Reguläre und stabile Randpunkte für das Problem der Wärmeleitungsgleichung

von I. BABUŠKA und R. VÝBORNÝ (Praha)

Einleitung. Im Jahre 1938 hat Tichonov in seiner Arbeit [1] unter anderem bewiesen, daß die Dirichletsche Aufgabe für das Gebiet G und die Gleichung

$$(1) \quad \Delta u = 0$$

dann und nur dann für jede auf dem Rand der Menge G stetige Funktion f lösbar ist, wenn für die Gleichung

$$(2) \quad \Delta w = \partial w / \partial t$$

die erste Randwertaufgabe auf einem Zylinder $G \times (0, T)$ ⁽¹⁾ für stetige Anfangs- und Randbedingungen lösbar ist ⁽²⁾. Fulks hat in seinen Arbeiten [2], [3] neue Beweise dieses Satzes erbracht. In unserem Artikel beweisen wir einen allgemeineren Satz und zwar, daß ein Punkt dann und nur dann für die Laplacesche Gleichung regulär ist, wenn er auch für die Gleichung (2) regulär ist. Wir führen weiter für die Gleichung (2) den Begriff der stabilen Punkte ein und beweisen, daß ein Punkt dann und nur dann für die Gleichung (2) stabil ist, wenn er für die Gleichung (1) stabil ist.

1. Bezeichnungen, Definitionen und Sätze. Ein beschränktes Gebiet des n -dimensionalen ($n > 1$) ⁽³⁾ Euklidischen Raumes bezeichnen wir mit dem Buchstaben G , seine Begrenzung mit $\dot{G}$. $\bar{G}$ sei die abgeschlossene Hülle der Menge G , Q sei der Zylinder $G \times (0, T)$, Z seine untere Grundfläche und S sein Mantel, d.h. ⁽⁴⁾ $Z = E[(x, 0); x \in \bar{G}]$, $S = E[(x, t); x \in \dot{G}, 0 < t \leq T]$.

⁽¹⁾ T ist eine beliebige positive Zahl.

⁽²⁾ Gemeint ist hier die klassische Lösung, d.h. eine stetig auf den Rand des Definitionsgebietes fortsetzbare Lösung.

⁽³⁾ Der Fall $n = 1$ ist trivial.

⁽⁴⁾ Wir benützen die übliche Bezeichnung $x = (x_1, \dots, x_n)$, $(x, t) = (x_1, \dots, x_n, t)$,

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

DEFINITION 1. Wir nennen die Funktion u die Lösung der Dirichlet'schen Aufgabe für die Gleichung (1), das Gebiet G und die auf $\bar{G}$ stetige Funktion f , wenn

1. für $x \in G$ die Gleichung (1) gilt,
2. u stetig auf $\bar{G}$ ist und für $y \in \bar{G}$ $u(y) = f(y)$ gilt.

DEFINITION 1'. Die Funktion w nennen wir die Lösung der Dirichlet'schen Aufgabe für die Gleichung (2), den Zylinder Q und die auf $Z \cup S$ stetige Funktion φ , wenn

1. für $(x, t) \in Q$ die Gleichung (2) gilt, ⁽⁵⁾
2. die Funktion w stetig auf $Q \cup S \cup Z$ ist und $w(y, t) = \varphi(y, t)$ für $(y, t) \in Z \cup S$ gilt.

DEFINITION 2. Das Gebiet G nennen wir regulär für die Gleichung (1), wenn zu jeder auf $\bar{G}$ stetigen Funktion f eine Lösung der Dirichlet'schen Aufgabe existiert.

DEFINITION 2'. Das Gebiet G nennen wir regulär für die Gleichung (2), wenn zu jeder auf $Z \cup S$ stetigen Funktion φ eine Lösung der Dirichlet'schen Aufgabe für die Gleichung (2) und den Zylinder Q existiert.

Anmerkung. Man sieht leicht ein, daß der Begriff der Regularität des Gebietes G für die Gleichung (2) unabhängig von der Zahl T ist. Bekanntlich ist jedes Gebiet mit genügend glattem Rand regulär für die Gleichung (1) und auch für die Gleichung (2).

Für jedes beschränkte Gebiet G existiert immer eine Folge von Gebieten $\{g_k\}$ so, daß

1. $g_k \subset g_{k+1}$,
2. $\bigcup g_k = G$ ist und
3. alle g_k für die Gleichung (1) regulär sind.

Es sei f eine stetige Funktion auf $\bar{G}$ und f^* irgend eine stetige Erweiterung von f auf $\bar{G}$. Es sei u_k die Lösung der Dirichlet'schen Aufgabe für die Gleichung (1), das Gebiet g_k und die Funktion f^* ⁽⁶⁾. Dann gilt folgender Satz von Wiener [4].

SATZ 1. Die Folge u_k konvergiert lokal gleichmäßig auf G gegen eine harmonische Funktion $u(f, x)$. Die Funktion u hängt weder von der Wahl der Folge $\{g_k\}$ noch davon ab, wie die Funktion f auf das ganze Gebiet $\bar{G}$ erweitert wurde. Wenn für die Funktion f und das Gebiet G die Dirichlet'sche Aufgabe lösbar ist, so ist $u(f, x)$ ihre Lösung.

DEFINITION 3. Die Funktion u nennen wir die Wiener'sche verallgemeinerte Lösung der Dirichlet'schen Aufgabe für die Gleichung (1), das Gebiet G und die Funktion f .

