Proof. The upper estimate is trivial. In order to prove the lower one we notice that every λ-full integer k can be uniquely represented in the form $k = nr^{\lambda}$, with the restrictions that n is $(\lambda+1)$-full, r is squarefree, and $(n, r) = 1$. As $a(k) = a(n)r$, we obtain

$$S_{\lambda}(x) = \sum_{n\leqslant x}^{(\lambda+1)} \big(a(n)\big)^{-1} \sum_{r\leqslant x/n}{}' r^{-1},$$

where the dash indicates restriction to squarefree r with $(r, n) = 1$. Ignoring these restrictions, we obtain

$$S_{\lambda}(x) \leqslant S_{\lambda+1}(x) \sum_{r\leqslant x/n} r^{-1} \leqslant S_{\lambda+1}(x)\log(x+1) .$$

This proves the theorem.

References

[1] N. G. de Bruijn, *On the number of integers $\leqslant x$ whose prime factors divide n*, Illinois J. Math. 6 (1962), pp. 137-141.

[2] — and P. Erdös, *On a recursion formula and on some tauberian theorems*, J. Res. Nat. Bur. Standards 50 (1953), pp. 161-164.

[3] — and J. H. van Lint, *On the asymptotic behaviour of some Dirichlet series with a complicated singularity*, Nieuw Archief v. Wiskunde (3), 11 (1963), pp. 68-75.

TECHNOLOGICAL UNIVERSITY, EINDHOVEN, NETHERLANDS

Reçu par la Rédaction le 26. 2. 1963

ACTA ARITHMETICA
VIII (1963)

Verschärfung der Abschätzung von $\zeta(\frac{1}{2}+it)$

von

W. Haneke (Marburg/Lahn)

Einleitung. In dieser Arbeit soll eine neue obere Abschätzung für die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$ auf der „kritischen Geraden" $s = \frac{1}{2}+it$ hergeleitet werden.

Grundlegend ist dabei die Idee von Weyl und van der Corput, die in der approximativen Funktionalgleichung der Zetafunktion auftretenden trigonometrischen Summen in Exponentialsummen überzuführen, die unmittelbar eine nichttriviale Abschätzung gestatten.

Bei Weyl und van der Corput waren diese Exponentialsummen stets eindimensional (vgl. [7], Chap. 5, S. 81-101) [1].

Titchmarsh erzielte durch Einschaltung zweidimensionaler Exponentialsummen bessere Abschätzungen (vgl. [5] und [6]).

Min [3] verfeinerte die zweidimensionale Methode und fand damit für jedes beliebige aber feste positive ε

$$\zeta(\tfrac{1}{2}+it) = O(t^{15/92+\varepsilon}) \qquad (t\to\infty) .$$

In der Literatur wurde bisher noch keine Verschärfung dieser Abschätzung veröffentlicht.

Im Beweis von Min tritt das Problem auf, für die Nullstellenmannigfaltigkeit einer Hesseschen Determinante eine Umgebung mit bestimmten Eigenschaften zu konstruieren. Diese Umgebung ist nun im wesentlichen durch die Anzahl der frei wählbaren Parameter in drei vorbereitenden „Weylschen Schritten" bestimmt. Min beschränkte sich auf vier Parameter (vgl. [3], S. 459, (4.7)) und konnte daher als Umgebung einen Parallelstreifen wählen, was bei mehr als vier Parametern nicht mehr möglich gewesen wäre. Infolgedessen konnte die dreimalige Anwendung der „Weylschen Idee" nicht voll mit insgesamt sechs Parametern ausgenutzt werden.

[1] Die Zahlen in den eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

Wir wollen nun mit Hilfe eines neuen Exponentialsummentypus von einer solchen Beschränkung frei werden: Wir führen die Abschätzung von $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ auf das Problem zurück, Summen von der Form

$$\sum_{\substack{m,n \\ a<m\leqslant b \\ B(m)<n+p(m)\leqslant r''}} e^{2\pi i f(m,n+p(m))}$$

möglichst günstig abzuschätzen, wo $f(w,z)$ in einem Gebiet von der Form

$$\{(w,z):\ w,z \text{ komplex},\ |w-\tfrac{3}{2}r'|<Cr',\ |z|<r\}$$

mit $r>r''>0$, $1\leqslant a\leqslant b\leqslant 2r'$, $C>\frac{1}{2}$ in beiden Veränderlichen holomorph und für reelle Argumente (w,z) reell ist, $p(x)$ eine reelle Funktion und $B(x)$ eine reelle differenzierbare Funktion bedeutet. Für solche Summen werden „Weylsche" und „van der Corputsche" Schritte entwickelt. Die dreifache Anwendung unseres „Weylschen Schrittes" (vgl. Satz 1) läßt sich dann mit sechs Parametern ausnutzen.

An die Stelle des oben angedeuteten Nullstellenproblems für eine Hessesche Determinante tritt dabei die Aufgabe, gewisse „Polynomsummen" möglichst günstig abzuschätzen. Dies läßt sich unter Zuhilfenahme einiger algebraischer Betrachtungen durchführen. Schließlich müssen wir uns noch von mehreren einschränkenden Voraussetzungen befreien, denen die oben erwähnten Parameter unterworfen sind. Das wird mit Hilfe einer van der Corputschen Abschätzung für eindimensionale Exponentialsummen gelingen.

Als Hauptsatz ergibt sich dann die Abschätzung

$$\zeta(\tfrac{1}{2}+it) = O(t^{6/37}\log t) \qquad (t\to\infty)\,.$$

Hierdurch wird das Resultat von Min verschärft. Denn mit Hilfe der für positive x definierten, streng monoton wachsenden Funktion

$$h(x) = x/(6x+2)$$

erkennt man sofort die Ungleichung

$$6/37 = h(12) < h(15) = 15/92\,.$$

Es scheint nicht möglich zu sein, unseren Hauptsatz durch Verwendung trigonometrischer Summen zu verbessern, deren Dimension größer als 2 ist.

Herrn Professor Richert möchte ich für seine Anregungen und Ratschläge zur Gestaltung dieser Arbeit danken.

Der zweite Teil dieser Arbeit wurde von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen als Dissertation angenommen.

Abkürzungen. R bezeichnet den Körper der reellen Zahlen. s, w und z bezeichnen komplexe, y und Y bezeichnen reelle Zahlen. Entsprechendes gilt für die Symbole, die aus diesen Buchstaben durch Anbringen von Indizes oder Strichen hervorgehen. Wir setzen

$$e^{2\pi i z} = e(z)\,.$$

Ist K eine Menge komplexer Zahlen und r reell, so wird

$$\{(w,z):\ w\in K,\ |z|<r\} = (K,r)$$

gesetzt.

Ist N eine natürliche Zahl $\geqslant 2$, so werden die Komponenten eines jeden Punktes x aus R^N mit $x_1,\ldots,x_N$ bezeichnet. In Zeichen bedeutet dies:

$$x = (x_1,\ldots,x_N) \quad \text{für alle } x \text{ aus } R^N.$$

g, j, k, l, m, n bezeichnen entweder ganze Zahlen oder Elemente aus einem R^N, deren Komponenten sämtlich ganzzahlig sind.

Neben dem Symbol O von Landau benutzen wir in durchlaufenden Abschätzungen das gleichwertige Symbol $\ll$ von Vinogradoff.

§ 1. Hilfsmittel. Im ersten Paragraphen wollen wir die für unsere späteren Abschätzungen notwendigen Hilfsmittel zusammenstellen. Die in den nachstehenden Sätzen auftretenden O- bzw. $\ll$-Konstanten hängen nur von denjenigen Parametern ab, die in der zugehörigen Voraussetzung als „beliebig aber fest" bezeichnet werden.

Zunächst verschärfen wir den „Weylschen Schritt" der zweidimensionalen van der Corput-Titchmarsh-Methode.

Satz 1. *Für $j=1,2$ seien reelle Zahlen a_j, b_j mit*

$$(1) \qquad b_1-a_1\geqslant 1\,, \quad b_2-a_2\geqslant 2$$

gegeben. Für eine reelle Zahl v sei

$$(2) \qquad G\subset\{x\in R^2:\ a_1\leqslant x_1\leqslant b_1,\ a_2\leqslant x_2+vx_1\leqslant b_2\}\,.$$

Auf G sei eine reelle Funktion $f(x)$ definiert. Schließlich sei

$$(3) \qquad 0<r_1\leqslant b_1-a_1, \quad 2\leqslant r_2\leqslant b_2-a_2\,.$$

Dann gilt

$$(4) \qquad \sum_{n\in G} e\big(f(n)\big) \ll W^{1/2} \max_{\substack{-r_j\leqslant a_j'\leqslant b_j'\leqslant r_j \\ (j=1,2)}} \Bigg|\sum_{\substack{n,m\in R \\ n,n+m\in G \\ a_1'\leqslant m_1\leqslant b_1' \\ a_2'\leqslant m_2+vm_1\leqslant b_2'}} e\big(f(n+m)-f(n)\big)\Bigg|^{1/2},$$

wo

$$W = \frac{b_1-a_1}{r_1+1}\cdot\frac{b_2-a_2}{r_2}$$

gesetzt ist.

Beweis. Es sei

$$S = \sum_{n \in G} e\big(f(n)\big), \tag{1.1}$$

$$Q = \{x \in R^2\colon\ 0 \leqslant x_1 \leqslant r_1,\ 0 \leqslant x_2 + vx_1 \leqslant r_2\} \tag{1.2}$$

und

$$T = \sum_{n \in Q} 1. \tag{1.3}$$

Bezeichnet man für reelle x, y die Anzahl der im Intervall $[x, y]$ gelegenen ganzen Zahlen mit $A(x, y)$, so gilt offenbar stets

$$A(x, y) \geqslant [y] - [x] \geqslant y - x - 1.$$

Speziell folgt mit (1.2) und (1.3)

$$T \geqslant \sum_{0 \leqslant n \leqslant r_1} A(-vn, r_2 - vn) \geqslant ([r_1]+1)(r_2 - 1).$$

Wegen $r_1 > 0$ ist aber $[r_1]+1 \geqslant \max(r_1, 1) \geqslant (r_1+1)/2$, und aus $r_2 \geqslant 2$ folgt $r_2 - 1 \geqslant r_2/2$. Daher wird

$$T \geqslant (r_1+1)r_2/4 > 0. \tag{1.4}$$

Mit (1.1), (1.3) und (1.4) bekommt man

$$S = T^{-1} \sum_{m \in Q,\, n \in G} e\big(f(n)\big) = T^{-1} \sum_{\substack{m,n \\ m \in Q,\, n+m \in G}} e\big(f(n+m)\big),$$

und daraus folgt

$$S \ll T^{-1} \sum_{n \in R^2} |S(n)|, \tag{1.5}$$

wo

$$S(n) = \sum_{m \in Q,\, n+m \in G} e\big(f(n+m)\big) \tag{1.6}$$

gesetzt ist. Zu jedem $n \in R^2$ mit $S(n) \neq 0$ gibt es ein $m \in Q$ mit $n+m \in G$, wegen (2) und (1.2) ist also

$$0 \leqslant m_1 \leqslant r_1, \quad 0 \leqslant m_2 + vm_1 \leqslant r_2,$$

$$a_1 \leqslant n_1 + m_1 \leqslant b_1, \quad a_2 \leqslant n_2 + m_2 + v(n_1 + m_1) \leqslant b_2,$$

und daher erst recht

$$a_1 - r_1 \leqslant n_1 \leqslant b_1, \quad a_2 - r_2 \leqslant n_2 + vn_1 \leqslant b_2.$$

Daraus erhält man wegen (1) und (3)

$$\sum_{n \in R^2,\, S(n) \neq 0} 1 \ll (b_1 - a_1)(b_2 - a_2).$$

Schätzt man nun die rechte Seite von (1.5) weiter mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung ab, so findet man

$$S \ll T^{-1}\big((b_1 - a_1)(b_2 - a_2) S_1\big)^{1/2}, \tag{1.7}$$

wo

$$S_1 = \sum_{l \in R^2} |S(l)|^2$$

gesetzt ist. Mit der Abkürzung (1.6) folgt

$$|S(l)|^2 = \sum_{\substack{j,k \in Q \\ l+j,\, l+k \in G}} e\big(f(l+j) - f(l+k)\big)$$

und daher durch Summation über alle $l \in R^2$

$$S_1 = \sum_{\substack{m,n \\ n,\, n+m \in G}} \Big[\sum_{l \in R^2,\, n-l,\, n+m-l \in Q} 1\Big] e\big(f(n+m) - f(n)\big).$$

Die innere Summe ist offenbar gleich

$$\sum_{k \in Q,\, m+k \in Q} 1,$$

und daraus folgt unmittelbar die Identität

$$S_1 = \sum_{k \in Q} \sum_{\substack{m,n \\ n,\, n+m \in G,\, m+k \in Q}} e\big(f(n+m) - f(n)\big). \tag{1.8}$$

Für jedes $k \in Q$ läßt sich aber die Summationsbedingung $m+k \in Q$ in der Form

$$a_1' \leqslant m_1 \leqslant b_1', \quad a_2' \leqslant m_2 + vm_1 \leqslant b_2'$$

schreiben, wo

$$a_1' = -k_1, \quad b_1' = r_1 - k_1, \quad a_2' = -(k_2 + vk_1), \quad b_2' = r_2 - (k_2 + vk_1)$$

gesetzt ist. Insbesondere ist dann für $j = 1, 2$

$$-r_j \leqslant a_j' \leqslant b_j' \leqslant r_j.$$

Berücksichtigt man dies in (1.8), so folgt in Verbindung mit (1.3), (1.4) und (1.7) die Abschätzung (4).

