2}[f(r_1) + f(r_2)].$$

Jeżeli przyjmiemy w dalszym ciągu, że zachodzi zależność typu (1.2), to

$$(2.2) \quad \hat{w} = 1 - \frac{r_1^m + r_2^m}{2}.$$

Błąd Δw w oszacowaniu średniej $\bar{w}$, zdefiniowany jako różnica między oszacowaniem $\hat{w}$ a prawdziwą średnią $\bar{w}$, będzie w przypadku takiego postępowania wynosił

$$(2.3) \quad \Delta w = \hat{w} - \bar{w} = 1 - \left[\frac{r_1^m + r_2^m}{2} + \frac{m}{m+3} \right].$$

Przy danym m wielkość błędu Δw będzie zależała od doboru wartości r_1 i r_2 .

Zadanie polega na znalezieniu takiej pary wartości $r_1 = R_1$ i $r_2 = R_2$, żeby wyrażenie

$$(2.4) \quad D = \max_{(m \geq 1)} |\Delta w|$$

osiągało minimum ze względu na r_1 i r_2 .

Rozwiązanie numeryczno-graficzne daje, jako wynik przybliżony, wartości $R_1 = 0,631$ i $R_2 = 0,937$ oraz $D = 0,0379$. Oznacza to praktycznie, że w przypadku pobierania dwóch próbek w odległościach R_1 i R_2 od środka P i oszacowania średniej $\bar{w}$ za pomocą wartości $\hat{w}$, błąd oszacowania nie przekroczy 4% prawdziwej średniej, jeżeli zachodzi zależność typu (1.2).

Zależność między wielkością błędu oszacowania średniej a wartością wykładnika m podaje rysunek 1.

Na rysunku tym linią przerywaną wyznaczono przebieg błędu w przypadku pobierania jednej próbki w odległości R_0 . Jak wynika z porównania obu krzywych, błąd w oszacowaniu w przypadku rozważanej metody jest, z wyjątkiem niewielkiego zakresu m od 5 do $8\frac{1}{2}$, zawsze mniejszy niż przy pobieraniu jednej próbki.

Rys. 1. Zależność między błędem Δw a wartością wykładnika m

- błąd oszacowania średniej $\bar{w}$ w przypadku pobierania dwóch próbek w odległościach R_1 i R_2 ;
 błąd oszacowania średniej $\bar{w}$ w przypadku pobierania jednej próbki w odległości R_0

Rozważania powyższe obejmują przypadek, gdy $1 \leq m < \infty$. W praktyce można nieraz ustalić mniejszy zakres wartości m . Poniższa tabelka podaje przykładowo, dla niektórych zakresów wartości m , odległości R_1 i R_2 w jakich należy pobierać próbki, aby błąd maksymalny oszacowania był najmniejszy, oraz wielkości błędów maksymalnych oszacowania:

Zakres m		1-3	1-5
odległość	R_1	0,678	0,648
	R_2	0,862	0,900
błąd maksymalny oszacowania		2,00%	2,40%

3. W dotychczasowych rozważaniach zakładaliśmy, że zależność między badaną właściwością w a odległością r była typu (1.2). W przypadkach praktycznych założenie to będzie jednak dość rzadko spełnione,

a mianowicie funkcja wyrażająca zależność nie będzie przebiegała tak gładko jak przyjmowana dotychczas. Aby bardziej przystosować nasze rozważania do zagadnień praktycznych zmienimy założenia na nieco słabsze, opierając się na pracy [2].

Przyjmijmy, że zależność między badaną właściwością w a odległością r jest typu

$$(3.1) \quad w = \varphi(r).$$

Zakładamy, że funkcja $\varphi(r)$ jest określona dla każdego r , nierosnąca i zawarta w obszarze domkniętym ograniczonym funkcjami

$$(3.2) \quad w_1 = f_1(r) = 1 - r^{m_1} \quad \text{ i } \quad w_2 = f_2(r) = 1 - r^{m_2},$$

gdzie $m_1 \geq 1$, $m_2 > m_1$ oraz $0 \leq r \leq 1$.

