ACTA ARITHMETICA
VIII (1963)

Abschätzungen für die Klassenzahlen der quadratischen Körper

von

M. Gut (Zürich)

Prof. B. L. van der Waerden
zum 60. Geburtstage gewidmet

1. Inhaltsangabe und Bezeichnungen. Es liege ein reeller oder imaginärer quadratischer Zahlkörper mit der Diskriminanten d vor, sodaß für ganzrationalzahliges quadratfreies D:

$$\begin{array}{llll} \text{entweder} & d = D\,, & \text{falls} & D \equiv 1 \pmod 4 \\ \text{oder} & d = 4D\,, & \text{falls} & D \equiv 2,3 \pmod 4\,. \end{array}$$

Ist k der Körper der rationalen Zahlen, so ist also der Körper mit der Diskriminanten d der Körper $k(\sqrt{D})$.

Wir beweisen in dieser Arbeit mit elementaren Mitteln folgende beiden Sätze:

Hauptsatz. *Für die Klassenzahl h des Körpers $k(\sqrt{D})$ gilt, abgesehen von den Körpern der 3. und 4. Einheitswurzeln* ($d = -3$ *und* $d = -4$), *für welche* $h = 1$ *ist, die Ungleichung*

$$h < \frac{|d|}{4}\,. \tag{1}$$

Zusatz. *Wenn* $d = 4D$, $D \equiv 2,3 \pmod 4$ *ist, gilt sogar die Ungleichung*

$$h < \frac{|d|}{12} = \frac{|D|}{3}\,, \tag{2}$$

falls man die Körper mit den Diskriminanten $d = 8$ *und* $d = 12$, *ferner abgesehen von dem sowieso ausgeschlossenen Fall* $d = -4$, *die Körper mit den Diskriminanten* $d = -8$, $d = -20$ *und* $d = -24$ *ausschließt.*

Ich möchte von vorneherein bemerken, daß ich die beiden Sätze eigentlich nur für positive d, also reelle Körper beweisen wollte, da aber die gleichen Mittel auch für negative d zum Ziele führen, gebe ich den Beweis auch für diese.

Für positive d zeigen N. C. Ankeny und S. Chowla in der Arbeit [2] für den Fall $d = p$, wo p eine Primzahl $\equiv 1 \pmod 4$ ist, daß $h < p$ und führen an, daß ihnen $h < p$ schon bekannt war, als sie die Arbeit [1] schrieben, ohne daß sie dies dort erwähnten. Sie geben in einer Nachschrift der Arbeit [2] auch noch einen anderen Beweis von L. J. Mordell für diesen Fall $d = p$.

Persönlich glaube ich, daß das Resultat $h < p$ sicher schon lange vielen Zahlentheoretikern bekannt war, obwohl es sich offenbar nicht explizite in der Literatur findet, und daß eine Publikation unterblieb, weil die Arbeit [2] und auch der Beweis der vorliegenden Arbeit zeigen, daß für großes d in dieser Richtung viel schärfere Abschätzungen möglich sind. Man vergleiche auch die Arbeit [5]. Jedenfalls war mir $h < p$ schon 1956 bekannt. Ich publizierte das Resultat damals nicht, weil ich es in Zusammenhang mit einer anderen Beweisführung eines Teilresultates des in [1] behandelten Problems erhielt, worauf ich vielleicht in einer weiteren Note zurückkommen werde. Auf jeden Fall ist meine hier gegebene Abschätzung $h < \frac{1}{4}p$ auch für $d = p$ schärfer.

Dem Beweise von (1) und (2) schicke ich noch voraus:

In der ganzen Arbeit bedeute G immer den ganzzahligen Teil des absoluten Betrages von

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{d}\,, \qquad \text{falls} \qquad d > 0$$

und

$$\frac{2}{\pi}\sqrt{-d}\,, \qquad \text{falls} \qquad d < 0$$

ist. Dabei ist für die Quadratwurzel immer der positive Wert zu nehmen. Sowohl für $d > 0$, als auch für $d < 0$ ist G also immer eine natürliche Zahl.