Als Anwendung beweisen wir (vgl. [6], S. 13):

Satz 2. *Es sei*

$$1 \leqslant a \leqslant b \leqslant 2a, \quad 0 < r \leqslant a. \tag{5}$$

Im Intervall $[a, 3a]$ sei eine reelle Funktion $F(x)$ definiert. Dann gilt

$$\sum_{a<n\leqslant b} e\big(F(n)\big) \ll ar^{-1/2} + (ar)^{1/2} + (a/r)^{1/2} \max_{1 \leqslant y \leqslant r} \Big|\sum_{\substack{1<m\leqslant y \\ a<n\leqslant b}} e\big(F(n+m) - F(n)\big)\Big|^{1/2}. \tag{6}$$

Beweis. Im Falle $r<1$ ist (6) trivial. Im folgenden sei $r \geqslant 1$. Die Voraussetzungen von Satz 1 sind offenbar mit

$$a_1 = a\,,\quad b_1 = 2a\,,\quad a_2 = 0\,,\quad b_2 = 2\,,$$
$$G = \{x \in R^2\colon\ a < x_1 \leqslant b\,,\ x_2 = 0\}\,,$$
$$f(x) = F(x_1)\quad (x \in G)\,,$$
$$r_1 = r\,,\quad r_2 = 2$$

erfüllt. Aus (4) folgt also

$$\sum_{a<n\leqslant b} e\big(F(n)\big) \ll (a/r)^{1/2} \max_{-r\leqslant a'\leqslant b'\leqslant r} |S(a',b')|^{1/2} \tag{2.1}$$

mit

$$S(a',b') = \sum_{\substack{a'\leqslant m\leqslant b,\, a<n\leqslant b\\ a<n+m\leqslant b}} e\big(F(n+m)-F(n)\big)\,.$$

Substituiert man in dieser Summe $k = n+m$, $l = -m$, so folgt

$$S(a',b') = \overline{S(-b',-a')}\qquad \text{für alle reellen } a', b'\,.$$

Demnach gilt stets (vgl. (5))

$$S(a',b') \ll \big|S(0,|a'|)\big| + \big|S(0,|b'|)\big| + a\,.$$

Verbindet man dies mit der evidenten Ungleichung

$$S(0,y) \ll |S(2,y)| + a\qquad (y \geqslant 0)\,,$$

so erhält man für alle reellen a', b'

$$S(a',b') \ll \big|S(2,|a'|)\big| + \big|S(2,|b'|)\big| + a\,. \tag{2.2}$$

Andererseits gilt wegen $r \geqslant 1$ für $0 \leqslant y \leqslant r$

$$S(2,y) = \sum_{\substack{1<m\leqslant y\\ a<n\leqslant b}} e\big(F(n+m)-F(n)\big) + O(r^2)\,. \tag{2.3}$$

Mit (2.1), (2.2) und (2.3) ist (6) bewiesen.

Als Vorbereitung unseres van der Corputschen Schrittes beweisen wir:

Satz 3. *r, L und c seien positive Zahlen. K sei ein Gebiet der komplexen Zahlenebene. Die Funktion $f(w,z)$ sei in (K,r) holomorph, und $f_{zz}(w,z)$ möge den Ungleichungen*

$$|f_{zz}(w,0)| \geqslant L\quad \textit{in}\quad K \tag{7}$$

und

$$|f_{zz}(w,z)| \leqslant cL\quad \textit{in}\quad (K,r) \tag{8}$$

genügen.

Dann gelten die Ungleichungen

$$|f_z(w,z) - f_z(w,0)| \leqslant cL|z|\quad \textit{in}\quad (K,r) \tag{9}$$

und

$$|f_{zz}(w,z)| \geqslant L/2\quad \textit{in}\quad (K,c'r) \tag{10}$$

mit

$$c' = 1/2(c+1)\,. \tag{11}$$

Ferner existiert genau eine in $(K, c'Lr)$ holomorphe Funktion $F(w,z)$, die dort die nachstehenden Eigenschaften besitzt:

$$|F_z(w,z)| < 2c'r\,, \tag{12}$$

$$F(w,z) = \big(z + f_z(w,0)\big)F_z(w,z) - f\big(w, F_z(w,z)\big)\,, \tag{13}$$

$$f_z\big(w, F_z(w,z)\big) = f_z(w,0) + z\,, \tag{14}$$

$$F_{zz}(w,z) = \Big(f_{zz}\big(w, F_z(w,z)\big)\Big)^{-1}, \tag{15}$$

(16) *Ist $f(w,z)$ für alle reellen Paare $(w,z) \in (K,r)$ reell, so ist auch $F(w,z)$ für alle reellen Paare $(w,z) \in (K, c'Lr)$ reell.*

$F(w,z)$ soll im folgenden die *Bildfunktion* von $f(w,z)$ heißen.

Beweis. Bezeichnet man mit $W(z)$ den geradlinigen Verbindungsweg von 0 nach z, so gelten für die in (K,r) holomorphe Funktion

$$G(w,z) = f_z(w,z) - f_z(w,0) \tag{3.1}$$

die Identitäten

$$G(w,z) = \int_{W(z)} G_z(w,s)\,ds\quad \text{in}\quad (K,r) \tag{3.2}$$

und

$$G_z(w,z) - G_z(w,0) = \int_{W(z)} G_{zz}(w,s)\,ds\quad \text{in}\quad (K,r)\,. \tag{3.3}$$

Mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel erhält man aus (8), (11) und (3.1) für alle x mit $2c'r < x < r$

$$|G_{zz}(w,z)| \leqslant cL(x-2c'r)^{-1}\quad \text{in}\quad (K, 2c'r)\,.$$

Der Grenzübergang $x \to r$ ergibt also

$$|G_{zz}(w,z)| \leqslant cL(r-2c'r)^{-1} = (2c'r)^{-1}L\quad \text{in}\quad (K,2c'r)\,.$$

Setzt man dies in (3.3) ein, so wird

$$|G_z(w,z) - G_z(w,0)| \leqslant (2c'r)^{-1}L|z|\quad \text{in}\quad (K,2c'r)\,. \tag{3.4}$$

Hieraus folgt in Verbindung mit (3.2)

$$|G(w,z) - zG_z(w,0)| \leqslant (2c'r)^{-1}L\int_0^{|z|} t\,dt \leqslant 2^{-1}L|z|\quad \text{in}\quad (K,2c'r)\,. \tag{3.5}$$

Aus Stetigkeitsgründen gilt diese Ungleichung auch für $w \in K$, $|z| = 2c'r$. Insbesondere hat man wegen (7) und (3.1)

$$(3.6) \qquad |G(w, z)| \geqslant c'Lr \quad \text{für} \quad w \in K,\ |z| = 2c'r\,.$$

Daher stellt

$$(3.7) \qquad U(w, z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|s|=2c'r} \frac{sG_z(w, s)}{G(w, s) - z}\, ds$$

eine in $(K, c'Lr)$ holomorphe Funktion dar.

Für ein fest vorgegebenes Paar $(w, z) \in (K, c'Lr)$ genügt die in $|s| \leqslant 2c'r$ holomorphe Funktion $H(s) = G(w, s)$ der Ungleichung

$$|z| < |H(s)|$$

auf der Peripherie $|s| = 2c'r$. Nach dem Satz von Rouché haben also $H(s)$ und $H(s) - z$ gleichviele Nullstellen in $|s| < 2c'r$. $H(s)$ verschwindet wegen (7) und (3.1) an der Stelle $s = 0$ von erster Ordnung, für $0 < |s| < 2c'r$ ist aber wegen (3.5) $H(s) \neq 0$. Somit besitzt $H(s)$ genau eine z-Stelle in $|s| < 2c'r$. Damit ist gezeigt, daß zu jedem $(w, z) \in (K, c'Lr)$ genau eine komplexe Zahl $V(w, z)$ existiert, die den Bedingungen

$$(3.8) \qquad |V(w, z)| < 2c'r$$

und

$$(3.9) \qquad G\big(w, V(w, z)\big) = z$$

genügt. Daher folgt nach dem Residuensatz für die in (3.7) eingeführte Funktion

$$(3.10) \qquad U(w, z) = V(w, z) \quad \text{in} \quad (K, c'Lr)\,.$$

Auf Grund der Abkürzung (3.1) folgt nun (9) aus (8) und (3.2) und (10) aus (7) und (3.4). Ferner ist die Funktion

$$F(w, z) := \big(z + f_z(w, 0)\big)U(w, z) - f\big(w, U(w, z)\big)$$

wegen (3.7,) (3.8) und (3.10) in $(K, c'Lr)$ holomorph, und aus (3.9) folgt unmittelbar

$$F_z(w, z) = U(w, z) \quad \text{in} \quad (K, c'Lr)\,.$$

Verbindet man dies wieder mit (3.8) bis (3.10), so findet man gerade die Behauptungen (12) bis (14).

Differenziert man beide Seiten von (14) partiell nach z, so folgt sofort (15).

Ist $f(w, z)$ für alle reellen Paare (w, z) aus (K, r) reell, so ist notwendig wegen (10) die Funktion $f_z(w, x)$ für alle reellen w aus K in $-r < x < r$ streng monoton. Da aber die Lösung von (3.9) eindeutig bestimmt ist, muß wegen (14) und (3.1) $F_z(w, x)$, wegen (13) also auch $F(w, x)$ reell sein.

Außerdem erkennt man, daß die Funktion $F(w, z)$ durch die Eigenschaften (13) und (14) eindeutig bestimmt ist. Damit ist Satz 3 vollständig bewiesen.

Für die eindimensionale van der Corput-Methode ist die in Lemma 4.9. aus [7] (S. 65) ausgesprochene Transformation einer eindimensionalen Exponentialsumme in eine neue Summe grundlegend. Im folgenden Satz werden wir in analoger Weise die Abschätzung einer zweidimensionalen Exponentialsumme auf die Abschätzung neuer zweidimensionaler Exponentialsummen zurückführen.

Was dabei die Fehlerglieder betrifft, so stellt Satz 4 eine Verschärfung von Lemma 4.9. dar, die für unsere späteren Anwendungen notwendig ist.

SATZ 4. *α, β, r', r'', r, L, c und ε seien positive Zahlen; c und ε seien beliebig aber fest. Ferner sei*

$$(17) \qquad 1 \leqslant r' \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 2r'$$

und

$$(18) \qquad cr'' < c'r$$

mit

$$(19) \qquad c' := 1/2(c+1)\,.$$

Damit werde

$$(20) \qquad K = \{w\colon\ |w - \tfrac{3}{2}\cdot r'| < (\tfrac{1}{2} + \varepsilon)r'\}$$

gesetzt.

Die Funktion $f(w, z)$ sei in (K, r) holomorph und erfülle die Bedingungen

$$(21) \qquad |f_{zz}(w, 0)| \geqslant L \quad \text{in} \quad K$$

und

$$(22) \qquad |f_{zz}(w, z)| < cL \quad \text{in} \quad (K, r)\,.$$

(23) *Für reelle Paare $(w, z) \in (K, r)$ sei $f(w, z)$ reell und $f_{zz}(w, z) > 0$.*

In R sei eine reelle differenzierbare Funktion $B(x)$ definiert, die in $(\alpha, \beta]$ den Bedingungen

$$(24) \qquad |B(x)| \leqslant r''$$

und

$$(25) \qquad |B'(x)| \leqslant r''/\varepsilon r'$$

genügt.