Z powyższych założeń wynika, że

$$(3.3) \quad f_1(r) \leq \varphi(r) \leq f_2(r),$$

dla każdego $0 \leq r \leq 1$, przy czym jednoczesna równość wszystkich trzech członów nierówności zachodzi tylko w przypadkach, gdy $r = 0$ i $r = 1$.

Z nierówności (3.3) wynika, że zachodzi

$$(3.4) \quad \bar{w}_1 \leq \bar{w}' \leq \bar{w}_2,$$

gdzie $\bar{w}'$ jest wartością średnią badanej właściwości, a $\bar{w}_1$ i $\bar{w}_2$ są wartościami średnimi funkcji (3.2), określonymi wzorem (1.3).

Zauważmy, że nie może zachodzić jednoczesna równość wszystkich trzech członów nierówności (3.4).

Oznaczmy odpowiednio przez $\bar{r}_1$, $\bar{r}'$ i $\bar{r}_2$ wartości r , dla których zachodzi

$$(3.5) \quad f_1(\bar{r}_1) = \bar{w}_1, \quad \varphi(\bar{r}') = \bar{w}', \quad f_2(\bar{r}_2) = \bar{w}_2.$$

Wartość $\bar{r}'$ może, ale nie musi być zawarta między wartościami $\bar{r}_1$ i $\bar{r}_2$. Zachodzi natomiast $\bar{r}_1 < \bar{r}_2$.

4. Przyjmijmy, jak w pracach cytowanych, że dla oszacowania wartości średniej $\bar{w}'$ badanej właściwości, pobieramy jedną próbkę w odległości $r = R$ i jako oszacowanie średniej $\bar{w}'$ przyjmujemy wartość

$$(4.1) \quad \hat{w}' = \varphi(R),$$

gdzie $0 \leq R \leq 1$.

Zajmiemy się obecnie znalezieniem wielkości błędów jakie można popełnić w oszacowaniu średniej $\bar{w}'$ przy przyjętej metodzie jej szacowania.

Błąd zdefiniujemy jako wartość bezwzględną różnicy między szacowaną średnią $\bar{w}'$ a jej oszacowaniem $\hat{w}'$, a więc

$$(4.2) \quad \delta = |\bar{w}' - \varphi(R)|.$$

Ponieważ ani funkcja $\varphi(r)$, ani tym bardziej jej średnia $\bar{w}'$ nie są ściśle wyspecyfikowane, będziemy mogli znaleźć jedynie górny kres g błędu δ , a więc taką najmniejszą wartość g , dla której zachodzi $\delta \leq g$, dla każdej pary wartości m_1 i m_2 .

Aby wyznaczyć wartość g rozpatrzmy trzy przypadki położenia wartości $\bar{r}_1$ i $\bar{r}_2$ względem danego stałego R , a więc

$$\text{a) } \bar{r}_2 \leq R, \quad \text{b) } \bar{r}_1 \geq R, \quad \text{c) } \bar{r}_1 < R < \bar{r}_2.$$

Zajmijmy się znalezieniem ograniczenia g dla powyższych przypadków.

a) Niech d_1 będzie największą wartością $\bar{w}'$ w przypadku, gdy $\varphi(R) = f_1(R)$, a więc gdy funkcja $\varphi(r)$ przyjmie najmniejszą spośród możliwych w odległości R wartości.