⁽⁵⁾ Für $t = T$ bedeutet $\partial w / \partial t$ die Ableitung nach links.

⁽⁶⁾ Gemeint ist die partielle Funktion f^* auf g_k .

Es ist ebenfalls leicht einzusehen und zu beweisen, daß eine Folge von Gebieten $\{g_k\}$ existiert, welche die Bedingungen 1. und 2. erfüllt, wobei

3'. alle g_k für die Gleichung (2) regulär sind.

Es sei φ eine stetige Funktion auf $Z \cup S$ und φ^* ihre Erweiterung auf $Q \cup Z \cup S$. Es sei w_k die Lösung der Dirichletschen Aufgabe für die Gleichung (2), den Zylinder $q_k = g_k \times (0, T)$ und die Funktion φ^* (7). Dann gilt wieder

SATZ 1'. Die Folge w_k konvergiert auf Q lokal gleichmäßig⁽⁸⁾ gegen eine Funktion $w(\varphi, x, t)$, welche auf Q die Lösung der Gleichung (2) ist. Die Funktion hängt weder von der Wahl der Folge $\{g_k\}$ noch davon ab, wie die Funktion φ auf $Q \cup Z \cup S$ erweitert wurde. Die Funktion w ist stetig auf Z fortsetzbar und für $x \in \bar{G}$ gilt

$$w(\varphi, x, 0) = \varphi(x, 0).$$

Wenn für den Zylinder Q und die Funktion φ die Dirichletsche Aufgabe lösbar ist, so ist $w(\varphi, x, t)$ ihre Lösung.

Beweis.⁽⁹⁾ Es sei φ^* ein Polynom, für welches $\Delta^*\varphi - \partial\varphi^*/\partial t \geq 0$ gilt. Aus dem Maximumprinzip folgt, daß die Folge $w_k(x, t)$ für jedes (x, t) nicht abnehmend und beschränkt ist. Also ist $w_k(x, t)$ konvergent. Aus den Ergebnissen von Bernstein (siehe [8]) folgt, daß die Folge gleichmäßig beschränkter Funktionen w_k eine Teilfolge enthält, welche auf Q lokal gleichmäßig gegen eine Lösung der Gleichung (2) konvergiert. Da die Folge w_k nicht abnehmend ist und da sie eine Teilfolge enthält, die lokal gleichmäßig konvergiert, so ist sie selber lokal gleichmäßig konvergent. Es sei $\varepsilon > 0$. Ist nun $\varphi^*(x, t)$ eine beliebige stetige Funktion auf Q , so existieren Polynome φ_1 und φ_2 derart, daß

$$\Delta\varphi_i - \partial\varphi_i/\partial t \geq 0 \quad (i = 1, 2)$$

und

$$(3) \quad |\varphi^*(x, t) - (\varphi_1(x, t) - \varphi_2(x, t))| < \varepsilon/3$$

für $(x, t) \in \bar{G}$ gilt. Es seien w_{k1} bzw. w_{k2} Lösungen der Dirichletschen Aufgabe für die Funktion φ_1 bzw. φ_2 und die Menge q_k . Nach dem bisher Bewiesenen sind die Folgen w_{k1} und w_{k2} lokal gleichmäßig konvergent auf Q . Es sei F abgeschlossen, $F \subset G$ und $\delta > 0$. Wir setzen $Q_0 = F \times \langle \delta, T \rangle$.

(7) Hier gilt eine zur Fußnote 6. analoge Bemerkung.

(8) Eine Folge ist lokal gleichmäßig konvergent auf Q falls sie auf jeder Menge von der Form $F \times \langle \delta, T \rangle$ gleichmäßig konvergiert, wobei δ eine positive Zahl und $F \subset G$ eine abgeschlossene Menge ist.

(9) Einen ähnlichen Satz für $n = 1$ hat B. Pini [5] für einen beweglichen Rand bewiesen.

Da die Folgen w_{ki} ($i = 1, 2$) gleichmäßig auf $\bar{Q}_0$ konvergieren, so existiert ein k_0 derart, daß für $k > k_0$, $l > k_0$ und $(x, t) \in \bar{Q}_0$

$$(4) \quad |w_{ki}(x, t) - w_k(x, t)| < \varepsilon/6 \quad (i = 1, 2)$$

gilt.

Aus (3) und (4) folgt, daß auf dem parabolischen Rand Q_0 ⁽¹⁰⁾

$$|w_k(x, t) - w_l(x, t)| < \varepsilon$$

gilt. Die Folge w_k konvergiert also auf $\bar{Q}_0$ gleichmäßig. Aus den Ergebnissen von Bernstein [8] folgt, daß die Grenzwertfunktion eine Lösung der Gleichung (2) ist. Es sei nun $(x_0, t_0) \in Q$. Wenn φ^* und φ^{**} zwei stetige Fortsetzungen sind und w_k^* und w_k^{**} die entsprechenden Lösungen der Dirichletschen Aufgabe für den Zylinder q_k sind, so gilt für genügend große k

$$|w_k^*(x_0, t_0) - w_k^{**}(x_0, t_0)| < \varepsilon.$$

Für genügend große k gilt nämlich auf dem parabolischen Rand q_k

$$|\varphi^*(x, t) - \varphi^{**}(x, t)| < \varepsilon.$$

Die Grenzwertfunktion w hängt also nicht davon ab, wie die Funktion φ fortgesetzt wurde. Die Funktion w hängt auch nicht von der Wahl der Folge $\{g_k\}$ ab, denn falls sie davon abhinge, so wäre es möglich, eine Folge g_k so zu konstruieren, daß die entsprechende Folge w_k wenigstens in einem Punkt der Menge Q divergent wäre, dies ist aber nicht möglich. Ist die Dirichletsche Aufgabe lösbar und z ihre Lösung so kann man $\varphi^* = z$ setzen und w ist offenbar die Lösung der Dirichletschen Aufgabe für das Gebiet Q .