Mit einer in R definierten reellen Funktion $p(x)$ werde

$$(26) \qquad S = \sum_{\substack{\alpha < m \leqslant \beta,\, n \in R \\ B(m) < n + p(m) \leqslant r''}} e\Big(f\big(m, n + p(m)\big)\Big)$$

gesetzt. (Diese Abkürzug ist sinnvoll, denn wegen (21) und (22) ist $c > 1$, und somit ist wegen (18) und (19) $r'' < r$.) *$F(w, z)$ sei die wegen* (21) *und* (22) *nach Satz* 3 *wohldefinierte Bildfunktion von* $f(w,z)$. *Damit werde*

$$F(w,z;y)=F(w,z)-yF_z(w,z)\quad \textit{für}\quad (w,z)\in(K,c'Lr) \tag{27}$$

und

$$S(A,y,Y)=\sum_{\substack{A<m\leqslant\beta,\,n\in R\\ f_z(m,B(m))<n+y\leqslant f_z(m,Y)}} e\big(F(m,n+y-f_z(m,0);y)-np(m)\big)\quad \textit{für}\quad A\geqslant\alpha,\ |Y|\leqslant r'' \tag{28}$$

gesetzt. (Diese Abkürzung ist wegen (9) und (18) sinnvoll.) *Dann gilt*

$$S\ll L^{-1/2}\sup_{\substack{A\geqslant\alpha\\ |y|\leqslant Lr''\\ |Y|\leqslant r''}}|S(A,y,Y)|+r'\big(L^{-1/2}+\log(Lr''+2)\big)\,. \tag{29}$$

Wenn für eine positive Zahl L' *und eine beliebige aber feste positive Zahl* C *die Ungleichungen*

$$4cLr''/\varepsilon r'\leqslant L'\leqslant|f_{wz}(x,0)|\leqslant CL'\quad \textit{für alle}\ x\in(\alpha,\beta] \tag{30}$$

erfüllt sind, so gilt außerdem

$$S\ll L^{-1/2}\sup_{\substack{A\geqslant\alpha\\ |y|\leqslant Lr''\\ |Y|\leqslant r''}}|S(A,y,Y)|+(L'r'+1)L^{-1/2}+ +(r'+L'^{-1})\log(L^{-1}+2)+r'\log(Lr''+2)\,, \tag{31}$$

und die Funktion $f_z(x,B(x))$ *ist dann im Intervall* $(\alpha,\beta]$ *monoton.*

Beweis. 1. Setzt man für $\alpha<x\leqslant\beta$ zur Abkürzung

$$h_0(x)=f_z(x,B(x))\,,\qquad h_1(x)=f_z(x,r'')\,, \tag{4.1}$$

so erhält man wegen (9) und (24)

$$|h_k(x)-f_z(x,0)|\leqslant cLr''\qquad(\alpha<x\leqslant\beta,\ k=0,1)\,. \tag{4.2}$$

Daher ist nach Satz 3 die Funktion

$$G_n(x,y):=e\big(F(x,n+y-f_z(x,0);y)-np(x)\big)\quad \text{für}\quad \alpha<x\leqslant\beta\,,\ h_0(x)\leqslant n+y\leqslant h_1(x) \tag{4.3}$$

wohldefiniert. Ferner ist wegen (16) und (23) durch

$$H(x,y):=F_z(x,y-f_z(x,0)) \tag{4.4}$$

eine für $\alpha<x\leqslant\beta$, $h_0(x)\leqslant y\leqslant h_1(x)$ reellwertige Funktion definiert, die dort wegen (14), (18) und (4.2) der Identität

$$f_z(x,H(x,y))=y \tag{4.5}$$

und wegen (24), (4.1) und (4.5) der Ungleichung

$$-r''\leqslant H(x,y)\leqslant r'' \tag{4.6}$$

genügt. Mit diesen Abkürzungen gilt nun die vorbereitende Abschätzung

$$S\ll\int_{L^{1/2}}^{\infty}\sup_{|y'|\leqslant y}|S(\alpha,y',r'')|y^{-2}dy+T+T'+r'\log(Lr''+2)\,, \tag{4.7}$$

wo

$$T=\int_{-L^{1/2}}^{L^{1/2}}\Big|\sum_{\substack{\alpha<m\leqslant\beta,\,n\in R\\ h_0(m)<n+y\leqslant h_1(m)}}\big(f_{zz}(m,H(m,n+y))\big)^{-1}G_n(m,y)\Big|dy \tag{4.8}$$

und

$$T'=\int_{\min(L^{1/2},1)}^{1}\max_{k=0,1}\Big[\sum_{\substack{\alpha<m\leqslant\beta,\,n\in R\\ |n-h_k(m)|\leqslant y}}1\Big]y^{-2}dy \tag{4.9}$$

gesetzt ist.

Zum Beweis von (4.7) sei ein beliebiges $m\in(\alpha,\beta]$ vorgegeben. Mit

$$a=B(m)-p(m)\,,\qquad b=r''-p(m)$$

folgt aus (24) $a\leqslant b$.

Wegen (23) und $r''<r$ ist durch

$$P(x)=f(m,x+p(m)) \tag{4.10}$$

eine in $[a,b]$ reelle, beliebig oft differenzierbare Funktion erklärt, die dort der Bedingung

$$P''(x)>0 \tag{4.11}$$

genügt. Insbesondere besitzt $-P(x)$ eine in $[a,b]$ monoton fallende Ableitung. Daher ist Lemma 4.7. aus [7] (S. 64) mit

$$f(x)=-P(x)\,,\qquad \eta=\tfrac{1}{2}$$

anwendbar, und man bekommt

$$S':=\sum_{a<n\leqslant b}e(-P(n)) = \sum_{-P'(b)-\frac12<n<-P'(a)+\frac12}\int_a^b e(-P(x)-nx)\,dx+O\big(\log(P'(b)-P'(a)+2)\big)\,. \tag{4.12}$$

Wir setzen in der letzten Summe $-n$ an Stelle von n und beachten die wegen (4.1) und (4.2) gültige Abschätzung

$$P'(b)-P'(a)=h_1(m)-h_0(m)\ll Lr''\,.$$

Dann wird

$$S'=\sum_{h'<n<h''}\int_a^b E_n(x)\,dx+O\big(\log(Lr''+2)\big)\,,$$

wo

$$h'=h_0(m)-\tfrac{1}{2}\,,\qquad h''=h_1(m)+\tfrac{1}{2} \tag{4.13}$$

und

$$E_n(x) = e\big(nx - P(x)\big) \quad \text{für} \quad a \leqslant x \leqslant b \tag{4.14}$$

gesetzt ist. Mit

$$\begin{aligned} Q &= [a, b], \qquad u = L^{1/2}, \\ Q_{k,n} &= \{x \in Q\colon\ (-1)^k\big(P'(x) - n\big) \geqslant u\}, \qquad (k = 0, 1), \\ Q_{2,n} &= \{x \in Q\colon\ |P'(x) - n| \leqslant u\} \end{aligned} \tag{4.15}$$

gilt offenbar

$$Q = \bigcup_{k=0}^{2} Q_{k,n}.$$

Mit (4.11) erkennt man andererseits, daß die Mengen $Q_{k,n}$ abgeschlossene Intervalle sind und $Q_{k,n}$ und $Q_{l,n}$ für $k \neq l$ höchstens einen Punkt gemeinsam haben. Setzt man also

$$S'_k = \sum_{h' < n < h''} \int_{Q_{k,n}} E_n(x)\,dx \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \tag{4.16}$$

so folgt für den in (4.12) definierten Ausdruck S' die Darstellung

$$S' = S'_0 + S'_1 + S'_2 + O\big(\log(Lr'' + 2)\big). \tag{4.17}$$

Für alle $x \in Q_{0,n} \cup Q_{1,n}$ gilt wegen (4.14)

$$E_n(x) = -\big(2\pi i\big(P'(x) - n\big)\big)^{-1} E'_n(x).$$

Speziell gilt mit passenden Konstanten C_0, C_1

$$E_n(x) = C_k E'_n(x) \int_{(-1)^k(P'(x)-n)}^{\infty} y^{-2}\,dy \quad \text{für} \quad x \in Q_{k,n},\ k = 0, 1. \tag{4.18}$$

Wegen (4.11) stellt

$$Q_{k,n}(y)\colon = \{x \in Q\colon\ u \leqslant (-1)^k\big(P'(x) - n\big) \leqslant y\} \tag{4.19}$$

ein abgeschlossenes Intervall dar. Daraus folgt auf Grund der gleichmäßigen Stetigkeit von $E'_n(x)$ in Q für $k = 0, 1$

$$\int_{Q_{k,n}} \Big[\int_{(-1)^k(P'(x)-n)}^{\infty} y^{-2}\,dy\Big] E'_n(x)\,dx = \int_u^{\infty} \Big[\int_{Q_{k,n}(y)} E'_n(x)\,dx\Big] y^{-2}\,dy. \tag{4.20}$$

Aus (4.16), (4.18) und (4.20) erhält man nun

$$S'_k = C_k \int_u^{\infty} S'_k(y)\, y^{-2}\,dy \quad \text{für} \quad k = 0, 1, \tag{4.21}$$

wo

$$S'_k(y) = \sum_{h' < n < h''} \int_{Q_{k,n}(y)} E'_n(x)\,dx \tag{4.22}$$

gesetzt ist. Im Hinblick auf (4.19) definieren wir allgemeiner

$$Q(y_0, y_1) = \{x \in Q\colon\ y_0 \leqslant P'(x) \leqslant y_1\}. \tag{4.23}$$

Man kann offenbar zu vorgegebenem $y \geqslant u$ und $k \in \{0, 1\}$ reelle Zahlen $q_{k,l}(y)$ $(l = 0, 1)$ finden, derart, daß die Beziehungen

$$-y \leqslant q_{k,0}(y) \leqslant q_{k,1}(y) \leqslant y \tag{4.24}$$

und

$$Q_{k,n}(y) = Q\big(n + q_{k,0}(y),\ n + q_{k,1}(y)\big) \tag{4.25}$$

erfüllt sind.

Wegen (4.1), (4.5) und (4.10) ist

$$P'\big(H(m, y) - p(m)\big) = y \quad \text{für} \quad h_0(m) \leqslant y \leqslant h_1(m). \tag{4.26}$$

Andererseits gilt wegen der strengen Monotonie von $P'(x)$

$$Q(y_0, y_1) = [H(m, y_0) - p(m),\ H(m, y_1) - p(m)] \quad \text{für} \quad h_0(m) \leqslant y_0 \leqslant y_1 \leqslant h_1(m).$$

Außerdem ist dann $H(m, y_0) \leqslant H(m, y_1)$. Man hat also

$$\int_{Q(y_0,y_1)} E'_n(x)\,dx = \sum_{l=0,1} (-1)^{l+1} E_n\big(H(m, y_l) - p(m)\big) \quad \text{für} \quad h_0(m) \leqslant y_0 \leqslant y_1 \leqslant h_1(m). \tag{4.27}$$

Mit der Abkürzung (4.14) findet man für $h_0(m) \leqslant y \leqslant h_1(m)$

$$E_n\big(H(m, y) - p(m)\big) = e\big(nH(m, y) - f\big(m, H(m, y)\big) - np(m)\big).$$

Wegen (13), (27), (4.4) und (4.5) ist aber

$$nH(m, y) - f\big(m, H(m, y)\big) = F\big(m, y - f_z(m, 0);\ y - n\big),$$

mit (4.3) folgt also

$$E_n\big(H(m, y) - p(m)\big) = G_n(m, y - n) \quad \text{für} \quad h_0(m) \leqslant y \leqslant h_1(m). \tag{4.28}$$

Da $P(x)$ nur reeller Werte fähig ist, folgt aus (4.14) $|E_n(x)| \leqslant 1$ für $a < x \leqslant b$; wegen (4.1) und (4.11) besteht das Intervall $Q(y_0, y_1)$ in den Fällen $y_1 \leqslant h_0(m)$ bzw. $y_0 \geqslant h_1(m)$ aus höchstens einem Punkt. Daher gilt

$$\int_{Q(y_0,y_1)} E'_n(x)\,dx = \begin{cases} O(1) & \text{für alle } y_0, y_1, \\ 0, & \text{falls } y_1 \leqslant h_0(m) \text{ bzw. } y_0 \geqslant h_1(m). \end{cases} \tag{4.29}$$