ZM-373

Rys. 2. Przykładowy skrajny przebieg funkcji $\varphi(r)$ w przypadku, gdy $\bar{r}_2 \leq R$

ZM-374

Rys. 3. Przykładowy skrajny przebieg funkcji $\varphi(r)$ w przypadku, gdy $\bar{r}_1 \geq R$

Wartość $\bar{w}'$ będzie największa i równa d_1 wtedy, gdy funkcja $\varphi(r)$ będzie miała następujący przebieg (patrz rys. 2):

$$\varphi(r) = \begin{cases} f_2(r) & \text{w przedziale } \langle 0, R \rangle, \\ f_1(R) = \text{const} & \text{w przedziale } \langle R, K_1 \rangle, \\ f_2(r) & \text{w przedziale } \langle K_1, 1 \rangle, \end{cases}$$

co wynika z założeń dotyczących funkcji $\varphi(r)$, gdzie K_1 spełnia równanie (4.5) (patrz również rys. 2).

Korzystając z wzoru (1.1) na wartość średnią oraz z (3.2) można napisać

$$(4.3) \quad d_1 = 3 \int_0^R r^2 f_2(r) dr + 3 \int_R^{K_1} r^2 f_1(R) dr + 3 \int_{K_1}^1 r^2 f_2(r) dr,$$

lub też inaczej

$$(4.4) \quad d_1 = \bar{w}_2 - 3 \int_R^{K_1} r^2 [f_2(r) - f_2(K_1)] dr.$$

Wartość K_1 wyznaczymy z równości

$$(4.5) \quad f_1(R) = f_2(K_1),$$

stąd

$$(4.6) \quad K_1 = R^{m_1/m_2}.$$

Z (4.4), (4.6) i (1.3) mamy

$$(4.7) \quad d_1 = \frac{m_2}{m_2 + 3} - \frac{3 [R^{m_2+3} - R^{m_1(m_2+3)/m_2}]}{m_2 + 3} + R^{m_1+3} - R^{m_1(m_2+3)/m_2}.$$

Górne więc ograniczenie błędu oszacowania, oznaczmy je przez g_1 , będzie w tym przypadku

$$(4.8) \quad g_1 = d_1 - f_1(R).$$

Po podstawieniu (4.7) i (3.2) do (4.8) otrzymuje się ostatecznie

$$(4.9) \quad g_1 = \frac{3}{m_2 + 3} [R^{m_1(m_2+3)/m_2} - R^{m_2+3} - 1] + R^{m_1}(1 - R^3) - R^{m_1(m_2+3)/m_2},$$

dla wszystkich par m_1 i m_2 , dla których zachodzi $\bar{r}_2 \leq R$.

b) Niech teraz d_2 będzie najmniejszą wartością $\bar{w}'$ w przypadku, gdy $\varphi(R) = f_2(R)$. W tym przypadku wartość $\bar{w}'$ będzie najmniejsza i równa d_2 , jeżeli

$$\varphi(r) = \begin{cases} f_2(R) = \text{const} & \text{dla } K_2 \leq r \leq R, \\ f_1(r) & \text{dla pozostałych wartości } r, \end{cases}$$

gdzie K_2 spełnia równanie (4.12) (patrz również rys. 3).

Analogicznie jak poprzednio otrzymujemy

$$(4.10) \quad d_2 = 3 \int_{K_2}^{K_2} r^2 f_1(r) dr + 3 \int_{K_2}^R r^2 f_2(R) dr + 3 \int_R^1 r^2 f_1(r) dr,$$

lub też

$$(4.11) \quad d_2 = \bar{w}_1 + 3 \int_{K_2}^R r^2 [f_1(K_2) - f_1(r)] dr.$$

Wartość K_2 w tym przypadku wynika z równości

$$(4.12) \quad f_1(K_2) = f_2(R)$$

i wynosi

$$(4.13) \quad K_2 = R^{m_2/m_1}.$$

Z (4.11), (4.13) i (1.3)

$$(4.14) \quad d_2 = \frac{m_1}{m_1+3} + \frac{3}{m_1+3} [R^{m_1+3} - R^{m_2(m_1+3)/m_1}] + R^{m_2(m_1+3)/m_1} - R^{m_2+3}.$$