DEFINITION 3'. Die Funktion w nennen wir die (verallgemeinerte) Wiener'sche Lösung der Dirichletschen Aufgabe für die Gleichung (2) den Zylinder Q und die Funktion φ .

DEFINITION 4. Den Punkt $y \in \dot{G}$ nennen wir regulär für die Gleichung (1) (die Gleichung (2)), wenn für jede auf $\dot{G}$ (auf $Z \cup S$) stetige Funktion f (stetige Funktion φ)

$$\lim_{x \rightarrow y} u(f, x) = f(y) \quad \left(\lim_{(x,t) \rightarrow (y,t_0)} w(\varphi, x, t) = \varphi(y, t_0) \text{ für alle } 0 < t_0 \leq T \right)$$

gilt.

DEFINITION 5. Die Funktion b nennen wir eine Barriere für den Punkt $y \in \dot{G}$ und die Gleichung (1), wenn sie stetige Ableitungen 2-ter Ordnung auf G hat und wenn

- a. $b(x) > 0$ für $x \in G$,
- b. $\lim_{x \rightarrow y} b(x) = 0$,
- c. $\Delta b(x) \leq 0$ für $x \in G$

gilt.

⁽¹⁰⁾ Der parabolische Rand des Zylinders ist seine untere Grundfläche und sein Mantel.

Folgender Satz ist auch gut bekannt (siehe [6]):

SATZ 2. *Der Punkt $y \in \dot{G}$ ist dann und nur dann für die Gleichung (1) regulär, wenn eine Barriere für den Punkt y und die Gleichung (1) existiert.*

DEFINITION 5'. Wir nennen die Funktion $v(x, t)$ eine Barriere für den Punkt $y \in \dot{G}$ und die Gleichung (2), wenn ein $\delta > 0$ derart existiert, daß $v(x, t)$ stetige erste Ableitungen und stetige Ableitungen zweiter Ordnung nach den Veränderlichen x_i ($i = 1, \dots, n$) in $Q_\delta = G \times (-\delta, \delta)$ hat und wenn

- a. $v(x, t) > 0$ für $(x, t) \in Q_\delta$,
- b. $\lim_{(x,t) \rightarrow (y,0)} v(x, t) = 0$,
- c. $\Delta v(x, t) \leq \partial v(x, t)/\partial t$ für $(x, t) \in Q_\delta$

gilt.

Wir führen nun eine parabolische Analogie des Satzes 2 an.

SATZ 2'. *Der Punkt $y \in \dot{G}$ ist für die Gleichung (2) dann und nur dann regulär, wenn eine Barriere $v(x, t)$ für den Punkt y existiert⁽¹¹⁾.*

Satz 2' ergibt sich sofort aus folgendem Satz.

SATZ 2''. *Für eine beliebige auf $Z \cup S$ stetige Funktion φ gilt*

$$(5) \quad \lim_{(x,t) \rightarrow (y,t_0)} w(\varphi, x, t) = \varphi(y, t_0)$$

dann und nur dann, wenn eine Barriere $v(x, t)$ für den Punkt $y \in \dot{G}$ existiert.

Beweis. I. Es gelte (5) für eine beliebige stetige Funktion φ . Dann ist die verallgemeinerte Lösung für die Funktion $\varphi(x, t) = |x - y| + |t|$ und den Zylinder Q_δ eine Barriere.

II. Es existiere für den Punkt $y \in \dot{G}$ eine Barriere $v(x, t)$. Es sei $|\varphi(x, t)| < M$ und w_k eine Folge von Funktionen wie im Satz 1'. Wir wählen $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir konstruieren einen Zylinder $V = K \times (t_0 - d, t_0 + d)$, wobei $K = E[x; |x - y| < d]$ ist und zwar derart, daß für $(x, t) \in \bar{V} \cap \bar{Q}$

$$(6) \quad \varphi(x, t) > \varphi(y, t_0) - \varepsilon/4$$

gilt. Zu der Zahl d existiert ein natürliches N_1 derart, daß

1. das $(n-1)$ -dimensionale Maß der Menge⁽¹²⁾ $P = E[x; |x - y| = d, x \in G - \bar{g}_{N_1}]$ kleiner als $\frac{\pi^{n/2} d^{n-1} \varepsilon}{4\Gamma(n/2) M}$ ist;

⁽¹¹⁾ B. Pini hat in [1] die Existenz einer positiven Barriere auf $\bar{Q}$ mit Ausnahme des Punktes y als hinreichende Bedingung für die stetige Fortsetzbarkeit der Wiener'schen Lösung bewiesen. In unserem Fall studieren wir das Problem jedoch auf einem Zylinder (in der Zeit t). Für $n = 1$ ist die Irregulärität des Punktes durch die Bewegung des Randes in der Zeit hervorgerufen, während für $n \geq 2$ die Irregulärität eine Folge der Form der Grundfläche ist. Trotzdem läßt sich der Beweis von Pini auch auf unseren Fall anwenden, falls die Barriere mit Ausnahme des Punktes y auf Q positiv ist.