Es sei n eine natürliche Zahl und $F(n)$ die Anzahl der (ganzen) Ideale des Körpers $k(\sqrt{D})$ mit der Norm n. Dann ist gemäß Hasse [3], S. 361,

$$h \leqslant \sum_{n=1}^{G} F(n)\,. \tag{3}$$

Nach Hecke [4], S. 201, ist dabei

$$F(n) = \sum_{m|n} \left(\frac{d}{m}\right). \tag{4}$$

2. Beweis des Hauptsatzes für den Fall $d \equiv 1 \pmod 4$, **also** $d = D$. Es ist gewiß

$$0 \leqslant F(n) \leqslant \sum_{m|n} 1 \leqslant n\,,$$

und daher

$$h \leqslant \sum_{n=1}^{G} n = \frac{G(G+1)}{2}\,.$$

Ist $d > 0$, so ist mithin wegen $2 < \sqrt{5} \leqslant \sqrt{d}$

$$h < \frac{\sqrt{d}(\sqrt{d}+2)}{8} < \frac{\sqrt{d}(\sqrt{d}+\sqrt{d})}{8} = \frac{d}{4}\,,$$

folglich für $d > 0$ die Formel (1) bewiesen.

Ist $d < 0$, so ist

$$h < \frac{\sqrt{-d}(2\sqrt{-d}+\pi)}{\pi^2} = \frac{\sqrt{-d}(30\sqrt{-d}+15\pi)}{15\pi^2} < \frac{\sqrt{-d}(30\sqrt{-d}+49)}{148}\,.$$

Setzt man hier voraus, daß $7 < \sqrt{-d}$, so folgt weiter

$$h < \frac{\sqrt{-d}(30\sqrt{-d}+7\sqrt{-d})}{4\cdot 37} = \frac{|d|}{4}\,.$$

d ist quadratfrei. Sei also $\sqrt{-d} < 7$, mithin $|d| < 49$, ferner $d \equiv 1 \pmod 4$ und $d \neq -3$.

Für die ganzen negativen Zahlen d, für welche $40 \leqslant |d| \leqslant 60$ ist, ist $G = 4$, also für die jetzt betrachteten Körper, falls für sie $40 \leqslant |d| \leqslant 60$ ist, gemäß (3) und (4)

$$h \leqslant \sum_{n=1}^{4} F(n) = 4\left(\frac{d}{1}\right) + 2\left(\frac{d}{2}\right) + \left(\frac{d}{3}\right) + \left(\frac{d}{4}\right) \leqslant 8\,,$$

und daher ist für sie (1) erfüllt.

Für zulässige Werte von d mit $23 \leqslant |d| \leqslant 39$ ist $G = 3$, folglich

$$h \leqslant \sum_{n=1}^{3} F(n) = 3 + \left(\frac{d}{2}\right) + \left(\frac{d}{3}\right) \leqslant 5\,,$$

und daher für sie (1) erfüllt.

Für zulässige Werte von d mit $10 \leqslant |d| \leqslant 22$ ist $G = 2$, mithin

$$h \leqslant 2 + \left(\frac{d}{2}\right) \leqslant 3\,.$$

Für $|d| = 19$ und $|d| = 15$ ist (1) erfüllt. Für $|d| = 11$ wird $\left(\frac{-11}{2}\right) = -1$, also $h = 1$ und (1) ist erfüllt.

Für zulässige Werte von d mit $3 \leqslant |d| \leqslant 9$ ist $G = 1$, und daher $h = 1$. Folglich ist (1) erfüllt für $|d| = 7$. Da $d = -3$ ausgeschlossen ist, ist der Hauptsatz für $d \equiv 1 \pmod 4$ bewiesen.

Im folgenden sei also immer $d = 4D$, $D \equiv 2{,}3 \pmod 4$, D quadratfrei.

3. Abschätzung von h als Funktion von G für $d = 4D$, $D \equiv 2,3 \pmod 4$, D quadratfrei. Es ist gemäß (4)

$$0 \leqslant F(n) = \sum_{m|n} \left(\frac{4D}{m}\right).$$

Wenn m gerade ist, ist $\left(\frac{4D}{m}\right) = 0$. Folglich ist

$$F(n) = \sum_{m|n}{}' \left(\frac{4D}{m}\right), \tag{5}$$

wo der Strich beim Summenzeichen immer bedeuten soll, daß m nur die ungeraden Teiler von n durchläuft.