Mit (4.22), (4.24), (4.25), (4.27), (4.28), (4.29) und den Abkürzungen

$$S_{k,l,0}(y)\colon = \sum_{\substack{h' < n < h'' \\ h_0(m) < n + q_{k,0}(y) \\ n + q_{k,1}(y) \leqslant h_1(m)}} G_n\big(m, q_{k,l}(y)\big),$$

$$S_{k,l,1}(y)\colon = \sum_{\substack{h' < n < h'' \\ n + q_{k,0}(y) \leqslant h_l(m) \leqslant n + q_{k,1}(y)}} 1$$

ergibt sich nun

$$(4.30)\qquad S_k'(y) = \sum_{l=0,1}\Big[(-1)^{l+1}S_{k,l,0}(y) + O\big(S_{k,l,1}(y)\big)\Big] \quad \text{für} \quad y \geqslant u,\ k = 0, 1 .$$

Wegen (4.28) ist stets $\big|G_n(m, q_{k,l}(y))\big| = 1$ und daher

$$S_{k,l,0}(y) = \sum_{\substack{h'<n<h'' \\ h_0(m)<n+q_{k,l}(y)\leqslant h_1(m)}} G_n\big(m, q_{k,l}(y)\big) + O\big(S_{k,1-l,1}(y)\big) \quad \text{für} \quad y \geqslant u,\ k, l = 0, 1 ,$$

und aus (4.24) folgt

$$S_{k,l,1}(y) \ll \sum_{\substack{h'<n<h'' \\ |n-h_l(m)|\leqslant y}} 1 .$$

Setzt man dies in (4.30) ein und berücksichtigt dann (4.21) und (4.24), so findet man

$$(4.31)\qquad S_k' = C_k \sum_{l=0}^{1}(-1)^{l+1}\int_u^\infty \Big(\sum_{h_0(m)<n+q_{k,l}(y)\leqslant h_1(m)} G_n\big(m, q_{k,l}(y)\big)\Big) y^{-2}dy + \sum_{g=0}^{2} O(S_g'') \quad \text{für} \quad k = 0, 1$$

mit

$$S_0'' = \int_u^\infty \Big(\max_{k,l=0,1} \sum_{\substack{h_0(m)<n+q_{k,l}(y)\leqslant h_1(m) \\ n\notin (h', h'')}} 1\Big) y^{-2}dy ,$$

$$(4.32)\qquad S_1'' = \int_1^\infty \Big(\max_{l=0,1} \sum_{\substack{h'<n<h'' \\ |n-h_l(m)|\leqslant y}} 1\Big) y^{-2}dy ,$$

$$S_2'' = \int_{\min(u,1)}^{1} \Big(\sum_{l=0}^{1} \sum_{|n-h_l(m)|\leqslant y} 1\Big) y^{-2}dy .$$

Da der Integrand von S_0'' wegen (4.13) und (4.24) für $u \leqslant y < \frac{1}{2}$ verschwindet, folgt unter Beachtung von (4.2)

$$(4.33)\qquad S_g'' \ll \int_{1/2}^{h''-h'} y\cdot y^{-2}dy + \int_{h''-h'}^{\infty} (h''-h')y^{-2}dy \ll \log(Lr''+2) \quad \text{für} \quad g = 0, 1 .$$

Wegen (23), (4.1), (4.5), (4.10), (4.28) und der Definition von $Q_{2,n}$ (vgl. (4.15)) findet man mit Hilfe der Substitution $y = P'(x)-n$

$$\int_{Q_{2,n}} E_n(x)\,dx = \int_{[-u,u]\cap[h_0(m)-n,\, h_1(m)-n]} \big(f_{zz}(m, H(m, n+y))\big)^{-1} G_n(m, y)\,dy .$$

Setzt man dies in (4.16) für $k = 2$ ein, so wird wegen $L = u^2$ und (21)

$$(4.34)\qquad S_2' = \int_{-u}^{u}\Big(\sum_{h_0(m)<n+y\leqslant h_1(m)} \big(f_{zz}(m, H(m, n+y))\big)^{-1} G_n(m, y)\Big)dy + O(S_3')$$

mit

$$S_3' = u^{-1} \sum_{\substack{h_0(m)-u<n\leqslant h_1(m)+u \\ n\notin (h', h'')}} 1 .$$

Die Unterscheidung der Fälle $u \leqslant \frac{1}{2}$ bzw. $u > \frac{1}{2}$ liefert wegen (4.13)

$$(4.35)\qquad S_3' \ll 1 .$$

Wir fassen nun die Beziehungen (4.17) und (4.31) bis (4.35) zusammen und tragen darin wieder die Abkürzungen aus (4.10) und (4.12) ein. Durch Summation über alle $m \in (\alpha, \beta]$ erhält man dann eine Darstellung für den konjugiert komplexen Wert der in (26) definierten Summe S; die Terme auf der rechten Seite lassen sich dabei wegen (17), (28), (4.3) und (4.15) sofort durch die Terme auf der rechten Seite von (4.7) abschätzen. Damit ist (4.7) bewiesen.

2. Mit den Abkürzungen

$$(4.36)\qquad V = \max_{\alpha<m\leqslant\beta}\big(h_1(m)-h_0(m)\big) ,$$

$$(4.37)\qquad J(y') = \sup_{\substack{l=0,1 \\ y''\in R}} \sum_{\substack{\alpha<m\leqslant\beta,\, n\in R \\ |n+y''-h_l(m)|\leqslant y'}} 1$$

folgt wegen (23), (28) und (4.1)

$$(4.38)\qquad S(A, y, Y) \ll J(V) \quad \text{für} \quad A \geqslant \alpha,\ |Y| \leqslant r'' .$$

Ferner findet man mit (4.9)

$$(4.39)\qquad T' \ll \int_{\min(L^{1/2},1)}^{1} J(y)y^{-2}dy .$$

Aus (4.38) folgt unmittelbar

$$(4.40)\qquad \int_{L^{1/2}}^{\infty} \sup_{|y'|\leqslant y} |S(\alpha, y', r'')|y^{-2}dy \ll L^{-1/2} \sup_{|y|\leqslant Lr''} |S(\alpha, y, r'')| + \min\big(L^{-1/2}, (Lr'')^{-1}\big)J(V) .$$

Wir wollen nun mit Hilfe einer einfachen Abschätzung die störenden Faktoren $\big(f_{zz}(m, H(m, n+y))\big)^{-1}$ aus der Summe in (4.8) entfernen. Dazu benutzen wir die Holomorphie von $f(w, z)$ in (K, r) und die Ungleichung (10). Daraus folgt nämlich die Holomorphie der Funktion $\big(f_{zz}(w, z)\big)^{-1}$ in $(K, c'r)$ und die Abschätzung

$$\big(f_{zz}(w, z)\big)^{-1} \ll L^{-1} \quad \text{für alle } (w, z) \in (K, c'r) .$$

Wegen (20) gilt also eine Potenzreihenentwicklung der Gestalt

$$\big(f_{zz}(w,z)\big)^{-1} = \sum_{l,k=0}^{\infty} a_{l,k}(w-x_0)^l z^k \quad \text{mit} \quad x_0 = \tfrac{3}{2}r' \text{ in } (K, c'r),$$

und dabei genügen die Koeffizienten $a_{l,k}$ auf Grund der zweifachen Cauchyschen Abschätzungsformel den Ungleichungen

$$(4.41) \qquad a_{l,k} \ll L^{-1}\big((\tfrac{1}{2}+\varepsilon)r'\big)^{-l}(c'r)^{-k}.$$

Wegen (18), (19), (4.6) und $c>1$ erhalten wir speziell für jedes (m, n, y) mit $a < m \leqslant \beta$, $h_0(m) < n+y \leqslant h_1(m)$ eine absolut konvergente Reihenentwicklung von $\big(f_{zz}(m, H(m, n+y))\big)^{-1}$. Diese Entwicklungen tragen wir in (4.8) ein und schätzen dann trivial ab. Dann ergibt sich

$$(4.42) \qquad T \ll L^{1/2} \sup_{|y|\leqslant L^{1/2}} \sum_{l,k=0}^{\infty} |a_{l,k} T_{l,k}(y)|$$

mit

$$(4.43) \qquad T_{l,k}(y) = \sum_{\substack{a<m\leqslant\beta,\, n\in R\\ h_0(m)<n+y\leqslant h_1(m)}} (m-x_0)^l H^k(m, n+y)\, G_n(m, y).$$

Aus (17) und (4.6) folgen die für $a < m \leqslant \beta$, $h_0(m) < y \leqslant h_1(m)$, $l \geqslant 0$, $k \geqslant 0$ gültigen Identitäten

$$(m-x_0)^l = \int_{-r'/2}^{m-x_0} l t^{l-1} dt + (-r'/2)^l$$

und

$$H^k(m, y) = r''^k - \int_{H(m,y)}^{r''} k t^{k-1} dt.$$

Setzt man dies in (4.43) ein und vertauscht Summation und Integration, so folgt

$$T_{l,k}(y) \ll (r'/2)^l r''^k \sup_{\substack{A\geqslant a\\ |Y|\leqslant r''}} \Big| \sum_{\substack{A<m\leqslant\beta,\, n\in R\\ h_0(m)<n+y\leqslant h_1(m)\\ H(m,n+y)\leqslant Y}} G_n(m, y)\Big|.$$

Wegen (23), (4.1), (4.3) und (4.5) ist die letzte Summe für $A \geqslant a$, $|Y| \leqslant r''$ und alle y gerade mit der in (28) definierten Summe $S(A, y, Y)$ identisch. In Verbindung mit (18) und (4.41) ergibt sich nun

$$a_{l,k} T_{l,k}(y) \ll L^{-1}(1+2\varepsilon)^{-l} c^{-k} \sup_{\substack{A\geqslant a\\ |Y|\leqslant r''}} |S(A, y, Y)|.$$

Wir tragen diese Abschätzungen in (4.42) ein und beachten, daß $\varepsilon > 0$ und $c > 1$ ist. Da ε und c in bezug auf unsere Abschätzungen fest sind, erhält man dann

$$(4.44) \qquad T \ll L^{-1/2} \sup_{\substack{A\geqslant a\\ |y|\leqslant L^{1/2}\\ |Y|\leqslant r''}} |S(A, y, Y)|.$$

Insbesondere gilt wegen (4.38)

$$(4.45) \qquad T \ll L^{-1/2} J(V).$$

Verwendet man (4.44) im Falle $L^{1/2} \leqslant Lr''$ und (4.45) im Falle $L^{1/2} > Lr''$, so findet man

$$(4.46) \qquad T \ll L^{-1/2} \sup_{\substack{A\geqslant a\\ |y|\leqslant Lr''\\ |Y|\leqslant r''}} |S(A, y, Y)| + \min\big(L^{-1/2}, (Lr'')^{-1}\big) J(V).$$

Aus (4.7), (4.39), (4.40) und (4.46) folgt nun

$$(4.47) \qquad S \ll L^{-1/2} \sup_{\substack{A\geqslant a\\ |y|\leqslant Lr''\\ |Y|\leqslant r''}} |S(A, y, Y)| + M + M' + r'\log(Lr''+2),$$

wo

$$(4.48) \qquad M = \int_{\min(L^{1/2},1)}^{1} J(y) y^{-2} dy$$

und

$$(4.49) \qquad M' = \min\big(L^{-1/2}, (Lr'')^{-1}\big) J(V)$$

gesetzt ist.

Wegen (17) und (4.37) gilt stets die triviale Abschätzung

$$J(y) \ll r'(y+1).$$

Daraus folgt sofort

$$(4.50) \qquad M \ll r' L^{-1/2}.$$

Andererseits ist wegen (4.2) und (4.36)

$$(4.51) \qquad V \ll Lr'',$$

also $J(V) \ll r'(Lr''+1)$ und daher

$$(4.52) \qquad M' \ll r'(1+L^{-1/2}).$$

Mit (4.47), (4.50) und (4.52) ist die Abschätzung (29) bewiesen.