⁽¹²⁾ Es handelt sich um das Maß eines Oberflächenteils einer n -dimensionalen Kugel.

2. das n -dimensionale Maß der Menge $G - \bar{g}_{N_1}$ kleiner als $\frac{2^{n-3}(\pi d)^{n/2}}{M} \varepsilon$ ist.

Wir definieren nun zwei Funktionen h_1 und h_2 . Für $|x-y| < d$ sei

$$h_1(x) = \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}d} \int \dots \int \frac{d^2 - |x-y|^2}{|x-z|^n} a(z) d\sigma_z,$$

wo $a(z)$ die charakteristische Funktion der Menge P ist und das $(n-1)$ -fache Integral das Flächenintegral über die Kugeloberfläche bedeutet. Wir ergänzen die Definition der Funktion $h_1(x)$ für $|x-y| = d$ derart, daß sie unterhalbstetig ist. Die Funktion h_1 ist durch das bekannte Poissonsche Integral definiert. Sie ist daher für $|x-y| < d$ harmonisch, für $x \in G - \bar{g}_{N_1}$, $|x-y| = d$ hat man $h_1(x) = 1$, für alle anderen x mit $|x-y| = d$ gilt aber $h_1(x) = 0$. Es sei

$$h_2(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi(t-t_0+d)})^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x-z|^2}{4(t-t_0+d)}} \beta(z) dz,$$

wo $\beta(z)$ die charakteristische Funktion der Menge $G - \bar{g}_{N_1}$ ist. Wir ergänzen die Definition der Funktion h_2 für $t = t_0 - d$ so, daß sie unterhalbstetig ist. Die Funktion $h_2(x, t)$ erfüllt die Gleichung (2), $h_2(x, t_0 - d) = 1$ für $x \in G - \bar{g}_{N_1}$ und $h_2(x, t_0 - d) = 0$ für alle übrigen x . Wir wählen die Zahl k ($k < 0$) so, daß auf der Menge $\bar{q}_{N_1} \cap \bar{V}$

$$w(\varphi, x, t) - \varepsilon > kv(x, t - t_0) + \varphi(y, t_0)$$

gilt. Offenbar existiert ein $N \geq N_1$ so, daß man

$$(7) \quad w_i(x, t) > kv(x, t - t_0) + \varphi(y, t_0)$$

auf $\bar{q}_{N_1} \cap \bar{V}$ für $i > N$ hat. Wir beweisen nun die Gültigkeit der Ungleichung

$$(8) \quad w_i(x, t) > \varphi(y, t_0) - \varepsilon/4 + kv(x, t - t_0) - 2Mh_1(x) - 2Mh_2(x, t)$$

auf dem parabolischen Rand der Menge $D_i = V \cap Q_i$ für $i > N$. Es ist offensichtlich, daß immer

$$(9) \quad h_1(x) \geq 0, \quad h_2(x, t) \geq 0, \quad v(x, t - t_0) \geq 0$$

gilt. Wir untersuchen zuerst die Grundfläche der Menge D_i d.h. die Punkte $(x, t_0 - d)$, $x \in \bar{g}_i \cap \bar{K}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. $x \in \bar{g}_{N_1}$,

2. $x \text{ non } \in \bar{g}_{N_1}$.

Für Fall 1. folgt (8) aus (7) und (9), für Fall 2. ist $h_2(x, t) = 1$, $\varphi(y, t_0) < M$, also gilt

$$(10) \quad \varphi(y, t_0) - \varepsilon/4 + kv(x, t - t_0) - 2Mh_1(x) - 2M < -M.$$

Aus (10) folgt (8), denn es gilt für $(x, t) \in g_i$

$$(11) \quad w_i(x, t) > -M.$$

Es sei nun (x, t) ein Punkt auf dem übriggebliebenen Teile des parabolischen Randes der Menge D_i . Wir unterscheiden drei Fälle:

1. $x \in g_i$,
2. $x \in \bar{g}_{N_1} \cap \dot{K}$,
3. $x \in (g_i - \bar{g}_{N_1}) \cap \dot{K}$.

Im Fall 1. folgt (8) aus (6) und (9), im Fall 2. folgt (8) wieder aus (9) und (7), im Fall 3. verläuft der Beweis nun folgendermaßen: $h_1(x) = 1$, $\varphi(y, t_0) < M$ also (ähnlich wie in (10)) gilt

$$(12) \quad \varphi(y, t_0) - \varepsilon/4 + kv(x, t - t_0) - 2M - 2Mh_2(x, t) < -M.$$

Aus (11) und (12) folgt (8). Aus dem Maximumprinzip folgt, daß die Ungleichung (8) auch auf D_i gilt. Durch Grenzübergang erhalten wir für $(x, t) \in V \cap Q$

$$(13) \quad w(\varphi, x, t) \geq \varphi(y, t_0) - \varepsilon/4 + kv(x, t - t_0) - 2Mh_1(x) - 2Mh_2(x, t).$$

Nach dem Mittelwertsatz ist

$$(14) \quad h_1(y) < \varepsilon/8M.$$

Weiter ist

$$(15) \quad h_2(y, t_0) < \varepsilon/8M.$$

Wenn wir nun auf beiden Seiten der Ungleichung (13) Limes inferior nehmen und (14) und (15) und die Beziehung b. aus der Definition der Barriere benützen, so erhalten wir

$$\liminf_{(x,t) \rightarrow (y,t_0)} w(\varphi, x, t) > \varphi(y, t_0) - \varepsilon.$$

Analog kann man beweisen

$$\limsup_{(x,t) \rightarrow (y,t_0)} w(\varphi, x, t) < \varphi(y, t_0) + \varepsilon.$$

Hiermit ist der Satz bewiesen.