Wir schätzen jetzt zuerst $F(n)$ ab als Funktion von n, und zwar zuerst für ungerades n und nachher für gerades n.

1. Fall: n ungerade.

1. Unterfall: $n \equiv 1 \pmod 6$.

Es ist $n = 6N+1$, wo N eine nicht negative ganze Zahl ist. Ferner gilt

$$F(1) = 1,$$
$$F(7) \leqslant 2,$$
$$F(13) \leqslant 2.$$

Für $N \geqslant 3$, also $2N-1 \geqslant 5$ sind, da 3 kein Teiler von $6N+1$ ist, von den Zahlen

$$1, 3, 5, \ldots, 2N-1, 2N+1, \ldots, 6N-1, 6N+1$$

höchstens $1, 5, \ldots, 2N-1$ und $6N+1$ Teiler von n. Daher ist

$$F(n) \leqslant N = \frac{n-1}{6}.$$

Für $n = 13$ ist diese Ungleichung auch erfüllt. Der Ansatz

$$F(n) \leqslant \frac{n+5}{6} \tag{6}$$

gilt mithin für alle n, für welche $n \equiv 1 \pmod 6$.

2. Unterfall: $n \equiv -1 \pmod 6$.

Es ist $n = 6N-1$, wo N eine natürliche Zahl ist. Weiter gilt:

$$F(5) \leqslant 2,$$
$$F(11) \leqslant 2,$$
$$F(17) \leqslant 2.$$

Für $N \geqslant 4$ also $2N-1 \geqslant 7$ sind, da 3 kein Teiler von $6N-1$ ist, von den Zahlen

$$1, 3, 5, \ldots, 2N-1, 2N+1, \ldots, 6N-3, 6N-1$$

höchstens $1, 5, \ldots, 2N-1$ und $6N-1$ Teiler von n. Daher ist

$$F(n) \leqslant N = \frac{n+1}{6}.$$

Für $n = 17$ und $n = 11$ ist diese Ungleichung auch erfüllt. Der Ansatz:

$$F(n) \leqslant \frac{n+7}{6} \tag{7}$$

gilt mithin für alle n, für welche $n \equiv -1 \pmod 6$ ist.

3. Unterfall: $n \equiv 3 \pmod 6$.

Es ist $n = 6N+3$, wo N eine nicht negative ganze Zahl ist. Ferner gilt:

$$F(3) \leqslant 2,$$
$$F(9) \leqslant 3,$$
$$F(15) \leqslant 4.$$

Für $N \geqslant 3$ ist $2N+1 \geqslant 7$ und von den Zahlen

$$1, 3, \ldots, 2N-1, 2N+1, 2N+3, \ldots, 6N+1, 6N+3$$

sind höchstens $1, 3, \ldots, 2N-1, 2N+1$ und $6N+3$ Teiler von n. Daher ist

$$F(n) \leqslant N+2 = \frac{n+9}{6}.$$

Für $n = 15$, $n = 9$ und $n = 3$ ist diese Ungleichung auch erfüllt. Mithin ist für alle n, für welche $n \equiv 3 \pmod 6$:

$$F(n) \leqslant \frac{n+9}{6}. \tag{8}$$

Ist daher n ungerade, so ist in allen Fällen gemäß (6), (7) und (8):

$$F(n) \leqslant \frac{n+9}{6}. \tag{9}$$

2. Fall: n gerade.

Dann ist n von der Form

$$n = 2^{t+1}(2s+1),$$

wo s und t nicht negative ganze Zahlen sind, und gemäß (9):

$$F(n) = F(2s+1) = F\left(\frac{n}{2^{t+1}}\right) \leqslant \frac{1}{6}\left(\frac{n}{2^{t+1}}+9\right) \leqslant \frac{1}{6}\left(\frac{n}{2}+9\right),$$

also

$$F(n) \leqslant \frac{n+18}{12}. \tag{10}$$

Prinzipiell ist zu bemerken, daß man diese Ungleichungen (9) und (10) sehr verschärfen kann, wenn man von vorneherein annimmt, daß n genügend groß ist und von den Werten von $F(n)$ für kleine n absieht.

Wir gehen über zur Abschätzung von h als Funktion der natürlichen Zahl G gemäß der Ungleichung (3).

Es sei zunächst G ungerade.