3. L' und C seien reelle Zahlen, die der Bedingung (30) genügen. In bezug auf die folgenden Abschätzungen sei C fest gewählt. Wegen (17), (18), (24), (4.1), $c>1$ und der Holomorphie der Funktion $f(w, z)$ in (K, r) gilt

$$h_l'(x) = \big(f_{wz} + (1-l)B'(x) f_{zz}\big)\big(x, (1-l)B(x) + lr''\big) \quad \text{für} \quad a < x \leqslant \beta,\ l = 0, 1.$$

Mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel folgt aber aus (9), (17) und (20)

$$|f_{wz}(x, y) - f_{wz}(x, 0)| \leqslant cLr''/\varepsilon r' \quad \text{für} \quad a < x \leqslant \beta,\ |y| \leqslant r''.$$

Auf Grund der Voraussetzungen (22), (24), (25) und (30) gilt also

$$(4.53) \qquad L'/2 \leqslant |h_l'(x)| \leqslant (C+\tfrac{1}{2})L' \quad \text{für} \quad a < x \leqslant \beta,\ l = 0, 1.$$

Wendet man den Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf die Funktion $h_l(x)$ an und benutzt dann die zweite Ungleichung in (4.53), so folgt unter Beachtung von (17) für den in (4.37) definierten Ausdruck:

$$J(y) \ll (L'r'+y+1) \sup_{\substack{l=0,1\\ Y\in R}} \sum_{\substack{a<m\leqslant\beta\\ |h_l(m)-Y|\leqslant y}} 1 \qquad (y \geqslant 0).$$

In analoger Weise erkennt man mit Hilfe der ersten Ungleichung in (4.53), daß die Menge

$$\{x \in (a, \beta]: |h_l(x)-Y| \leqslant y\} \quad \text{für} \quad l = 0, 1,\ y \geqslant 0,\ Y \in R$$

ein Intervall darstellt, dessen Länge $\ll L'^{-1}y$ ist. Man findet also

$$J(y) \ll (L'r'+y+1)(L'^{-1}y+1) \quad \text{für} \quad y \geqslant 0.$$

Setzt man dies in (4.48) ein, so wird

$$(4.54) \qquad M \ll (L'r'+1)\bigl(L'^{-1}\log(L^{-1}+2)+L^{-1/2}\bigr).$$

Andererseits folgt aus (30) $Lr'' \ll L'r'$. Wegen (4.51) ist also

$$J(V) \ll (L'r'+1)(L'^{-1}Lr''+1).$$

Wir tragen dies in (4.49) ein und erhalten dann

$$(4.55) \qquad M' \ll (L'r'+1)(L'^{-1}+L^{-1/2}).$$

Aus (4.47), (4.54) und (4.55) folgt nun sofort die Abschätzung (31). Aus (4.1) und (4.53) folgt schließlich die Monotonie der Funktion $f_z(x, B(x))$ in $(a, \beta]$. Damit ist Satz 4 vollständig bewiesen.

Mit Theorem 5.9. aus [7] (S. 90) erhält man

Satz 5. *Es sei $b \geqslant a+1$ und $L > 0$; c sei eine beliebige aber feste positive Zahl. $f(x)$ sei eine in $[a, b]$ zweimal stetig differenzierbare reelle Funktion, die der Bedingung*

$$(32) \qquad L \leqslant |f''(x)| \leqslant cL \quad \textit{für} \quad a < x \leqslant b$$

genügt.

Dann gilt

$$\sum_{a<n\leqslant b} e\bigl(f(n)\bigr) \ll (b-a)L^{1/2}+L^{-1/2}.$$

In den beiden folgenden Hilfssätzen stellen wir einige Polynomabschätzungen zusammen.

Satz 6. *Es sei ein Polynom*

$$P(u) = \sum_{m=0}^{g} a_m u^m \quad \textit{aus} \quad R[u] \ \textit{mit}\ a_g \neq 0$$

gegeben, dessen Grad g eine beliebige aber feste Zahl $\geqslant 2$ ist. Die Diskriminante von $P(u)$ sei von Null verschieden und werde mit D bezeichnet. $z_1, \ldots, z_g$ mögen die Nullstellen von $P(u)$ bezeichnen. Für alle $x \in R^2$ werde

$$(33) \qquad P(x) = \sum_{m=0}^{g} a_m x_1^{g-m} x_2^m$$

und

$$(34) \qquad |x| = \max(|x_1|, |x_2|)$$

gesetzt.

Dann gilt für alle (l, x) mit $0 \leqslant l \leqslant g-2$, $x \in R^2$, $x_1P(x) \neq 0$

$$(35) \qquad |x|^l|P(x)|^{-1} \ll |D|^{-1/2} \sum_{\substack{0\leqslant m\leqslant g\\ 1\leqslant j\leqslant g}} |a_m|^{g-2}|x_1|^{l-g+1}|x_2-z_jx_1|^{-1}.$$

Für alle $x \in R^2$ mit $P(x) \neq 0$ gilt

$$(36) \qquad |x|^{g-1}|P(x)|^{-1} \ll |D|^{-1/2} \sum_{\substack{0\leqslant m\leqslant g\\ 1\leqslant j\leqslant g}} |a_m|^{g-1}|a_g|^{-1}|x_2-z_jx_1|^{-1}.$$

Beweis. 1. Es sei $0 \leqslant l < g$, $x \in R^2$ und $x_1P(x) \neq 0$. Mit $z := x_2/x_1$ gilt dann wegen (33) $P(x) = x_1^g P(z)$ und daher wegen (34)

$$|x|^l|P(x)|^{-1} \leqslant |x_1|^{l-g+1}(1+|z|^l)|x_1P(z)|^{-1}.$$

Wegen $D \neq 0$ und $x_1(z-z_j) = x_2-z_jx_1$ $(j = 1, \ldots, g)$ gilt andererseits die Partialbruchzerlegung

$$z^n\bigl(x_1P(z)\bigr)^{-1} = \sum_{1\leqslant j\leqslant g} z_j^n\bigl(P'(z_j)(x_2-z_jx_1)\bigr)^{-1} \quad \text{für} \quad 0 \leqslant n < g.$$

Insgesamt erhält man also

$$(6.1) \qquad |x|^l|P(x)|^{-1} \leqslant \sum_{j=1}^{g} (1+|z_j|^l)|P'(z_j)|^{-1}|x_1|^{l-g+1}|x_2-z_jx_1|^{-1}.$$

Ferner folgt aus

$$D = a_g^{2(g-1)} \prod_{1\leqslant l<m\leqslant g} (z_m-z_l)^2$$

und

$$P'(z_j) = a_g \prod_{\substack{1\leqslant l\leqslant g\\ l\neq j}} (z_j-z_l) \qquad (j = 1, \ldots, g)$$

die Identität

$$(6.2) \qquad |D|^{1/2}|P'(z_j)|^{-1} = \Bigl|a_g^{g-2} \prod_{\substack{1\leqslant l<m\leqslant g\\ l,m\neq j}} (z_m-z_l)\Bigr| \qquad (j = 1, \ldots, g).$$

Nun sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit

(6.3) $$|z_{m-1}| \leqslant |z_m| \quad \text{für} \quad m = 2, \ldots, g.$$

Dann erhält man

$$\prod_{\substack{1 \leqslant l < m \leqslant g \\ l,m \neq j}} (z_m - z_l) \ll \Big[\prod_{1 \leqslant m < j} |z_m|^{m-1}\Big] \prod_{j < m \leqslant g} |z_m|^{m-2}.$$

Setzt man dies in (6.2) ein, so ergibt sich wegen $D \neq 0$

(6.4) $$(1+|z_j|^l)|P'(z_j)|^{-1} \ll |D|_j^{-1/2} |a_g|^{g-2} \prod_{m=1}^{g} |z_m|^{y_{j,m}} \qquad (j = 1, \ldots, g)$$

mit passenden $y_{j,m}$, die den Ungleichungen

$$0 \leqslant y_{j,m} \leqslant \begin{cases} m-1 & \text{für} \quad m = 1, \ldots, j-1, \\ l & \text{für} \quad m = j, \\ m-2 & \text{für} \quad m = j+1, \ldots, g \end{cases}$$

genügen. Daraus folgt wegen $l < g$

(6.5) $$0 \leqslant y_{j,m} \leqslant \max(l, g-2) \quad \text{für} \quad j, m = 1, \ldots, g.$$

2. Es seien reelle Zahlen $y_1, \ldots, y_g$ und y mit

(6.6) $$0 \leqslant y_m \leqslant y \leqslant g \qquad (m = 1, \ldots, g)$$

vorgegeben. Wir wollen zeigen, daß dann die Abschätzung

(6.7) $$\prod_{m=1}^{g} |z_m|^{y_m} \ll \sum_{m=0}^{g} |a_m/a_g|^y$$

gilt.

Da (6.7) im Falle $|z_g| \leqslant 1$ trivial ist, können wir uns zum Beweis auf denn Fall

(6.8) $$|z_g| > 1$$

beschränken. Setzt man

(6.9) $$c = 2^{-g-1},$$

so ist wegen (6.8) die Menge aller $m \in [1, g]$ mit $|z_n| > c^{g-n}$ für $m \leqslant n \leqslant g$ nicht leer, sie enthält also ein kleinstes Element, das wir mit j bezeichnen wollen. Wegen (6.3) und $c < 1$ folgt nun

(6.10) $$|z_m| > c^{g-m} \quad \text{für} \quad m = j, \ldots, g$$

und

(6.11) $$|z_m| \leqslant c^{g-j+1} \quad \text{für} \quad m = 1, \ldots, j-1.$$

Daraus gewinnt man wegen (6.6) die Abschätzung

$$\prod_{m=1}^{g} |z_m|^{y_m} \leqslant \prod_{m=j}^{g} c^{(g-m)y_m} (|z_m|/c^{g-m})^{y_m} \leqslant \prod_{m=j}^{g} (c^{m-g}|z_m|)^y.$$

Da g und y beliebig aber fest vorgegeben sind, gilt insbesondere wegen (6.9)

(6.12) $$\prod_{m=1}^{g} |z_m|^{y_m} \ll \prod_{m=j}^{g} |z_m|^{y}.$$

Andererseits gilt mit der Abkürzung

(6.13) $$h = g - j + 1$$

die Identität

$$a_{j-1}/a_g = (-1)^h \sum_{1 \leqslant n_1 < \ldots < n_h \leqslant g} \prod_{k=1}^{h} z_{n_k},$$

und daraus folgt wegen (6.10)

(6.14) $$|a_{j-1}/a_g| \geqslant \Big[\prod_{m=j}^{g} |z_m|\Big]\Big[1 - \sum_{\substack{n \in [1,g]^h \\ 1 \leqslant n_1 < \ldots < n_h \leqslant g \\ n \neq (j, \ldots, g)}} W_n\Big],$$

wo

$$W_n = \Big|\prod_{k=1}^{h} z_{n_k}\Big| \Big|\prod_{m=j}^{g} z_m^{-1}\Big|$$

gesetzt ist. Wenn nun n der letzten Summationsbedingung genügt, so existiert offenbar wegen (6.13) ein $l \in [1, h]$ mit

$$n_l < j \quad \text{und} \quad n_k \geqslant j \quad \text{für} \quad k = l+1, \ldots, h.$$

Dies hat aber wegen $c < 1$, (6.10) und (6.11) die Ungleichung

$$W_n = \Big|\prod_{k=1}^{l} z_{n_k}\Big| \Big|\prod_{\substack{m=j \\ m \neq n_k \\ (l < k \leqslant h)}}^{g} z_m^{-1}\Big| < c^{(g-j+1)l-(g-j)l} = c^l \leqslant c$$

zur Folge.

In Verbindung mit (6.14) ergibt sich somit

(6.15) $$|a_{j-1}/a_g| \geqslant (1 - 2^g c) \prod_{m=j}^{g} |z_m|.$$

Wegen (6.9) ist $1 - 2^g c = \frac{1}{2}$, und daher folgt aus (6.12) und (6.15) die Abschätzung (6.7).

3. Aus (6.1), (6.4), (6.5) und (6.7) ergibt sich nun für alle (l, x), die den Bedingungen

$$0 \leqslant l < g, \quad x \in R^2 \quad \text{und} \quad x_1 P(x) \neq 0$$

genügen, die Abschätzung

$$|x|^l |P(x)|^{-1} \ll |D|^{-1/2} \sum_{\substack{0 < m \leqslant g \\ 1 \leqslant j \leqslant g}} T_{l,m} |x_1|^{l-g+1} |x_2 - z_j x_1|^{-1}$$

mit
$$T_{l,m} = |a_m/a_g|^{\max(l,g-2)}|a_g|^{g-2}.$$
Hiermit sind die Behauptungen (35) und (36) unter der Einschränkung $x_1 \neq 0$ bewiesen.

Wir müssen noch zeigen, daß (36) auch im Falle $x_1 = 0$ gilt. Dazu sei ein beliebiges $X \in R^2$ mit $X_1 = 0$, $P(X) \neq 0$ gewählt. Wegen der Stetigkeit der homogenen Form $P(x)$ existiert dann ein $c > 0$ mit
$$P\big(X+(q,0)\big) \neq 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqslant q \leqslant c.$$
Nach dem bisher Bewiesenen gilt also für jedes $q \in (0, c]$ die Abschätzung (36) mit $x = X+(q,0)$, und dabei hängt die $\ll$-Konstante nur von g ab. Wir dürfen also auf beiden Seiten den Grenzübergang $q \to 0$ durchführen. Wegen (34) ergibt sich dann (36) für den Fall $x = X$. Damit ist Satz 6 vollständig bewiesen.