2. Regularität der Randpunkte. SATZ 3. *Es sei $y \in \dot{G}$ regulär für die Gleichung (1). Dann ist y auch für die Gleichung (2) regulär.*

Beweis. Es existiert eine Barriere für den Punkt y und die Gleichung (1). Diese ist auch die Barriere für y und die Gleichung (2).

SATZ 4. *Es sei $y \in \dot{G}$ regulär für die Gleichung (2). Dann ist der Punkt y auch für die Gleichung (1) regulär.*

Beweis. Nach Satz 2 genügt es offenbar eine Barriere zu konstruieren. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $T = 2$ annehmen. Wir definieren die Funktion

$$\varphi(x, t) = \begin{cases} t|x-y| + (1-t)p & \text{für } 0 \leq t \leq 1, \\ |x-y| & \text{für } t > 1, \end{cases}$$

wo p der Durchmesser des Gebietes G ist. Von der Funktion $w(\varphi, x, t_0)$ ⁽¹³⁾ beweisen wir, daß sie die Barriere für die Laplacesche Gleichung und den Punkt y ist. Da der Punkt y regulär für die Gleichung (2) ist, so hat man

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (y,t_0)} w(\varphi, x, t) = 0.$$

Weiter gilt offensichtlich

$$w(\varphi, x, t_0) \geq 0$$

für $x \in G$. Wenn für irgendein $z \in G$

$$w(\varphi, z, t_0) = 0$$

wäre, wäre die Funktion w nach dem Satz von Nirenberg [7] für $t < t_0$ konstant, d.h. $w(\varphi, x, 0) = 0$. Dies ist jedoch ein Widerspruch, denn $w(\varphi, x, 0) = p > 0$. Es ist also

$$w(\varphi, x, t_0) > 0 \quad \text{für } x \in G.$$

Es gilt

$$w(\varphi, x, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} w_k(x, t),$$

wo w_k Funktionen sind, die im Satz 1' auftreten. Wir beweisen, daß es schwach wachsende Funktionen der Veränderlichen t sind. Es sei $0 < l < 2$; wir setzen

$$h_k(x, t) = w_k(x, t+l) - w_k(x, t).$$

Es gilt

$$h_k(x, 0) = w_k(x, l) - w_k(x, 0) \leq 0$$

für $x \in g_k$ und

$$h_k(x, t) \leq 0$$

für $x \in g_k$ und $0 < t < 2-l$. Nach dem Maximumprinzip ist

$$w_k(x, t+l) \leq w_k(x, t)$$

für $x \in g_k$. Es ist also auch

$$w(\varphi, x, t+l) \leq w(\varphi, x, t)$$

⁽¹³⁾ $t_0 > 1$ beliebig.

für $x \in G$ und $0 < t < 2-l$. Daraus folgt $\partial w / \partial t \leq 0$ für $x \in G$. Die Funktion w hat die in der Definition der Barriere vorkommende Eigenschaft c., denn es ist

$$\Delta w = \frac{\partial w}{\partial t} \leq 0.$$

Die Funktion w erfüllt somit alle geforderten Bedingungen.

Die Menge der irregulären Punkte für die Gleichung (1) ist bekanntlich eine abzählbare Vereinigung angeschlossener Mengen von der Kapazität Null⁽¹⁴⁾. Deshalb folgt aus Satz 4, daß auch die Menge der irregulären Punkte für die Gleichung (2) eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen von der Kapazität Null ist. Demzufolge beweist man die Gültigkeit des verallgemeinerten Maximumprinzips für die Gleichung (2) genau so, wie für die Gleichung (1).

DAS VERALLGEMEINERTE MAXIMUMPRINZIP. Es seien w_1 und w_2 zwei beschränkte Lösungen der Gleichung (2) derart, daß

$$w_1(x, 0) \leq w_2(x, 0) \quad \text{für} \quad x \in G$$

und

$$w_1(y, t) \leq w_2(y, t)$$

für $0 < t \leq T$ und die regulären Punkte $y \in \dot{G}$ gilt. Dann ist

$$w_1(x, t) \leq w_2(x, t) \quad \text{für} \quad (x, t) \in Q.$$

3. Stabilität der Randpunkte. Von nun an wollen wir uns auf Gebiete beschränken, die keine inneren Randpunkte haben⁽¹⁵⁾. Für jedes Gebiet G existiert eine Folge von regulären Gebieten $\{G_k\}$ derart, daß

$$(16) \quad \bar{G}_{k+1} \subset G_k$$

und

$$(17) \quad \bar{G} = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$$

gilt. Bekanntlich gilt folgender Satz (siehe [6]):

SATZ 5. Wenn f eine stetige Funktion auf dem Rand der Menge G und f^* ihre stetige Fortsetzung auf den ganzen Raum ist und wenn U_k die Lösung der Dirichletschen Aufgabe für das Gebiet G_k und die Funktion f^* ist, dann konvergiert die Folge U_k auf $\bar{G}$ und sie konvergiert auf G lokal gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion $U(f, x)$. Die Funktion U hängt nicht von der Wahl der Folge $\{G_k\}$ ab und auch nicht davon, wie die Funktion f auf den ganzen Raum fortgesetzt wurde.