Aus (3), (9) und (10) folgt nach der Summenformel für die arithmetischen Reihen:

$$h \leqslant \frac{1}{6}\sum_{n=1,3,5,\dots}^{G}(n+9)+\frac{1}{12}\sum_{n=2,4,6,\dots}^{G-1}(n+18)$$
$$=\frac{1}{12}(10+G+9)\cdot\frac{G+1}{2}+\frac{1}{24}(20+G+17)\cdot\frac{G-1}{2}$$
$$=\frac{(G+19)(2G+2)+(G+37)(G-1)}{48}$$
$$=\frac{3G^2+76G+1}{48},$$

also wegen $1 \leqslant G$

$$h \leqslant \frac{3G^2+77G}{48}. \tag{11}$$

Sei G gerade.

Aus (3), (9) und (10) folgt wiederum nach der Summenformel für die arithmetischen Reihen:

$$h \leqslant \frac{1}{6}\sum_{n=1,3,5,\dots}^{G-1}(n+9)+\frac{1}{12}\sum_{n=2,4,6,\dots}^{G}(n+18)$$
$$=\frac{1}{12}(10+G+8)\cdot\frac{G}{2}+\frac{1}{24}(20+G+18)\cdot\frac{G}{2}$$
$$=\frac{(G+18)\cdot 2G+(G+38)\cdot G}{48}$$

also

$$h \leqslant \frac{3G^2+74G}{48}. \tag{12}$$

Aus (11) und (12) folgt: Für jeden Wert von G ist

$$h \leqslant \frac{3G^2+77G}{48}. \tag{13}$$

Wir gehen über zum

4. Beweis des Hauptsatzes und seines Zusatzes für $d = 4D$, $D \equiv 2,3 \pmod 4$, D quadratfrei, $d > 0$. Da in diesem Abschnitt immer $G = [\sqrt{D}]$ ist, ist (1) jedenfalls erfüllt für $D = 2$ und $D = 3$, da für diese beiden Körper wegen $G = 1$ auch $h = 1$ sein muss. Will man nur den Hauptsatz beweisen, so genügt es daher, zu bemerken dass für $2 < \sqrt{D}$ aus (13) folgt

$$h < \frac{3D+78\sqrt{D}}{48} = \frac{D+13\cdot 2\sqrt{D}}{16} < \frac{D+13D}{16} = \frac{7}{8}D < D = \frac{d}{4}.$$

Die Ungleichung (1) ist also erfüllt.

Für den Beweis des Zusatzes ist zu beachten, dass wenn man annimmt, daß $49 < D$, also $7 < \sqrt{D}$ ist, aus (13) wegen $G = [\sqrt{D}]$ folgt

$$h < \frac{3D+11\cdot 7\sqrt{D}}{48} < \frac{3D+11D}{48} = \frac{14D}{48} < \frac{16D}{48} = \frac{D}{3}.$$

Mithin ist für $D > 49$ die Ungleichung (2) bewiesen.

Wir beweisen jetzt (2) für $D < 49$.

Für die ganzen Zahlen D, für welche $36 \leqslant D \leqslant 48$ ist, ist $G = 6$. Daher ist für diejenigen unter den noch zu betrachtenden Körper, für welche $36 \leqslant D \leqslant 48$ ist:

$$h \leqslant \sum_{n=1}^{6} F(n) = 6\left(\frac{4D}{1}\right)+2\left(\frac{4D}{3}\right)+\left(\frac{4D}{5}\right) \leqslant 9,$$

folglich (2) erfüllt.

Für die zulässigen D, für welche $25 \leqslant D \leqslant 35$ ist, ist $G = 5$ und

$$h \leqslant \sum_{n=1}^{5} F(n) = 5+\left(\frac{4D}{3}\right)+\left(\frac{4D}{5}\right) \leqslant 7,$$

mithin (2) erfüllt.

Für zulässige Werte von D, für welche $16 \leqslant D \leqslant 24$ ist, ist $G = 4$, mithin

$$h \leqslant \sum_{n=1}^{4} F(n) = 4+\left(\frac{4D}{3}\right) \leqslant 5,$$

sodaß auch für diese Körper (2) erfüllt ist.