Górne ograniczenie błędu, oznaczmy je przez g_2 , będzie w tym przypadku

$$(4.15) \quad g_2 = f_2(R) - d_2,$$

a po podstawieniu (4.14) i (3.2) do (4.15) ostatecznie otrzymujemy

$$(4.16) \quad g_2 = \frac{3}{m_1+3} [1 - R^{m_1+3} + R^{m_2(m_1+3)/m_1}] - R^{m_2}(1 - R^3) - R^{m_2(m_1+3)/m_1},$$

dla wszystkich par m_1 i m_2 , dla których $\bar{r}_1 \geq R$.

c) Rozważmy wreszcie przypadek, gdy $\bar{r}_1 < R < \bar{r}_2$. W zależności od przebiegu funkcji $\varphi(r)$ i położenia wartości $\bar{w}'$ ograniczenie górne błędu oszacowania, oznaczmy je przez g_3 , będzie równe g_1 lub g_2 , w zależności od tego, która z tych dwu wielkości będzie większa. A więc

$$(4.17) \quad g_3 = \sup\{g_1, g_2\},$$

dla wszystkich par m_1 i m_2 , dla których $\bar{r}_1 < R < \bar{r}_2$.

Ogólnie, dla danej pary m_1 i m_2 ograniczenie górne błędu oszacowania δ będzie wynosiło

$$(4.18) \quad g = \sup\{g_1, g_2, g_3\}.$$

5. Jak już wspomniano, w pracy [4] znaleziono taką odległość $R_0 = 0,838$, że pobieranie próbki w tej odległości zapewnia, w przypadku zależności (1.2), możliwie najmniejszy błąd oszacowania średniej wartości badanej właściwości.

Zbadajmy teraz, w jakiej odległości R należy pobierać próbkę, aby w przypadku założeń przyjętych w trzeciej części niniejszej pracy, błąd oszacowania średniej $\bar{w}'$, a właściwie górne ograniczenie g tego błędu było możliwie najmniejsze.

Przyjmijmy tu pewien warunek ograniczający na funkcje $f_1(r)$ i $f_2(r)$, który będzie wyrażał się relacją między wykładnikami m_1 i m_2 .

Spośród wielu możliwych sformułowań tego warunku, najprostsze wydaje się żądanie, żeby, w przyjętym układzie współrzędnych, pole obszaru zawartego między funkcjami ograniczającymi było stałe i równe pewnej liczbie k . W takim przypadku funkcja $\varphi(r)$ będzie się znajdowała zawsze w jednakowym co do wielkości obszarze. Wybór wielkości k zależy od istniejących warunków praktycznych. Oczywiście, że błąd oszacowania będzie tym mniejszy, im mniejsze będzie k .

Poszukiwaną relację między m_1 i m_2 znajdziemy z warunku

$$(5.1) \quad \int_0^1 (1-r^{m_2}) dr - \int_0^1 (1-r^{m_1}) dr = k,$$

gdzie $0 < k < \frac{1}{2}$.

Po scałkowaniu otrzymujemy

$$(5.2) \quad \frac{1}{m_1+1} - \frac{1}{m_2+1} = k,$$

a stąd

$$(5.3) \quad m_2 = \frac{m_1 + k(m_1+1)}{1 - k(m_1+1)}.$$

Aby zorientować się w błędach oszacowania średniej $\bar{w}'$, w przypadku pobierania próbki w odległości R , przyjmijmy przykładowo $k = \frac{1}{6}$. Taka wielkość obszaru odpowiada obszarowi w przypadku, gdy $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ (patrz rys. 4a).

Rys. 4. Przykładowy podział funkcjami ograniczającymi na obszary o jednakowych polach

Zadanie polega na znalezieniu takiej odległości $r = R'_0$, żeby przy danym k wyrażenie

$$(5.4) \quad G = \max_{(m_1, m_2)} g,$$

osiągało minimum ze względu na R .

