J. WOJTOWICZ (Warszawa)

O GĘSTOŚCI RODZINY KRZYWYCH I JEJ ZASTOSOWANIACH

I. Gęstość rodziny krzywych. W nomografii rozpatruje się *gęstość skali* o równaniu $x = f(u)$. Definiuje się ją jako granicę wartości bezwzględnej stosunku przyrostu parametru do przyrostu długości skali, gdy przyrost parametru dąży do zera

$$g = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta u}{[f(u + \Delta u) - f(u)] m_x} \right|,$$

gdzie m_x jest długością jednostki na skali x (jest to tak zwany *moduł skali*).

Jeżeli funkcja $f(u)$ ma w punkcie u pochodną i pochodna ta jest różna od zera, to

$$g = \frac{1}{m_x f'(u)}.$$

Analogicznie można wprowadzić pojęcie gęstości skali krzywoliniowej. Mianowicie *gęstość skali krzywoliniowej* jest równa granicy wartości bezwzględnej stosunku przyrostu parametru do przyrostu łuku krzywej, gdy przyrost parametru dąży do zera.

Jeżeli dana jest skala o równaniach $x = f(u)$, $y = h(u)$ i jeżeli funkcje $f(u)$ i $h(u)$ są ciągłe i różniczkowalne w otoczeniu punktu u i w tym otoczeniu spełniony jest warunek $[f'(u)]^2 + [h'(u)]^2 \neq 0$, oraz jeżeli liczby m_x i m_y są odpowiednio modułami skal x i y , to gęstość wyraża się wzorem

$$g = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta u}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{1}{\left| \frac{\Delta s}{\Delta u} \right|} = \frac{1}{\sqrt{m_x^2 [f'(u)]^2 + m_y^2 [h'(u)]^2}}.$$

Naturalnym uogólnieniem pojęcia gęstości skali jest pojęcie gęstości rodziny krzywych. *Gęstością rodziny krzywych* w punkcie P_0 nazywamy granicę bezwzględnej wartości stosunku przyrostu parametru rodziny Δu do odległości punktu P_0 od krzywej o parametrze $u + \Delta u$, gdy przyrost Δu dąży do zera.

Wyprowadzimy teraz wzór na gęstość rodziny krzywych w punkcie P_0 .

Niech będzie dana rodzina krzywych o równaniu w prostokątnym układzie współrzędnych $x = f(t, u)$, $y = h(t, u)$, gdzie t jest parametrem krzywej, a u parametrem rodziny krzywych. Niech funkcje $f(t, u)$ i $g(t, u)$ będą ciągle i mają ciągle pochodne cząstkowe w otoczeniu punktu (t, u) oraz niech w tym punkcie spełniony będzie warunek $D(f, g)/D(t, u) \neq 0$.

Ponieważ moduły skal x i y nie muszą być równe, wprowadzimy nowy układ współrzędnych

$$\xi = m_x x \quad \text{ i } \quad \eta = m_y y.$$

Układ $\xi\eta$ jest układem ortogonalnym, o jednakowych długościach jednostek na osiach. Wszystkie dalsze obliczenia będą prowadzone w tym układzie.

Oznaczmy przez φ kąt, jaki tworzą ze sobą linie $u = \text{const}$ i $t = \text{const}$. Niech Δs oznacza długość łuku linii $t = \text{const}$, zawartego pomiędzy punktami o wartościach parametru u i $u + \Delta u$. Widać więc, że odległość Δl punktu leżącego na krzywej $u = \text{const}$ od krzywej $u + \Delta u = \text{const}$ wyraża się wzorem

$$(1) \quad \Delta l = \Delta s \sin \varphi + \varepsilon,$$

gdzie funkcja ε spełnia warunek $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\Delta u} = 0$.

Niech U oznacza wektor styczny do linii $u = \text{const}$, a T wektor styczny do linii $t = \text{const}$. Z równań linii $t = \text{const}$ i $u = \text{const}$ wynika

$$U = [m_x f_t(t, u), m_y h_t(t, u)],$$

$$T = [m_x f_u(t, u), m_y h_u(t, u)].$$

Stąd mamy

$$(2) \quad |\sin \varphi| = \frac{m_x m_y |f_t(t, u) h_u(t, u) - f_u(t, u) h_t(t, u)|}{\sqrt{m_x^2 f_t^2(t, u) + m_y^2 h_t^2(t, u)} \sqrt{m_x^2 f_u^2(t, u) + m_y^2 h_u^2(t, u)}}.$$

Z definicji gęstości i z wzoru (1) wynika

$$g(t, u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta s}{\Delta u} \sin \varphi + \frac{\varepsilon}{\Delta u}}.$$

Biorąc pod uwagę wzór (2) i przechodząc do granicy otrzymujemy

$$(3) \quad g(t, u) = \frac{\sqrt{m_x^2 f_t^2(t, u) + m_y^2 h_t^2(t, u)}}{m_x m_y |f_t(t, u) h_u(t, u) - f_u(t, u) h_t(t, u)|}.$$

II. Błąd. Jeżeli dany jest punkt P_0 leżący na krzywej o parametrze u i jeżeli dany jest punkt P nie leżący na tej krzywej i $|P_0P| = \delta$, to różnica parametrów rodziny Δu spełnia nierówność

$$\left| \frac{\Delta u}{\delta} - g \right| < \varepsilon,$$

a zatem

$$g\delta - \varepsilon\delta < |\Delta u| \leq g\delta + \varepsilon\delta.$$

Jeżeli δ jest dostatecznie małe, możemy za miarę błędu przyjąć oszacowanie

$$(8) \quad |\Delta u| \leq g\delta.$$

W ten sposób możemy obliczyć błąd parametru rodziny mając obliczony błąd geometryczny.

III. Klasyfikacja rodzin krzywych. Jeżeli gęstość w każdym punkcie zależy jedynie od parametru rodziny u , a nie zależy od wyboru punktu na krzywej, to rodzina jest rodziną krzywych *równoległych*, odległość między dwiema sąsiednimi krzywymi zależy bowiem jedynie od różnicy ich parametrów.

Jeżeli $g \equiv ku$, gdzie k jest stałą, to rodzinę krzywych nazywamy *logarytmiczną*, bo z wyrażenia (8) wynika wtedy, że błąd względny

$$\left| \frac{\Delta u}{u} \right| = \text{const.}$$

Jeżeli wreszcie $g \equiv \text{const}$, to rodzina krzywych jest rodziną *regularną*.

Praca wpłynęła 12. 4. 1961

Л. ВОЙТОВИЧ (Варшава)

О ПЛОТНОСТИ СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯХ

РЕЗЮМЕ

В работе сформулировано понятие плотности семейства кривых в точке P , определенной как предел отношения приращения параметра семейства к расстоянию точки P от соседней кривой, при приращении параметра семейства, стремящемся к нулю. В дальнейшем это понятие применено при исчислении погрешности параметра в сетчатой номограмме в случае, когда дана геометрическая погрешность, а затем при формулировании понятия логарифмического и равномерного семейств кривых.

J. WOJTOWICZ (Warszawa)

ON THE DENSITY OF FAMILIES OF CURVES AND ITS APPLICATIONS

SUMMARY

The notion of density of a family of curves at the point P is here defined as the limit of the relation of the increment of the parameter of the family to the distance between P and the neighbour curve when the increment of the parameter tends to zero. Then this notion is applied to compute the error in the parameter in the set nomogram when the geometric error is given, and to define the logarithmic and uniform family of curves.