Satz 7. *Es sei ein beliebiges aber festes Polynom $P(u) \in R[u]$ vom Grad $g \geqslant 1$ gegeben, dessen Nullstellen $z_1, \ldots, z_g$ höchstens die Vielfachheit q besitzen.*

Unter Verwendung der Abkürzungen (33) *und* (34) *gilt dann für alle $x \in R^2$ mit $P(x) \neq 0$*

$$|x|^{g-q}|P(x)|^{-1} \ll \sum_{j=1}^{g} |x_2 - z_j x_1|^{-q}. \tag{37}$$

Beweis. Im Falle $x_1 = 0$ ist (37) trivial. Daher sei jetzt
$$x \in R^2 \quad \text{und} \quad x_1 P(x) \neq 0.$$
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir uns die Nullstellen $z_1, \ldots, z_g$ so numeriert denken, daß für ein natürliches $k \leqslant g$ die Zahlen $z_1, \ldots, z_k$ alle untereinander verschiedenen Nullstellen von $P(u)$ darstellen. Wegen $g \geqslant 1$ gilt dann mit passenden nichtnegativen ganzen-Zahlen l_j $(j = 1, \ldots, k)$ und passenden, nur von $P(u)$ und $\operatorname{sgn}(x_2/x_1)$ abhängigen Zahlen $A_{j,l}$ $(j = 1, \ldots, k;\ l = 0, \ldots, l_j)$ die Partialbruchzerlegung

$$\big(1+\big(\operatorname{sgn}(x_2/x_1)\big)^g u^g\big)P^{-1}(u) = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant k\\ 0\leqslant l\leqslant l_j}} A_{j,l}(u-z_j)^{-l}. \tag{7.1}$$

Nach Voraussetzung ist aber $l_j \leqslant q$ für $j = 1, \ldots, k$. Wegen
$$0 < |x_1| \leqslant |x|, \quad 0 < |x_2 - z_j x_1| \ll |x| \quad (j = 1, \ldots, k)$$
gilt also
$$|x_2/x_1 - z_j|^{-l} \leqslant |x|^l |x_2 - z_j x_1|^{-l} \ll |x|^q |x_2 - z_j x_1|^{-q}$$
für $j = 1, \ldots, k$; $l = 0, \ldots, l_j$. In Verbindung mit (7.1) erhält man nun
$$(1+|x_2/x_1|^g)|P(x_2/x_1)|^{-1} \ll |x|^q \sum_{1\leqslant j\leqslant k} |x_2 - z_j x_1|^{-q}.$$
Unter Beachtung von (33) und (34) folgt daraus sofort (37).

Wir schätzen nun drei spezielle Summen ab.

Satz 8. *Es sei $0 \leqslant q \leqslant 1$ und $W \geqslant 1$; w und z seien beliebige komplexe Zahlen.*

Dann gilt

$$\sum_{\substack{|n-z|\geqslant 1\\ |n-w|\leqslant W}} |n-z|^{-q} \ll M W^{1-q}, \tag{38}$$

wo

$$M = \begin{cases} (1-q)^{-1} & \textit{im Falle} \quad q < 1, \\ \log(W+1) & \textit{im Falle} \quad q = 1 \end{cases} \tag{39}$$

gesetzt ist.

Beweis. Mit den Abkürzungen
$$S = \sum_{1\leqslant|n-z|\leqslant W} |n-z|^{-q}, \qquad S' = \sum_{|n-w|\leqslant W} 1$$
gilt offenbar

$$\sum_{\substack{|n-z|\geqslant 1\\ |n-w|\leqslant W}} |n-z|^{-q} \ll S + W^{-q}S'. \tag{8.1}$$

Wegen $W \geqslant 1$ existiert ein $k \geqslant 0$ mit $2^k \leqslant W < 2^{k+1}$. Damit wird
$$S \ll \sum_{0\leqslant l\leqslant k} 2^{-lq} \sum_{2^l\leqslant|n-z|\leqslant 2^{l+1}} 1 \ll \sum_{l=0}^{k} 2^{(1-q)l}.$$
Daraus folgt aber
$$S \ll \begin{cases} (2^{1-q}-1)^{-1}2^{(1-q)k}, & \text{falls} \quad q < 1, \\ k+1, & \text{falls} \quad q = 1. \end{cases}$$
Wegen $q \leqslant 1$ ist $2^{1-q}-1 \geqslant (1-q)\log 2$, und wegen $2^k \leqslant W$ ist $k+1 \ll \log(W+1)$. Mit der Abkürzung (39) folgt also $S \ll MW^{1-q}$. Wegen $W \geqslant 1$ ist andererseits $S' \ll W$, also erst recht $S' \ll MW$. Wegen (8.1) ist damit die Abschätzung (38) bewiesen.

Satz 9. *Es sei $v > 0$, und damit werde für alle $x \in R^2$*

$$x' = (2vx_1, x_2 + vx_1) \tag{40}$$

gesetzt.

Dann gilt für alle (W, w, Z, z) mit $W \geqslant 1$, $Z \geqslant 1$, $w \neq z$

$$\sum_{\substack{n\in R^2\\ |n_2'-wn_1'|\leqslant W\\ |n_2'-zn_1'|\leqslant Z}} 1 \ll (v|w-z|)^{-1}WZ + W + Z. \tag{41}$$

Ferner gilt für alle (q, W, w, Z, z) mit $0 \leqslant q \leqslant \frac{1}{2}$, $W \geqslant 1$, $Z \geqslant 0$, $w \neq z$

$$\sum_{\substack{n\in R^2\\ |n_2'-zn_1'|>1\\ |n_2'-wn_1'|\leqslant W\\ 0<|n_1'|\leqslant Z}} |n_2'-zn_1'|^{-q} \ll v^{-1}|w-z|^{-q}WZ^{1-q}. \tag{42}$$

Beweis. 1. Die linke und die rechte Seite von (41) und die Voraussetzung $W \geqslant 1$, $Z \geqslant 1$, $w \neq z$ bleiben ungeändert, wenn man das Paar (W, w) mit dem Paar (Z, z) vertauscht.

Daher genügt es, (41) unter der Voraussetzung

$$1 \leqslant Z \leqslant W, \qquad w \neq z$$

zu beweisen.

Aus der letzten Bedingung folgt aber für jedes $n \in R^2$ mit

$$|n_2' - wn_1'| \leqslant W, \qquad |n_2' - zn_1'| \leqslant Z$$

die Beziehung

$$|(w-z)n_1'| = |n_2' - zn_1' - (n_2' - wn_1')| \leqslant W + Z \leqslant 2W,$$

also wegen (40)

$$|n_1| \leqslant W/v|w-z| \quad \text{und} \quad |n_2 + (1-2z)vn_1| \leqslant Z.$$

Demnach ist die Summe in (41) $\ll \big((v|w-z|)^{-1}W+1\big)Z$. Damit ist aber (41) bewiesen.

2. Es sei $0 \leqslant q \leqslant \frac{1}{2}$, $W \geqslant 1$, $Z \geqslant 0$ und $w \neq z$. Zur Abkürzung werde

$$R_0 = (1, \infty), \qquad R_1 = [0, 1]$$

und

$$S_j = \sum_{\substack{n \in R^2 \\ |n_2' - zn_1'| > 1 \\ |n_2' - wn_1'| \in R_j \cap [0, W] \\ 0 < |n_1'| \leqslant Z}} |n_2' - zn_1'|^{-q} \qquad (j = 0, 1)$$

gesetzt. Da aus

$$n \in R^2, \quad |n_2' - zn_1'| > 1, \quad 1 < |n_2' - wn_1'| \leqslant W, \quad n_1' \neq 0$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned} |n_2' - zn_1'|^{-q} &\leqslant W^q |n_2' - zn_1'|^{-q} |n_2' - wn_1'|^{-q} \\ &\leqslant |W^{-1}(w-z)vn_1|^{-q} (|n_2' - zn_1'|^{-q} + |n_2' - wn_1'|^{-q}) \end{aligned}$$

golgt, gilt (vgl. (40))

$$S_0 \ll |W^{-1}v(w-z)|^{-q} S(Z/2v, 0, 0) \sup_{w', z'} S(W, w', z')$$

mit

$$S(x, w', z') = \sum_{\substack{|n-z'| \geqslant 1 \\ |n-w'| \leqslant x}} |n-z'|^{-q}.$$

Wegen $q \leqslant \frac{1}{2}$ gilt nach Satz 8

$$S(x, w', z') \ll x^{1-q} \qquad \text{für alle } x \geqslant 1.$$

Da $S(x, 0, 0)$ für $0 \leqslant x < 1$ verschwindet, folgt speziell

(9.1) $$S(x, 0, 0) \ll x^{1-q} \qquad \text{für alle } x \geqslant 0.$$

Insgesamt ergibt sich also

(9.2) $$S_0 \ll |W^{-1}v(w-z)|^{-q}(Z/v)^{1-q}W^{1-q} = v^{-1}|w-z|^{-q}WZ^{1-q}.$$

Aus $n \in R^2$, $|n_2' - zn_1'| > 1$, $|n_2' - wn_1'| \leqslant 1$ folgt andererseits wegen (40)

$$|(w-z)vn_1| \leqslant |n_2' - zn_1'|,$$

und das liefert wegen (9.1)

$$S_1 \ll |w-z|^{-q}v^{-q}S(Z/2v, 0, 0) \ll v^{-1}|w-z|^{-q}Z^{1-q},$$

also wegen $W \geqslant 1$ erst recht

(9.3) $$S_1 \ll v^{-1}|w-z|^{-q}WZ^{1-q}.$$

Da die Summe in (42) gleich $S_0 + S_1$ ist, haben wir mit (9.2) und (9.3) die Abschätzung (42) bewiesen.

§ 2. Beweis des Hauptsatzes.

1. Im folgenden sind alle O- und $\ll$-Konstanten absolut. $c_1, c_2, \ldots$ bezeichnen passende absolute positive Konstanten.

Es sei nun ein beliebiges $t \geqslant 3$ vorgegeben. Auf Grund der approximativen Funktionalgleichung der Zetafunktion (vgl. [7], S. 78, (4.17.1) und S. 79) gilt dann

$$\zeta(\tfrac{1}{2}+it) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant t'^{1/2}} n^{-1/2-it} + \chi(\tfrac{1}{2}+it) \sum_{1 \leqslant n \leqslant t'^{1/2}} n^{-1/2+it} + O(t^{-1/4})$$

mit

(43) $$t' = t/2\pi$$

und

$$|\chi(\tfrac{1}{2}+it)| = 1.$$

Man hat also

(44) $$\zeta(\tfrac{1}{2}+it) \ll \Big|\sum_{1 < n \leqslant t'^{1/2}} n^{-1/2+it}\Big| + 1.$$

Da die Funktion $x^{-1/2}$ für $x > 0$ streng monoton fällt, findet man durch partielle Summation

(45) $$\sum_{a < n \leqslant b} n^{-1/2+it} \ll a^{-1/2} \max_{a < b' \leqslant b} |S(a, b')| \qquad \text{für} \quad 1 \leqslant a \leqslant b$$

mit

(46) $$S(a, b) = \sum_{a < n \leqslant b} n^{it}.$$

Zerlegt man nun die Summe in (44) mit Hilfe der Identität

(47) $$(1, x] = \bigcup_{\substack{k \geqslant 0 \\ 2^k \leqslant x}} \big(2^k, \min(2^{k+1}, x)\big] \qquad (x > 0)$$

in $O(\log t)$ Teilsummen und verwendet zur Abschätzung dieser Teilsummen (45), so ergibt sich

(48) $$\zeta(\tfrac{1}{2}+it) \ll \sup_{\substack{1\leqslant a<b\leqslant 2a\\ b\leqslant t'^{1/2}}} a^{-1/2}|S(a,b)|\log t+1 .$$

2. Es sei

(49) $$1\leqslant a\leqslant b\leqslant 2a ,$$

(50) $$b\leqslant t'^{1/2}$$

und

(51) $$0<r_0\leqslant a .$$

Insbesondere ist dann (5) mit $r=r_0$ erfüllt.