Korzystając z wyrażeń (4.9), (4.16), (4.17) i (5.3) otrzymuje się metodą numeryczno-graficzną przy $k = \frac{1}{6}$ odległość $R'_0 = 0,838$ oraz wielkość ograniczenia błędu oszacowania równą $G_1 = 30,4\%$.

Przebieg wartości g_1 i g_2 dla $k = \frac{1}{6}$ podaje rysunek 5.

Analogicznie dla przypadku $k = \frac{1}{8}$ (patrz rys. 4b) otrzymujemy $R'_0 = 0,840$ oraz $G_2 = 26,0\%$.

Otrzymane wielkości błędów oszacowania są w obu rozwiązaniach przykładowych duże. Można jednak z całą pewnością stwierdzić, iż w praktyce błędy oszacowania nigdy nie osiągną swych kresów górnych, a będą zawsze o wiele mniejsze od nich. Do takiego stwierdzenia upoważnia to,

Rys. 5. Przebieg wartości ograniczeń górnych g_1 i g_2 w przypadku gdy $k = \frac{1}{6}$

że przyjęty schemat obliczania wielkości ograniczeń zakłada bardzo specyficzny, skrajny i „złośliwy” przebieg funkcji $\varphi(r)$, który praktycznie trudno byłoby zrealizować, nawet w przybliżeniu. Ponadto, wydaje się, że w wielu przypadkach praktycznych można będzie przyjąć mniejsze k , co oczywiście zmniejszy błąd oszacowania.

6. W drugim rozdziale niniejszej pracy pokazano, że w przypadku zależności między odległością r a badaną właściwością w , określonej wzorem (1.2), pobieranie dwu próbek z określonych miejsc R_1 i R_2 i przez przyjęcie jako oszacowania badanej średniej wyrażenia (2.1) uzyskuje się znaczne zmniejszenie błędów oszacowania średniej w stosunku do błędów popełnionych przy pobieraniu jednej próbki.

Zastosujemy więc obecnie metodę pobierania próbki i szacowania średniej podaną w rozdziale drugim, do przypadku zależności $\varphi(r)$ określonej w rozdziale trzecim niniejszego opracowania.

Zajmiemy się najpierw określeniem wielkości błędów popełnionych przy tej metodzie. Tak jak w przypadku pobierania jednej próbki wyznaczymy kresy górne błędów.

Rozważmy dwa skrajne i najbardziej „złośliwe” przebiegi funkcji $\varphi(r)$.

a) Niech d'_1 będzie najmniejszą wartością szacowanej średniej $\bar{w}'$ w przypadku, gdy w punktach R_1 i R_2 funkcja $\varphi(r)$ przyjmuje możliwie

największe wartości, a w pozostałych punktach przedziału $\langle 0, 1 \rangle$ możliwie najmniejsze wartości. Przypadek taki zachodzi, gdy

$$(6.1) \quad \varphi(r) = \begin{cases} f_2(R_1) & \text{dla } K_1 \leq r \leq R_1, \\ f_2(R_2) & \text{dla } K_2 \leq r \leq R_2, \\ f_1(r) & \text{dla pozostałych wartości } r, \end{cases}$$

jeżeli $K_2 \geq R_1$ (patrz rys. 6a) lub

$$(6.2) \quad \varphi(r) = \begin{cases} f_2(R_1) & \text{dla } K_1 \leq r \leq R_1, \\ f_2(R_2) & \text{dla } R_1 \leq r \leq R_2, \\ f_1(r) & \text{dla pozostałych wartości } r, \end{cases}$$

jeżeli $K_2 < R_1$ (patrz rys. 6b), dla każdej pary wartości m_1 i m_2 .