Für zulässige Werte von D, für welche $9 \leqslant D \leqslant 15$ ist, ist $G = 3$ und daher

$$h \leqslant \sum_{n=1}^{3} F(n) = 3+\left(\frac{4D}{3}\right) \leqslant 4.$$

Für $D=15$ und $D=14$ ist also (2) erfüllt. Für $D=11$ ist wegen $\left(\frac{4D}{3}\right)=-1$ die Klassenzahl $h\leqslant 2$ und (2) auch erfüllt.

Im Körper $k(\sqrt{10})$ sind wegen $G=3$ nur die ganzen Ideale zu betrachten, deren Norm gleich 1, 2 oder 3 ist. Soll für ganze rationale Zahlen x und y

$$(x+y\sqrt{10})(x-y\sqrt{10}) = x^2-10y^2 = \pm 2$$

sein, so muß x gerade sein: $x=2z$, wo auch z ganzrational ist und daher $2z^2-5y^2=\pm1$. Mithin muß y ungerade sein, also $2z^2\equiv 5\pm1 \pmod 8$, welche Kongruenz nicht erfüllbar ist. Folglich ist $\mathfrak{p}=(2,\sqrt{10})$ Nebenideal, und $\mathfrak{p}^2=(2)$ ist Hauptideal: $\mathfrak{p}^2\sim 1$. Für $\mathfrak{q}=(3,1+\sqrt{10})$ gilt

$$\begin{aligned}(2-\sqrt{10})\cdot\mathfrak{p} &= (4-2\sqrt{10},\ -10+2\sqrt{10}) = (6,\ -10+2\sqrt{10})\\ &= (6,\ 2+2\sqrt{10}) = (2)\cdot\mathfrak{q},\end{aligned}$$

also $\mathfrak{q}\sim\mathfrak{p}$. Übergang zu den konjugierten zeigt, daß für $\mathfrak{q}'=(3,1-\sqrt{10})$ die Aequivalenz $\mathfrak{q}'\sim\mathfrak{p}'=\mathfrak{p}$ gilt. Folglich ist $h=2$ und (2) ist erfüllt.

Für zulässige Werte, für welche $4\leqslant D\leqslant 8$ ist, ist $G=2$ und daher $h\leqslant 2$. Für $D=7$ ist mithin (2) erfüllt.

Für $D=6$ ist $\mathfrak{p}=(2,\sqrt6)$ wegen $(2+\sqrt6)(-2+\sqrt6)=2$ und $(2+\sqrt6)\times(3-\sqrt6)=\sqrt6$ Hauptideal: $\mathfrak{p}=(2+\sqrt6)$, also $h=1$ und daher (2) erfüllt.

Für $D=3$ und $D=2$ ist $1<\frac13 D$ nicht erfüllbar.

5. Beweis des Hauptsatzes und Zusatzes für $d=4D$, $D\equiv 2, 3 \pmod 4$, D quadratfrei, $d<0$. Da jetzt $G=\left[\frac{2|\sqrt{d}|}{\pi}\right]=\left[\frac{4|\sqrt{D}|}{\pi}\right]$ ist, folgt aus (13)

$$h<\frac{12|D|+77\pi|\sqrt D|}{12\pi^2}<\frac{12|D|+242|\sqrt D|}{12\pi^2}=\frac{6|D|+121|\sqrt D|}{6\pi^2}.$$

Erweitert man diesen Bruch mit 5, so folgt, da $5\pi^2>49$ ist

$$h<\frac{30|D|+605|\sqrt D|}{6\cdot 49},$$

also

$$h<\frac{30|D|+9\cdot68|\sqrt D|}{3\cdot98}. \tag{14}$$

Will man nur den Hauptsatz beweisen, so folgert man aus dieser Ungleichung für $3<|\sqrt D|$, falls man zuerst mit 6 kürzt:

$$h<\frac{5|D|+3\cdot34|\sqrt D|}{49}<\frac{5|D|+34|D|}{49}=\frac{39}{49}|D|<|D|=\frac{|d|}{4},$$

also die Behauptung (1).

Für die in Betracht fallenden Körper mit $|D|<9$ bemerken wir zunächst, dass für ganzrationalzahliges negatives D mit $6\leqslant|D|\leqslant9$ die Größe $G=3$ ist. Folglich wird für den allein in Betracht fallenden Körper $k(\sqrt{-6})$:

$$h\leqslant\sum_{n=1}^{3}F(n)=3+\left(\frac{-4|D|}{3}\right)=3<|D|,$$

d.h. (1) ist für ihn erfüllt.