Ferner genügt die reelle Funktion $F(x)=t'\log x$ $(x>0)$ den Identitäten

$$e\big(F(n)\big)=n^{it} \qquad (n>0)$$

und

$$F(n+m)-F(n)=t'\log(1+m/n) \qquad (m,n>0) .$$

Nach Satz 2 folgt also (vgl. (46))

(52) $$S(a,b)\ll ar_0^{-1/2}+(ar_0)^{1/2}+(a/r_0)^{1/2}\max_{1\leqslant x\leqslant r_0}|S_1(1,x)|^{1/2},$$

wo

(53) $$S_1(a',b')=\sum_{\substack{a'<m\leqslant b'\\ a<n\leqslant b}} e\big(f_1(m,n)\big) \qquad (a',b'>0)$$

und

$$f_1(x,y)=t'\log(1+x/y) \qquad (x,y>0)$$

gesetzt ist.

Nun gilt offenbar für $a',b'>0$, $2\leqslant\beta\leqslant a/2$

$$S_1(a',b')=[\beta]^{-1}\sum_{0<l\leqslant\beta}S_1(a',b')=[\beta]^{-1}\sum_{\substack{0<l\leqslant\beta\\ a'<m\leqslant b',\, n\in R\\ a<n+l\leqslant b}} e\big(f_1(m,n+l)\big)$$

$$\ll \beta^{-1}\sum_{a/2<n\leqslant b}\max_{0\leqslant\beta'<\beta''\leqslant\beta}|S_2(a',b',\beta',\beta'',n)|$$

mit

(54) $$S_2(a',b',\beta',\beta'',N)=\sum_{\substack{a'<m\leqslant b'\\ \beta'<l\leqslant\beta''}} e\big(f_1(m,N+l)\big) \qquad (a',b',\beta',\beta'',N>0) .$$

Wir schätzen jetzt die äußere, über $(a/2,b]$ erstreckte Summe trivial ab und zerlegen außerdem die inneren Summen $S_2(a',b',\beta',\beta'',N)$ mit Hilfe der Identität

$$(\beta',\beta'']=(\beta',\beta]-(\beta'',\beta] \qquad (0\leqslant\beta'<\beta''\leqslant\beta) .$$

Wegen (49) wird dann

(55) $$S_1(a',b')\ll a\beta^{-1}\sup_{\substack{0\leqslant\beta'<\beta\\ a/2<N\leqslant b}}|S_2(a',b',\beta',\beta,N)|$$

für $a',b'>0$, $2\leqslant\beta\leqslant a/2$.

3. Es sei

(56) $$2\leqslant r'\leqslant a'\leqslant b'\leqslant 2r' ,$$

(57) $$r'\leqslant(a^3/t)^{1/2}\log^{-1}t$$

und

(58) $$a/2<N\leqslant 2a .$$

Außerdem seien reelle Zahlen β' und β mit

(59) $$0\leqslant\beta'<\beta$$

und

(60) $$r'<\beta\leqslant c_1 a \qquad (c_1<\tfrac{1}{2})$$

gegeben. Die Konstante c_1 wird später noch genauer bestimmt. Unter diesen Voraussetzungen wollen wir Satz 4 zur Abschätzung von

(61) $$S_2{:}\ = S_2(a',b',\beta',\beta,N)$$

verwenden.

Dazu betrachten wir zunächst die in $|w|<N/2$, $|z|<N/2$ holomorphe Funktion

(62) $$f_2(w,z)=t'\log\big(1+(N+z)^{-1}w\big) ,$$

wo unter $\log s$ der Hauptzweig der Logarithmusfunktion verstanden wird. Auf Grund der Beziehungen (58), (60) und

(63) $$\log(1+s)=\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}l^{-1}s^l \qquad (|s|<1)$$

ist bei genügend kleinem c_1 die folgende Aussage richtig: Es sei

$$K'=\{w\colon\ |w-\tfrac{3}{2}r'|<r'\} .$$

Dann ist $f_2(w,z)$ in $(K',N/2)$ holomorph, und man kann Konstanten c_2, c_3 mit

(64) $$c_2<1<c_3$$

finden, so daß mit den Abkürzungen

(65) $$v=t'/N^2$$

und

(66) $$L_1=c_2vr'/N$$

die Beziehungen

(67) $$|f_{2zz}(w, 0)| \geqslant L_1 \quad \text{in} \quad K',$$

(68) $$|f_{2zz}(w, z)| < c_3 L_1 \quad \text{in} \quad (K', N/2),$$

(69) $$f_2(w, z) \in R, \quad f_{2zz}(w, z) > 0 \quad \text{in} \quad R^2 \cap (K', N/2),$$

(70) $$f_{2z}(w, z) = -vw(1+z/N)^{-2} + O(v|w|^2/N) \quad \text{in} \quad (K', N/2)$$

und

(71) $$f_2(w, 0) = vNw + O(vr'^2) \quad \text{in} \quad K'$$

gelten.

Zur Anwendung von Satz 4 setzen wir nun

$$a = a', \quad \beta = b', \quad r'' = \beta, \quad r = N/2, \quad L = L_1, \quad c = c_3, \quad \varepsilon = \tfrac{1}{2}.$$

Diese Zahlen sind nach Voraussetzung positiv. (17) ist wegen (56) und (18) ist wegen (58) und (60) bei genügend kleinem c_1 erfüllt. In (20) ist $K = K'$ zu setzen.

Die Funktion $f(w, z) = f_2(w, z)$ ist dann in (K, r) holomorph und genügt wegen (67) und (68) den Bedingungen (21) und (22). (23) ist wegen (69) erfüllt.

Die Funktion $B(x) = \beta'$ $(x \in R)$ genügt wegen (59) den Bedingungen (24) und (25). Wegen (54) dürfen wir in (26) $S = S_2$ setzen (vgl. (61)).

$F_2(w, z)$ bezeichne die in $(K, c'Lr)$ holomorphe Bildfunktion von $f_2(w, z)$, und es werde (vgl. Satz 3)

$$F_2(w, z, y) := F_2(w, z) - yF_{2z}(w, z) \quad \text{für} \quad (w, z) \in (K, c'Lr)$$

gesetzt. Die Summe in (28) ist dann durch

$$S_3(A, y, Y) = \sum_{\substack{A < m \leqslant b',\, n \in R \\ f_{2z}(m, \beta') < n+y \leqslant f_{2z}(m, Y)}} e\big(F_2(m, n+y-f_{2z}(m, 0); y)\big) \qquad (A \geqslant a',\ |Y| \leqslant \beta)$$

zu ersetzen.

Mit diesen Spezialisierungen gilt nach Satz 4 die Abschätzung (29). Der dort auftretende Term $\log(Lr''+2)$ ist wegen (58), (60), (65), (66) und $t \geqslant 3$ in unserem Falle $\ll \log t$. Außerdem verschwindet wegen (69) $S_3(A, y, Y)$ für $Y \leqslant \beta'$. Man erhält also

(72) $$S_2 \ll L_1^{-1/2} \sup_{\substack{A \geqslant a' \\ |y| \leqslant L_1\beta \\ \beta' < Y \leqslant \beta}} |S_3(A, y, Y)| + r'(L_1^{-1/2} + \log t).$$

Wegen (vgl. (19))

(73) $$c'Lr = V := c_4 vr', \quad c_4 = c_2/4(c_3+1)$$

und

$$c'r = c_5 N, \quad c_5 = 1/4(c_3+1)$$

ist $F_2(w, z)$ in (K', V) holomorph und genügt dort wegen (12) bis (14) den Beziehungen

(74) $$|F_{2z}(w, z)| \leqslant 2c_5 N,$$

(75) $$F_2(w, 0) = -f_2(w, 0)$$

und

(76) $$f_{2z}\big(w, F_{2z}(w, z)\big) = f_{2z}(w, 0) + z.$$

Wegen (16) und (69) gilt

(77) $$F_2(w, z) \in R \quad \text{in} \quad R^2 \cap (K', V).$$

Da wegen (64)

(78) $$c_4 < c_5 < \tfrac{1}{8}$$

ist, hat man

(79) $$|z/vw| \leqslant 2V/vr' < \tfrac{1}{4} \quad \text{für alle } (w, z) \in (K', V).$$

Mit (70), (74) und (76) findet man jetzt für alle $(w, s) \in (K', V)$

$$-vw\big(1 + F_{2z}(w, s)/N\big)^{-2} + O(v|w|^2/N) = -vw + O(v|w|^2/N) + s,$$

nach Division durch vw hat man also

(80) $$\big(1 + F_{2z}(w, s)/N\big)^{-2} = 1 - s/vw + O(r'/N).$$

Bei hinreichend kleinem c_1 ist wegen (60) der absolute Betrag des letzten O-Terms $\leqslant \frac{1}{2}$. Daher läßt sich (80) in der folgenden Weise nach $F_{2z}(w, s)/N$ auflösen: Bezeichnet man für jedes y den Hauptzweig der Funktion z^y mit $h_y(z)$, so gilt für alle $(w, s) \in (K', V)$

$$F_{2z}(w, s)/N = h_{-1/2}(1 - s/vw) - 1 + O(r'/N).$$

Durch Integration in bezug auf s folgt nun wegen (71), (75) und (79) die Darstellung

(81) $$F_2(w, z) = -vNw - N\Big(2vw\big(h_{1/2}(1 - z/vw) - 1\big) + z\Big) + O(vr'^2) \quad \text{in} \quad (K', V).$$

Wir benötigen im folgenden die in K' holomorphe Funktion

$$d(w) = f_{2z}(w, 0) + vw.$$

Bei hinreichend klein gewähltem c_1 ist wegen (70) in K'

(82) $$|d(w)| \leqslant c_6 vr' \cdot r'/N < V/2.$$

Insbesondere ist für jedes y die Funktion

(83) $$F_3(w, z; y) := F_2\big(w, z - d(w); y\big) \quad \text{in} \quad (K', V/2)$$

holomorph. Aus (74) und (82) folgt unmittelbar für jedes y

(84) $$F_3(w, z; y) = F_2(w, z) + O(vr'^2 + |y|N) \quad \text{in} \quad (K', V/2).$$

Wegen

$$h_{1/2}(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{l} (z-1)^l \qquad (|z-1| < 1)$$

folgt mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel aus (79), (81) und (84) die absolut konvergente Entwicklung

$$(85) \qquad F_3(w+w', z+z'; y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} F_{m,n}(w, z; y) w'^m z'^n$$

$$\text{für alle } (w, z) \in (K'', V/4),\ |w'| \leqslant r'/4,\ |z'| \leqslant V/4,$$

wobei

$$K'' = \{w\colon |w - \tfrac{3}{2} r'| < \tfrac{3}{4} r'\}$$

und

$$(86) \qquad F_{m,n}(w, z; y) = -vN \binom{1}{m}\binom{0}{n} w^{1-m} + N \sum_{l=2}^{\infty} C_{l,m,n} v^{1-l} w^{1-l-m} z^{l-n} + \\ + O\big((vr'^2 + |y|N)(r'/4)^{-m}(V/4)^{-n}\big)$$

mit

$$(87) \qquad C_{l,m,n} = 2(-1)^{l-1} \binom{\frac{1}{2}}{l} \binom{1-l}{m} \binom{l}{n}$$

gesetzt wurde.

Gleichzeitig erkennt man, daß die Funktionen $F_{m,n}(w, z; y)$ in $(K'', V/4)$ holomorph sind.