ZM-377

Rys. 6. Przykładowy skrajny przebieg funkcji $\varphi(r)$ w przypadku, gdy w punktach R_1 i R_2 przyjmuje ona możliwie największe wartości

Wartość d'_1 będzie więc wynosiła

$$(6.3) \quad d'_1 = \begin{cases} 3 \int_0^{K_1} r^2 f_1(r) dr + 3f_2(R_1) \int_{K_1}^{R_1} r^2 dr + 3 \int_{R_1}^{K_2} r^2 f_1(r) dr + \\ \quad + 3f_2(R_2) \int_{K_2}^{R_2} r^2 dr + 3 \int_{R_2}^1 r^2 f_1(r) dr & \text{dla } K_2 \geq R_1, \\ 3 \int_0^{K_1} r^2 f_1(r) dr + 3f_2(R_1) \int_{K_1}^{R_1} r^2 dr + 3f_2(R_2) \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr + \\ \quad + 3 \int_{R_2}^1 r^2 f_1(r) dr & \text{dla } K_2 < R_1. \end{cases}$$

Ponieważ jako oszacowanie średniej $\bar{w}'$ przyjmujemy wartość estymatora $\hat{w}$ określonego wzorem (2.1) błąd g'_1 oszacowania średniej, zdefiniowany jako wartość bezwzględna różnicy między wartością estymatora a wartością średnią, będzie dla każdej pary wartości m_1, m_2 w rozważanym przypadku przebiegu funkcji $\varphi(r)$, wynosił

$$(6.4) \quad g'_1 = |\tfrac{1}{2}[f_2(R_1) + f_2(R_2)] - d'_1|.$$

b) Zajmijmy się obecnie drugim skrajnym przebiegiem. Niech teraz d'_2 będzie największą możliwą wartością szacowanej średniej $\bar{w}'$ w przypadku, gdy w punktach R_1 i R_2 funkcja $\varphi(r)$ przyjmuje możliwie najmniejsze wartości, a w pozostałych — największe. Przebieg taki zachodzi, gdy

$$(6.5) \quad \varphi(r) = \begin{cases} f_1(R_1) & \text{dla } R_1 \leq r \leq K_1, \\ f_1(R_2) & \text{dla } R_2 \leq r \leq K_2, \\ f_2(r) & \text{dla pozostałych wartości } r, \end{cases}$$

jeżeli $K_1 \leq R_2$ (patrz rys. 7a) lub

$$(6.6) \quad \varphi(r) = \begin{cases} f_1(R_1) & \text{dla } R_1 \leq r \leq R_2, \\ f_1(R_2) & \text{dla } R_2 \leq r \leq K_2, \\ f_2(r) & \text{dla pozostałych wartości } r, \end{cases}$$

jeżeli $K_1 > R_2$ (patrz rys. 7b), dla każdej pary wartości m_1, m_2 .

Rys. 7. Przykładowy skrajny przebieg funkcji $\varphi(r)$ w przypadku, gdy w punktach R_1 i R_2 przyjmuje ona możliwie najmniejsze wartości

Wartość d'_2 w tym przypadku będzie

$$(6.7) \quad d'_2 = \begin{cases} 3 \int_0^{R_1} r^2 f_2(r) dr + 3f_1(R_1) \int_{R_1}^{K_1} r^2 dr + 3 \int_{K_1}^{R_2} r^2 f_2(r) dr + \\ \quad + 3f_1(R_2) \int_{R_2}^{K_2} r^2 dr + 3 \int_{K_2}^1 r^2 f_2(r) dr & \text{dla } K_1 \leq R_2, \\ 3 \int_0^{R_1} r^2 f_2(r) dr + 3f_1(R_1) \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr + 3f_1(R_2) \int_{R_2}^{K_2} r^2 dr + \\ \quad + 3 \int_{K_2}^1 r^2 f_2(r) dr & \text{dla } K_1 > R_2. \end{cases}$$

Dla tego przypadku przebiegu funkcji $\varphi(r)$ błąd g'_2 oszacowania średniej będzie, analogicznie jak poprzednio, wynosił

$$(6.8) \quad g'_2 = |d'_2 - \frac{1}{2}[f_1(R_1) + f_1(R_2)]|.$$

Wielkości g'_1 i g'_2 są jednocześnie kresami górnymi błędu oszacowania średniej dla dowolnego przebiegu funkcji $\varphi(r)$. Wynika to z przyjęcia skrajnych, najbardziej „złośliwych” przebiegów funkcji $\varphi(r)$ do określenia tych wielkości.