Für ganzrationalzahliges negatives D mit $3\leqslant|D|\leqslant5$ ist $G=2$. Für den Körper $k(\sqrt{-5})$ ist daher

$$h\leqslant F(1)+F(2)=2<|D|=5.$$

Für $|D|=2$ und $|D|=1$ ist $G=1$ und daher für die beiden Körper $k(\sqrt{-2})$ und $k(\sqrt{-1})$ die Klassenzahl $h=F(1)=1$. Für $|D|=2$ ist daher (1) erfüllt. Der Fall $|D|=1$ wurde oben ausgeschlossen.

Will man auch den Zusatz beweisen, so folgert man aus (14) für $9<|\sqrt D|$:

$$h<\frac{30|D|+68|D|}{3\cdot98}=\frac{|D|}{3}=\frac{|d|}{12},$$

womit für diese Körper (2) bewiesen ist.

Weil D quadratfrei ist, ist noch die Gültigkeit oder Ungültigkeit von (2) für die imaginär quadratischen Körper zu untersuchen, für welche $|D|<81$ und $D\equiv2, 3\pmod4$ ist.

Für ganzrationalzahlige negative Zahlen D, für welche $75\leqslant|D|\leqslant88$ ist, ist $G=11$. Für diejenigen unserer Körper, für welche $75\leqslant|D|\leqslant88$ ist, ist wegen

$$h\leqslant\sum_{n=1}^{11}F(n)=11\left(\frac{4D}{1}\right)+3\left(\frac{4D}{3}\right)+2\left(\frac{4D}{5}\right)+\left(\frac{4D}{7}\right)+\left(\frac{4D}{9}\right)+\left(\frac{4D}{11}\right)\leqslant19$$

die Ungleichung (2) erfüllt.

Schließt man analog für mögliche D weiter, so wird

für $62\leqslant|D|\leqslant74$ die Größe $G=10$ und daher $h\leqslant17$,
für $50\leqslant|D|\leqslant61$ die Größe $G=\ \ 9$ und daher $h\leqslant15$,
für $40\leqslant|D|\leqslant49$ die Größe $G=\ \ 8$ und daher $h\leqslant12$,

sodaß die Ungleichung (2) immer erfüllt ist.

Für $31\leqslant|D|\leqslant39$ ist $G=7$, also

$$h\leqslant\sum_{n=1}^{7}F(n)=7+2\left(\frac{4D}{3}\right)+\left(\frac{4D}{5}\right)+\left(\frac{4D}{7}\right)\leqslant11.$$

Folglich ist für $|D| \geqslant 34$ die Ungleichung (2) erfüllt, ebenso für $|D| = 33$, weil 3 Diskriminantenteiler, also $h \leqslant 9$ ist.

Für mögliche Werte D mit $23 \leqslant |D| \leqslant 30$ ist $G = 6$ und daher $h \leqslant 9$. Mithin ist (2) erfüllt für $|D| = 30$ und $|D| = 29$. In $k(\sqrt{-26})$ hat das Primideal $\mathfrak{p} = (2, \sqrt{-26})$ die Ordnung 2, das Primideal $\mathfrak{q} = (3, 1+\sqrt{-26})$ die Ordnung 3. Folglich muß h ein Vielfaches von 6 sein. Wegen $h \leqslant 9$ ist $h = 6$ und (2) erfüllt.

Für mögliche Werte von D mit $16 \leqslant |D| \leqslant 22$ ist $G = 5$, also

$$h \leqslant \sum_{n=1}^{5} F(n) = 5 + \left(\frac{4D}{3}\right) + \left(\frac{4D}{5}\right) \leqslant 7 .$$

Mithin ist (2) erfüllt für $|D| = 22$. Für $|D| = 21$ ist 3 Diskriminantenteiler, also $h \leqslant 6 < \frac{1}{3}|D|$. Für $|D| = 17$ ist $\left(\frac{-4\cdot 17}{5}\right) = -1$, folglich $h \leqslant 5 < \frac{1}{3}|D|$.