⁽¹⁴⁾ $n \geq 3$. Dies setzen wir nun immer voraus.

⁽¹⁵⁾ Der Punkt $y \in \dot{G}$ ist ein innerer Randpunkt, wenn $y \notin \overline{E_n - \bar{G}}$ ist.

DEFINITION 6. Die Funktion $U(f, x)$ nennen wir die verallgemeinerte äußere Lösung der Dirichletschen Aufgabe für die Funktion f , das Gebiet G und die Gleichung (1).

DEFINITION 7. Das Gebiet G nennen wir stabil, wenn

$$U(f, x) = u(f, x)$$

für jede stetige Funktion f und für jedes $x \in G$ gilt.

DEFINITION 8. Den Punkt $y \in \bar{G}$ nennen wir stabil für die Gleichung (1), wenn für jede stetige Funktion f

$$U(f, y) = f(y)$$

gilt.

Die Einführung dieser zwei Definitionen erlaubt uns folgende Sätze auszusprechen (siehe [6]):

SATZ 6. Es sei $\{B_k\}$ eine nach G konvergente Folge regulärer Gebiete ⁽¹⁶⁾. Es sei r_n die Lösung der Dirichletschen Aufgabe für das Gebiet B_n und die Funktion f^* . Wenn das Gebiet G stabil ist, konvergiert die Folge $r_n(x)$ lokal gleichmäßig auf G gegen die Funktion $u(f, x)$.

SATZ 7. Ein stabiler Punkt ist regulär und die Funktion $U(f, x)$ ist in diesem Punkte stetig.

SATZ 8. Das Gebiet G ist dann und nur dann stabil, wenn die Menge der nichtstabilen Randpunkte vom harmonischen Maße Null ist.

Ähnlich wie Satz 1 läßt sich auch Satz 5' beweisen.

SATZ 5'. Es sei φ eine stetige Funktion auf dem Rand der Menge $Q = G \times (0, T)$ und φ^* ihre stetige Fortsetzung auf den ganzen Raum. Es sei W_k die Lösung der Dirichletschen Aufgabe für die Funktion φ^* und den Zylinder $Q_k = G_k \times (0, T)$ ⁽¹⁷⁾. Die Folge W_k ist auf $\bar{Q}$ konvergent und auf Q lokal gleichmäßig konvergent nach der Lösung $W(\varphi, x, t)$ der Gleichung (2). Die Funktion W hängt nicht von der Wahl der Folge $\{Q_k\}$ ab und auch nicht davon, wie die Funktion φ auf den ganzen Raum erweitert wurde. Die Funktion W ist stetig für $t = 0$, $x \in G$ und es gilt $W(\varphi, x, 0) = \varphi(x, 0)$.

DEFINITION 6'. Die Funktion $W(\varphi, x, t)$ nennen wir die äußere verallgemeinerte Lösung der Dirichletschen Aufgabe für die Funktion φ , den Zylinder Q und die Gleichung (2).

DEFINITION 7'. Das Gebiet G nennen wir stabil, wenn

$$W(\varphi, x, t) = w(\varphi, x, t)$$

für jede stetige Funktion φ und $(x, t) \in Q$ ist.

⁽¹⁶⁾ Die Konvergenz verstehen wir folgendermaßen: jeder Punkt aus G liegt von einem bestimmten n an in allen B_n und jeder Punkt, der nicht auf $\bar{G}$ liegt, liegt von einem bestimmten n an außerhalb aller B_n .

⁽¹⁷⁾ Für die Gebiete G_k gilt (16) und (17).

DEFINITION 8'. Den Punkt $y \in \dot{G}$ nennen wir stabil für die Gleichung (2), wenn für jede stetige Funktion φ

$$W(\varphi, y, t) = \varphi(y, t)$$

für $0 \leq t \leq T$ gilt.

SATZ 6'. Es sei $\{B_n\}$ eine Folge von Gebieten wie im Satz 6 und $\Omega_n = B_n \times (0, T)$. Es sei $s_n(x, t)$ die Lösung der Dirichletschen Aufgabe für den Zylinder Ω_n und die Funktion φ^* . Wenn das Gebiet G stabil ist, so konvergiert die Folge $s_n(x, t)$ lokal gleichmäßig auf Q gegen die Funktion $w(\varphi, x, t)$.

Beweis. Es sei φ^* ein Polynom, für welches

$$(18) \quad \Delta \varphi^* - \partial \varphi^* / \partial t \geq 0$$

gilt. Es sei

$$g_1 \subset g_2 \subset g_3 \subset \dots, \quad \bar{g}_i \subset g_{i+1}$$

eine Folge von Gebieten, die nach G von innen hin konvergiert und

$$G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \dots, \quad G_i \supset \bar{G}_{i+1}$$

eine Folge von Gebieten, die nach G von außen her konvergiert. Es seien w_k und W_i die Lösungen der entsprechenden Dirichletschen Aufgaben für die Gleichung (2). Für jedes k existiert ein m_0 derart, daß für $m > m_0$

$$g_k \subset B_m \subset G_k$$

ist. Nach dem Maximumprinzip hat man

$$w_k(x, t) \leq s_m(x, t) \leq W_k(x, t)$$

für $(x, t) \in g_k \times (0, T)$. Aus dieser Ungleichung folgt die Behauptung unseres Satzes, wenn φ^* ein Polynom ist, für welches (18) gilt. Diese Einschränkung können wir ähnlich wie in Satz 1' beseitigen.