Ogólnie więc, ograniczenie górne g' błędu oszacowania średniej dla każdego przebiegu funkcji $\varphi(r)$ i dla każdej pary wartości m_1 i m_2 będzie wynosiło

$$(6.9) \quad g' = \sup \{g'_1, g'_2\}.$$

Natomiast błąd δ' oszacowania średniej zdefiniowany jako

$$(6.10) \quad \delta' = |\bar{w}' - \frac{1}{2}[\varphi(R_1) + \varphi(R_2)]|$$

będzie zawsze dla każdej pary m_1 i m_2 i dla każdego przebiegu funkcji $\varphi(r)$ teoretycznie nie większy od wartości g' . Praktycznie zaś, ze względów omówionych na końcu rozdziału 5, będzie mniejszy od g' , a więc $\delta' < g'$.

Jeżeli teraz przyjmujemy znów ograniczenie na wielkość obszaru ograniczającego funkcję $\varphi(r)$, wyrażone zależnością (5.3), to wielkości g'_1 i g'_2 będą wynosiły:

$$(6.11) \quad g'_1 = \begin{cases} \frac{3}{m_1+3} (1 + R_1^A + R_2^A - R_1^{m_1+3} - R_2^{m_1+3}) - \frac{1}{2}(R_1^{m_2} + R_2^{m_2}) + \\ \quad + R_1^{m_2+3} + R_2^{m_2+3} - R_1^A - R_2^A & \text{dla } R_2^{m_2/m_1} > R_1, \\ \frac{3}{m_1+3} (1 + R_1^A - R_2^{m_1+3}) - \frac{1}{2}(R_1^{m_2} + R_2^{m_2}) + R_1^{m_2+3} + R_2^{m_2+3} - \\ \quad - R_1^A - R_1^3 R_2^{m_2} & \text{dla } R_2^{m_2/m_1} \leq R_1 \end{cases}$$

$$(6.12) \quad g'_2 = \begin{cases} R_1^{m_1+3} + R_2^{m_1+3} - R_1^B - R_2^B + \frac{1}{2}(R_1^{m_1} + R_2^{m_1}) - \\ - \frac{3}{m_2+3}(1 + R_1^{m_2+3} + R_2^{m_2+3} - R_1^B - R_2^B) \text{ dla } R_1^{m_1/m_2} < R_2, \\ R_1^{m_1+3} + R_2^{m_1+3} - R_1^{m_1} R_2^3 - R_2^B + \frac{1}{2}(R_1^{m_1} + R_2^{m_1}) - \\ - \frac{3}{m_2+3}(1 + R_1^{m_2+3} - R_2^B) \text{ dla } R_1^{m_1/m_2} \geq R_2, \end{cases}$$

gdzie $A = m_2(m_1+3)/m_1$, $B = m_1(m_2+3)/m_2$.

Znajdźmy teraz taką parę wartości $r = R_1$ i $r = R_2$, a więc takie odległości, aby w przypadku dowolnego przebiegu $\varphi(r)$, błąd oszacowania średniej $\bar{w}'$ za pomocą estymatora w^* , gdzie

$$(6.13) \quad w^* = \frac{1}{2}[\varphi(R_1) + \varphi(R_2)],$$

był możliwie najmniejszy.

Zadanie polega, jak poprzednio, na znalezieniu takiej pary odległości $r = R'_1$ i $r = R'_2$ żeby przy danym k wyrażenie

$$(6.14) \quad G' = \max_{(m_1, m_2)} g'$$

osiągało minimum ze względu na R_1 i R_2 .