Für mögliche Werte D mit $10 \leqslant |D| \leqslant 15$ ist $G = 4$, also

$$h \leqslant 4 + \left(\frac{4D}{3}\right) \leqslant 5 .$$

In $k(\sqrt{-14})$ hat das Primideal $\mathfrak{q} = (3, 5+2\sqrt{-14})$ die Ordnung 4. Da sie ein Teiler von h sein muß, ist $h = 4$ und (2) für $|D| = 14$ erfüllt. Für $|D| = 13$ und $|D| = 10$ ist $\left(\frac{-4|D|}{3}\right) = -1$, also ebenso $h \leqslant 3 < \frac{1}{3}|D|$.

Da für $D = -6$ und $D = -5$ für ganzrationalzahlige x und y die Gleichung $x^2 - Dy^2 = 2$ keine Lösung hat, ist in diesen beiden Körpern der Primidealteiler von 2 Nebenideal und mithin (siehe oben !) ist für diese beiden Körper $h = 2$. Folglich ist (2) nicht erfüllt für $|D| = 6, 5, 2$ und 1. Damit ist der Beweis auch für negative D erbracht.

Literaturverzeichnis

[1] N. C. Ankeny, E. Artin and S. Chowla, *The class-number of real quadratic number fields*, Ann. Math. 56 (1952), S. 479-493.

[2] N. C. Ankeny and S. Chowla, *A note on the class number of real quadratic fields*, Acta Arith. 6 (1960), S. 145-147.

[3] H. Hasse, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1950.

[4] E. Hecke, *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen*, Leipzig 1923.

[5] K. Schaffstein, *Tafel der Klassenzahlen der reellen quadratischen Zahlkörper mit Primzahldiskriminante unter 12000 und zwischen 100000-101000 und 1000000-1001000*, Math. Ann. 98 (1927/28), S. 745-748.

Reçu par la Rédaction le 18. 4. 1962

ACTA ARITHMETICA
VIII (1963)

К вопросу о простых иррегулярных числах

И. Ш. Славутский (Ленинград)

1. Простое нечетное число p называется *иррегулярным*, если p делит числитель хотя бы одного из чисел Бернулли, $B_2, B_4, \ldots, B_{p-3}$ и *регулярным* в противном случае. Здесь числа Бернулли подчинены рекуррентному символическому соотношению $(B+1)^k = B^k$, $k = 2, 3, \ldots, B_0 = 1$. Общеизвестна связь этого понятия с теорией алгебраических чисел, а также с диофантовым анализом (см. [1], [2] и другие). В частности, целый ряд фактов теории кругового поля $R(e^{2\pi i/p})$ существенным образом зависит от того, является ли простое число p регулярным или нет.

Наличие бесконечного количества простых иррегулярных чисел вида $p \equiv 3 \pmod 4$ впервые доказано Иенсеном ([3]) (¹). Вопрос о количестве простых иррегулярных чисел вида $p \equiv 1 \pmod 4$ и о количестве регулярных простых чисел остается открытым, хотя далеко продвинутые вычисления на электронных машинах дают повод предполагать, что и тех и других бесконечно много ([7]).

2. Результат Иенсена дополняет следующая

Теорема. *Существует бесконечно много простых иррегулярных чисел вида* $p \equiv 2 \pmod 3$.

Действительно, пусть простых иррегулярных чисел вида $p \equiv 2 \pmod 3$ конечное число: $p_1, \ldots, p_r$. В силу теоремы Дирихле (о простых числах в арифметической прогрессии) можно выбрать целое число g так, чтобы $Q = 3g\prod_{i=1}^{r}(p_i - 1) + 1$ оказалось простым числом. Рассмотрим число Бернулли с номером $T = 4Q$.

Знаменатель B_T равен $30 = 2\cdot 3\cdot 5$, как это следует из теоремы Штаудта. Действительно, $2Q+1 = 3\cdot 2g\prod_i (p_i - 1) + 3$ и $4Q+1 = 12g\prod_i (p_i - 1) + 5$ не являются простыми числами (последнее кратно 5, ибо, как известно, $p_2 = 101$).

(¹) Этот почти единственный результат в теории распределения простых иррегулярных чисел неоднократно воспроизводился в литературе ([4], [5]). Недавно Карлиц ([6]) другим способом доказал, что простых иррегулярных чисел бесконечно много (более слабый результат!).