SATZ 7'. Ist $y \in \dot{G}$ stabil, so ist es auch regulär. Weiter ist die Funktion $W(\varphi, x, t)$ im Punkte (y, t) $0 \leq t \leq T$ stetig und es gilt

$$W(\varphi, y, t) = \varphi(y, t).$$

Beweis. Offenbar können wir voraussetzen, daß φ^* ein Polynom ist, für welches (18) gilt. Aus dem Maximumprinzip folgt

$$(19) \quad \varphi^*(x, t) \leq w(\varphi, x, t) \leq W(\varphi, x, t).$$

Da y stabil ist, existiert ein k_0 so, daß

$$\varphi(y, t_0) \leq W_{k_0}(\varphi, y, t_0) < \varphi(y, t_0) + \varepsilon$$

gilt. Aus der Stetigkeit der Funktion W_{k_0} folgt, daß

$$(20) \quad W_{k_0}(\varphi, x, t) < \varphi(y, t_0) + \varepsilon$$

in einer bestimmten Umgebung des Punktes (y, t_0) gilt. Da W_k eine nichtansteigende Folge ist, gilt ähnliche Ungleichung wie (20) für $k > k_0$. Also ist

$$W(\varphi, x, t) < \varphi(y, t_0) + \varepsilon$$

in dieser Umgebung. Daraus folgt jedoch

$$\limsup_{(x,t) \rightarrow (y,t_0)} W(\varphi, x, t) \leq \varphi(y, t_0).$$

Daher ist die Funktion W im Punkte (y, t_0) stetig und $W(\varphi, y, t_0) = \varphi(y, t_0)$. Die Regularität des Punktes y folgt nun einfach aus (19).

SATZ 8'. *Hat die Menge der nichtstabilen Punkte (für die Gleichung (2)) das harmonische Maß Null⁽¹⁸⁾, so ist G (für die Gleichung (2)) stabil.*

Beweis. Mit $l(O, x)$ bezeichnen wir das harmonische Maß der Menge $O \subset \dot{G}$. Es sei $x_0 \in G$. Es existiert eine offene Menge O derart, daß $\dot{G} - O$ nur stabile Punkte enthält und

$$h(O \cap \dot{G}, x_0) < \varepsilon.$$

Es sei $|\varphi(x, t)| < M$. Dann folgt aus dem Maximumprinzip

$$|W(\varphi, x, t) - w(\varphi, x, t)| < 2Mh(O \cap \dot{G}, x)$$

für $(x, t) \in Q$. Es ist also

$$|W(\varphi, x_0, t) - w(\varphi, x_0, t)| < 2M\varepsilon.$$

SATZ 9. *Ist der Punkt $y \in \dot{G}$ für die Gleichung (2) stabil, so ist er auch für die Gleichung (1) stabil.*

Beweis. Es sei $1 > \varepsilon > 0$. Es sei f eine auf $\dot{G}$ stetige Funktion und f^* ihre stetige Fortsetzung auf den ganzen Raum, $|f^*(x)| < M$. Es existiert δ so, daß für $|x - y| < \delta$

$$|f^*(x) - f^*(y)| < \varepsilon$$

ist. Wir setzen $\gamma(x) = \max(f^*(x), f^*(y) + \varepsilon)$, $\varphi^*(x, t) = (M + 1)(1 - t) + t\gamma(x)$ für $0 \leq t \leq 1$ und $\varphi^*(x, t) = \gamma(x)$ für $t \geq 1$. Wir konstruieren nun eine Folge von Funktionen $W_k(x, t)$, die im Satz 5' auftreten. Man beweist leicht (ähnlich wie im Satz 4 für die Funktionen w_k), daß die Funktionen W_k nicht ansteigende Funktionen der Veränderlichen t sind, also daß $\Delta W_k = \partial W_k / \partial t \leq 0$ ist, d.h. daß die Funktionen W_k für ein festes t superharmonisch sind. Es sei nun $U_k(x)$ die Lösung der Dirichletschen Aufgabe auf dem Gebiet G_k für die Funktion f^* und V_k die Lösung der Dirichletschen Aufgabe auf G_k für die Funktion $\gamma(x)$. Offenbar ist

$$U_k(x) \leq V_k(x) \leq W_k(x, t_0), \quad t_0 \geq 1.$$

⁽¹⁸⁾ Im Raume E_m .

Durch Grenzübergang für $k \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$U(f, x) \leq W(\varphi, x, t_0).$$

Da der Punkt y für die Gleichung (2) stabil ist, hat man

$$U(f, y) \leq f(y) + \varepsilon.$$

Analog läßt sich auch

$$U(f, y) \geq f(y) - \varepsilon$$

beweisen.