Korzystając z wyrażeń (6.11), (6.12) i (5.3) na drodze graficzno-numerycznej dla $k = \frac{1}{6}$ otrzymujemy $R'_1 = 0,620$, $R'_2 = 0,945$ oraz $G' \approx 11,8\%$.

Otrzymana wartość G' jest dość duża. Znowu można przyjąć, że praktycznie błędy oszacowania średniej będą o wiele mniejsze.

Prace cytowane

[1] P. Mikulski, W. Rudzki i K. Wiśniewski, *Badanie właściwości średnich towarów bezkształtnych pakowanych w prostopadłościenną bełę*, Zastosowania Matematyki 4 (1959), str. 332-340.

[2] J. Oderfeld, *Powierzchnie o wilgotności średniej*, Zastosowania Matematyki 4 (1959), str. 341-349.

[3] W. Rudzki i K. Wiśniewski, *Metoda pobierania próbek i szacowania właściwości średnich produktów bezkształtnych pakowanych w prostopadłościenną bełę*, Wiadomości PKN 5 (1959).

[4] W. Rudzki, *Dokładność oceny właściwości średniej produktów bezkształtnych*, Zastosowania Matematyki 6 (1961), str. 7-16.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła 30. 12. 1960

В. РУДЗКИ (Варшава)

ОЦЕНКА СРЕДНИХ СВОЙСТВ БЕСФОРМЕННЫХ ПРОДУКТОВ

РЕЗЮМЕ

В работе исследуются средние свойства бесформенных товаров, упакованных либо в форме произвольного геометрического тела, либо сложенных или пересыпанных в тела, вертикальные сечения которых симметричны. Рассмотрен случай, когда существует функциональная зависимость между значением исследуемого свойства в каждой точке тела и положением этой точки внутри тела.

В первой части работы принято, что зависимость эта выражается формулой (1.2). Найдены две точки внутри тела, обладающие тем свойством, что взятые в них пробы дают наименьшую ошибку оценки среднего свойства.

В дальнейшем налагаются более слабые ограничения на зависимость между исследованным свойством и местом внутри тела. Предполагается только, что существует зависимость выраженная функцией, относительно которой известно лишь, что она не возрастает и заключается между двумя определёнными функциями.

При этом предположении определено место, с которого следует взять пробу, чтобы ошибка оценки была наименьшей даже в случае наиболее неблагоприятной зависимости, указана также верхняя грань ошибки.

При тех же предположениях исследована величина ошибки оценки средней в случае, когда берутся пробы с двух различных мест, и указаны точки, в которых следует брать пробы, чтобы ошибка была наименьшей.

W. RUDZKI (Warszawa)

ESTIMATION OF MEAN PROPERTIES OF SHAPELESS PRODUCTS

SUMMARY

Shapeless goods packed in the shape of an arbitrary geometrical solid, and also folded or heaped into solids with symmetrical vertical sections are tested with respect to mean properties. The author investigates the case where the value of the property in question at every point of the solid is functionally dependent on the situation of that point inside the solid.

In the first part of the paper it is assumed that the relation between the value of the property examined and its position inside the solid is defined by formula (1.2). Two points inside the solid are selected such that the samples taken from those points give the least error of estimation of the mean property.

Subsequently the assumptions concerning the relations between the property examined and its place inside the product are weakened. Namely, it is assumed that there is a relation expressed by a certain function of which it is known only that it is non-increasing and bounded by two definite functions. Under this assumption the author defines the place from which the sample should be taken in order that the estimation error be the least possible even if the shape of the function of the relation is the least advantageous; the upper limit of the error is then defined.

Under the same assumptions, the author investigates the magnitude of the error of estimation of the mean in taking two samples from two definite places and defines those places in such a way as to ensure the least possible error.