SATZ 10. Wenn $y \in \dot{G}$ stabil für die Gleichung (1) ist, so ist es auch für die Gleichung (2) stabil.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$, φ eine stetige Funktion, $|\varphi(x, t)| < M$ und $0 < t_0 < T$ ⁽¹⁹⁾. Es gibt ein δ_1 derart, daß für $|x - y| < \delta_1$ und $|t - t_0| < \delta_1$

$$|\varphi(y, t_0) - \varphi(x, t)| < \varepsilon/2$$

ist. Es existiert eine Zahl δ ($0 < \delta < \delta_1/2$) und eine Lösung der Gleichung

$$\Delta v = \partial v / \partial t,$$

die für $t = t_0 - \delta_1$ stetig ist und außerdem die Bedingungen

$$v(x, t_0 - \delta_1) = 2M \quad \text{für} \quad |x - y| < 2\delta,$$

$$v(x, t_0 - \delta_1) = 0 \quad \text{für} \quad |x - y| > 3\delta,$$

$$0 \leq v(x, t_0 - \delta_1) \leq 2M,$$

$$(21) \quad v(y, t_0) < \varepsilon/2$$

erfüllt. Wir definieren die Funktion $f(x)$ folgendermaßen:

$$f(x) = \begin{cases} -\delta/|x - y| + 1 & \text{für} \quad |x - y| > \delta, \\ 0 & \text{für} \quad |x - y| \leq \delta. \end{cases}$$

Die Funktion $f(x)$ ist offenbar nicht negativ. Es sei U_k die Lösung der Dirichletschen Aufgabe für die Gleichung (1) auf dem Gebiet G_k für die Funktion f . Da $f(x)$ subharmonisch ist, ist $f(x) \leq U_k(x)$. Es sei W_k die Lösung der Dirichletschen Aufgabe für die Funktion $\varphi(x, t)$ und den Zylinder $Q_k = G_k \times (0, T)$. Wir setzen

$$F_k(x, t) = \varphi(y, t_0) + \varepsilon/2 + 4MU(x) + v(x, t).$$

Wir bezeichnen mit V die Menge der Punkte (x, t) , für die $|x - y| < 2\delta$ und $|t - t_0| < \delta_1$ gilt. Auf dem parabolischen Rand der Menge $Q_k \cap V$ gilt

$$(22) \quad W_k(x, t) \leq F_k(x, t).$$

⁽¹⁹⁾ $t_0 = 0$ untersucht man auf ähnliche Weise, $t_0 = T$ braucht nicht untersucht zu werden.

Tatsächlich ist für $t = t_0 - \delta_1$

$$(23) \quad W_k(x, t) \leq 2M, \quad F_k(x, t) \geq \varphi(y, t_0) + \varepsilon/2 + 2M > M.$$

Wenn $|x - y| = 2\delta$ ist, so gilt wieder (23) und

$$F_k(x, t) \geq \varphi(y, t_0) + \varepsilon/2 + 4Mf(x) \geq \varphi(y, t_0) + \varepsilon/2 + 2M.$$

Ist jedoch $|x - y| < 2\delta$, so hat man

$$W_k(x, t) < \varphi(y, t_0) + \varepsilon/2$$

und es gilt (22). Aus dem Maximumprinzip folgt, daß (22) auch innerhalb $Q_k \cap V$ gilt. Wenn wir $x = y$ und $t = t_0$ einsetzen, erhalten wir

$$W_k(y, t_0) \leq \varphi(y, t_0) + \varepsilon/2 + 4MU_k(y) + v(y, t_0).$$

Durch Grenzübergang für $k \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$W(\varphi, y, t_0) \leq \varphi(y, t_0) + \varepsilon/2 + 4MU(f, y) + v(y, t_0).$$

Da der Punkt y für die Gleichung (1) stabil war, ist $U(f, y) = 0$. Daraus und aus (1) folgt

$$W(\varphi, y, t_0) < \varphi(y, t_0) + \varepsilon.$$

Ähnlich läßt sich auch

$$W(\varphi, y, t_0) > \varphi(y, t_0) - \varepsilon$$

beweisen.

Anmerkung bei Korrektur: Ähnliche Resultate wie im § 2. kann man in [9] finden.

Literaturverzeichnis

- [1] А. Тихонов, *Об уравнении теплопроводности для нескольких переменных*, Бюллетень московского гос. ун-та 1, 9 (1938), S. 1-45.
- [2] W. Fulks, *Regular regions for the heat equation*, Pacific. Jour. Math. 7 (1957), S. 867-877.
- [3] — *A note on the steady state solutions of the heat equations*, Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), S. 766-770.
- [4] N. Wiener, *Certain Notions in Potential Theory*, Journ. Math. Phys. 3 (1924), S. 24-51.
- [5] B. Pini, *Sulla soluzione generalizzata di Wiener per il primo problema di valori al contorno nel caso parabolico*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 23 (1954), S. 422-434.
- [6] М. В. Келдыш, *О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле*, Успехи мат. наук 8 (1941), S. 171-231.
- [7] L. Nirenberg, *A Strong Maximum Principle for Parabolic Equations*, Comm. Pure Appl. Math. 6 (1953), S. 167.
- [8] S. Bernstein, *Limitation des modules des dérivées successives des solutions des équations du type parabolique*, C. R. de l'Académie des Sciences de l'URSS 18 (1938), S. 385-389.
- [9] H. Murakami, *On the Regularity Domains for Parabolic Equations*, Proc. Japan Acad. 34 (1958), S. 347-348.

Reçu par la Rédaction le 2. 12. 1959