Wir wollen jetzt noch die nichtlinearen Summationsbedingungen in der Definition von $S_3(A, y, Y)$ (vgl. S. 32) durch lineare ersetzen: Mit

$$d_1(x)\colon = 1 - (1 + x/N)^{-2} \qquad (x > 0)$$

folgt aus (56) und (70)

$$f_{2z}(m, x) + vm = vmd_1(x) + O(vr'^2/N) \qquad \text{für} \qquad a' < m \leqslant b',\ 0 \leqslant x \leqslant \beta.$$

Auf Grund des Mittelwertsatzes folgt aber aus (58) und (60) bei genügend kleinem c_1

$$(88) \qquad 0 < d_1(x) \leqslant 2\beta/N < c_4/16 \qquad \text{für} \qquad 0 \leqslant x \leqslant \beta$$

und daher wegen (56) und (73)

$$(89) \qquad 0 < vmd_1(x) \leqslant 4vr'\beta/N < V/8 \qquad \text{für} \qquad a' < m \leqslant b',\ 0 \leqslant x \leqslant \beta.$$

Wegen (83) ist also die Summe

$$(90) \qquad S_4(A, y, Y)\colon = \sum_{\substack{A < m \leqslant b' \\ vmd_1(\beta') < n + y + vm \leqslant vmd_1(Y)}} e\big(F_3(m, n + y + vm; y)\big)$$

für $A \geqslant a'$, $y \in R$, $0 \leqslant Y \leqslant \beta$ sinnvoll definiert, und wegen $r' \geqslant 1$ folgt

$$S_3(A, y, Y) \ll |S_4(A, y, Y)| + r'(vr'^2/N + 1).$$

Wegen (43), (57), (58), (65) und (66) ist aber

$$vr'^2/N \ll 1 \ll \log t \ll (r'L_1)^{-1/2} \ll L_1^{-1/2}.$$

In Verbindung mit (72) erhalten wir somit die gewünschte Abschätzung

$$(91) \qquad S_2 \ll L_1^{-1/2} \sup_{\substack{A \geqslant a' \\ |y| \leqslant L_1\beta \\ \beta' < Y \leqslant \beta}} |S_4(A, y, Y)| + r'L_1^{-1/2}.$$

4. Es sei

$$(92) \qquad A \geqslant a', \qquad |y| \leqslant L_1\beta \qquad \text{und} \qquad \beta' < Y \leqslant \beta.$$

T_1, T_2, T_3 seien reelle Zahlen, die den Ungleichungen

$$(93) \qquad 2 \leqslant T_l \leqslant 2^{-4} v'r'\beta/a \qquad (l = 1, 2, 3)$$

mit

$$(94) \qquad v' = t/a^2$$

genügen. Wegen (43), (58) und (65) ist

$$(95) \qquad 2^{-5} v' \leqslant v \leqslant v'$$

und daher

$$(96) \qquad T_l \leqslant 4vr'\beta/N \qquad (l = 1, 2, 3).$$

Wegen $\beta/a \leqslant \frac{1}{2}$ (vgl. (60)) gilt außerdem

$$(97) \qquad T_l \leqslant 2vr' \qquad (l = 1, 2, 3).$$

Wir wollen nun die Summe $S_4(A, y, Y)$ durch eine dreifache Iteration von Satz 1 weiter abschätzen.

Dazu setzen wir in Satz 1

$$a_1 = r', \qquad b_1 = 2r', \qquad a_2 = -y, \qquad b_2 = 4vr'\beta/N - y$$

und für ein beliebiges $l \in \{1, 2, 3\}$

$$r_1 = T_l/2v, \qquad r_2 = T_l.$$

Dann ist (1) wegen $r' \geqslant 2$ und $T_l \geqslant 2$ (vgl. (56) und (93)) erfüllt. Wegen (93) und (96) ist (3), und wegen (56), (89), und (92) ist (2) für jede Teilmenge G von

$$(98) \qquad G'\colon = \{x \in R^2\colon A < x_1 \leqslant b',\ vx_1 d_1(\beta') < x_2 + y + vx_1 \leqslant vx_1 d_1(Y)\}$$

erfüllt.

Nach Satz 1 gilt nun für jedes $G \subset G'$ und jede auf G reelle Funktion $f(x)$ die Abschätzung (4).

Für den Summationsbuchstaben m, der auf der rechten Seite von (4) auftritt, hat man auf Grund unserer Spezialisierung die Bedingung

$$(99) \qquad \max(2vm_1, m_2 + vm_1) \leqslant T_l.$$

Wir setzen daher im Hinblick auf (34) und (40) für alle $x \in R^2$

(100) $$x' = (2vx_1, x_2 + vx_1)$$

und

(101) $$|x| = \max(|x_1|, |x_2|).$$

Dann ist (99) mit der Ungleichung

$$|m'| \leqslant T_l$$

äquivalent.

Setzt man nun noch

(102) $$T_l' = \max(T_l/2v, 1)$$

und

(103) $$W_l = vr'^2\beta(NT_l'T_l)^{-1},$$

so folgt aus (4)

(104) $$\sum_{n \in G} e(f(n)) \ll W_l^{1/2}\Big[\sum_{\substack{m \in R^2 \\ |m'| \leqslant T_l}} \Big|\sum_{n \in G \cap (G-m)} e\big(f(n+m) - f(n)\big)\Big|\Big]^{1/2}$$

für jede Menge $G \subset G'$, jede auf G reelle Funktion $f(x)$ und $l = 1, 2, 3$. Der dreifachen Iteration dieser Abschätzung schicken wir die folgenden Abkürzungen voraus:

Es sei $k \geqslant 2$ und $X \in (R^2)^k$. Dann bezeichnen $X_1, \ldots, X_k$ diejenigen wohlbestimmten Elemente aus R^2, für die $X = (X_1, \ldots, X_k)$ ist. Wegen $k \geqslant 2$ ist hierbei eine Verwechslung mit der analogen, auf Seite 359 eingeführten Bezeichnung nicht möglich. Nach Seite 359 bezeichnen speziell X_{l1} und X_{l2} die reellen Komponenten von X_l.

Jedem $g \in [0, 1]^k$ ordnen wir das Element

$$gX: = g_1X_1 + \ldots + g_kX_k \in R^2$$

zu. Insbesondere ist dann

$$(gX)_j = g_1X_{1j} + \ldots + g_kX_{kj} \quad \text{für} \quad j = 1, 2.$$

Außerdem wird unter Verwendung von (100) und (101)

$$X' = (X_1', \ldots, X_k')$$

und

$$|X| = \prod_{l=1}^{k} |X_l|$$

gesetzt.

Durch

(105) $$f_3(x): = F_3(x_1, x_2 + y + vx_1; y) \quad (x \in G')$$

ist wegen (77), (83), (89) und (98) eine auf G' reellwertige Funktion definiert. Daher dürfen wir in (104)

$$G = G', \quad f(x) = f_3(x) \quad \text{und} \quad l = 1$$

eintragen. Wegen (90) ergibt sich dann

(106) $$S_4(A, y, Y) \ll W_1^{1/2}\Big[\sum_{\substack{m \in R^2 \\ |m'| \leqslant T_1}} |S_5(m)|\Big]^{1/2}.$$

Dabei wird allgemein für $k \in \{1, 2, 3\}$, $X \in (R^2)^k$

(107) $$S_5(X_1, \ldots, X_k) = S_5(X): = \sum_{n \in G_X} e\big(f_X(n)\big),$$

(108) $$G_X: = \bigcap_{g \in [0,1]^k} (G' - gX)$$

und

(109) $$f_X(x): = \sum_{g \in [0,1]^k} (-1)^{s(g)+k} f_3(x + gX) \quad (x \in G_X)$$

mit

(110) $$s(g): = g_1 + \ldots + g_k \quad \text{für} \quad g \in R^k$$

gesetzt.

Für $k \in \{1, 2\}$, $X \in (R^2)^k$ darf man somit in (104)

$$G = G_X, \quad f(x) = f_X(x) \quad \text{und} \quad l = k+1$$

eintragen. Dann ergibt sich offenbar

(111) $$S_5(X) \ll W_{k+1}^{1/2}\Big[\sum_{\substack{m \in R^2 \\ |m'| \leqslant T_{k+1}}} |S_5(X_1, \ldots, X_k, m)|\Big]^{1/2}$$

$$\text{für} \quad k \in \{1, 2\}, \ X \in (R^2)^k.$$

5. Zur weiteren Abschätzung der Summen $S_5(X)$ $(X \in (R^2)^k)$ betrachten wir die Ausdrücke

(112) $$S_{k,l}(X): = \sum_{g \in [0,1]^3} (-1)^{s(g)+1} (gX)_1^k (gX)_2^l \quad (k, l \geqslant 0, \ X \in (R^2)^3).$$

Wendet man auf $(gX)_1^k$ und $(gX)_2^l$ den Polynomialsatz an, so folgt

$$S_{k,l}(X) = \sum_{\substack{m,n \in [0,\infty)^3 \\ s(m)=k,\, s(n)=l}} \frac{k!}{m_1!m_2!m_3!} \cdot \frac{l!}{n_1!n_2!n_3!} E(m+n) \prod_{j=1}^{3} X_{j1}^{m_j} X_{j2}^{n_j},$$

wo

$$E(u) = \sum_{g \in [0,1]^3} (-1)^{s(g)+1} \prod_{j=1}^{3} g_j^{u_j} \quad \text{für} \quad u \in [0, \infty)^3$$

gesetzt ist. Nun ist aber offensichtlich

$$E(u) = \prod_{j=1}^{3}\Big[\sum_{g=0}^{1} (-1)^{g+1} g^{u_j}\Big] = \begin{cases} 1, & \text{falls } \min(u_1, u_2, u_3) > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das liefert speziell

$$S_{k,l}(X) = 0 \quad \text{für} \quad k+l<3, \tag{113}$$

$$S_{k,l}(X) = k!\,l! \sum_{\substack{n\in[0,1]^3\\ s(n)=l}} \prod_{j=1}^{3} X_{j1}^{1-n_j} X_{j2}^{n_j} \quad \text{für} \quad k+l=3, \tag{114}$$

und mit Hilfe des Polynomialsatzes erhält man für $k+l\geqslant 3$

$$S_{k,l}(X) \ll \sum_{\substack{n\in[1,\infty)^3\\ s(n)=k+l}} 3^{k+l} \prod_{j=1}^{3} |X|^{n_j} \ll |X|\Big(3\sum_{j=1}^{3}|X_j|\Big)^{k+l-3}. \tag{115}$$

6. Nun sei ein beliebiges $X\in(R^2)^3$ mit

$$|X'_l| \leqslant T_l \quad \text{für} \quad l=1,2,3 \tag{116}$$

gewählt.

Bei hinreichend kleinem c_1 ist wegen (58), (60), (73) und (96) speziell

$$\sum_{l=1}^{3} |X'_l| \leqslant 12vr'\beta/N < V/24, \tag{117}$$

also wegen (78), (99) und (100) erst recht

$$\sum_{l=1}^{3} |X_{l1}| < r'/4.$$

In Verbindung mit (85), (112) und den Abkürzungen auf Seite 388 erkennt man nun, daß die Funktion

$$f_4(w,z):=\sum_{g\in[0,1]^3} (-1)^{s(g)+1} F_3\big(w+(gX)_1, z+(gX')_2; y\big) \tag{118}$$

in $(K'', V/4)$ holomorph ist und dort die absolut und gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$f_4(w,z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} F_{m,n}(w,z;y)(2v)^{-m} S_{m,n}(X') \tag{119}$$

besitzt. Aus (109) und (118) folgt die Identität

$$f_X(x) = f_4(x_1, x_2+y+vx_1) \quad \text{für alle } x\in G_X. \tag{120}$$

Andererseits existieren wegen (98) und (108) reelle Zahlen

$$a'', b''\in[r', 2r'], \quad u'\geqslant 0, \quad u''\geqslant 0, \tag{121}$$

so daß mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} B_0(x)&:=vd_1(\beta')x+u' \\ B_1(x)&:=vd_1(Y)x-u'' \end{aligned} \quad (x\in R) \tag{122}$$

die Identität

$$G_X = \{x\in R^2:\ a''<x_1\leqslant b'',\ B_0(x_1)<x_2+vx_1+y\leqslant B_1(x_1)\} \tag{123}$$

gilt.

Da im Falle $G_X=\emptyset$ die Summe $S_5(X)=0$ ist (vgl. (107)), können wir im folgenden

$$G_X \neq \emptyset \tag{124}$$

voraussetzen. Dann können wir uns aber wegen der Linearität der Funktionen $B_0(x)$ und $B_1(x)$ die Zahlen a'' und b'' so gewählt denken, daß in $(a'', b'']$ durchweg $B_0(x)<B_1(x)$ ist. Daraus folgt wegen (89) und (92)

$$0\leqslant B_0(x)<B_1(x)\leqslant 4vr'\beta/N \quad \text{für} \quad a''<x\leqslant b''. \tag{125}$$

Mit (107), (108), (123) und (125) bekommen wir nun

$$S_5(X) = S_6 - S_7, \tag{126}$$

wo

$$S_{6+j} = \sum_{\substack{a''<m\leqslant b'',\, n\in R\\ B_j(m)<n+p(m)\leqslant 4vr'\beta/N}} e\big(f_4(m, n+p(m))\big) \quad (j=0,1) \tag{127}$$

und

$$p(x) = vx+y \quad (x\in R) \tag{128}$$

gesetzt ist.

Wir wollen nun die Funktion $f_4(w,z)$ genauer untersuchen Wegen (113) können wir die Summation in (119) durch die Bedingung $m+n\geqslant 3$ einschränken. Im Falle $m+n\geqslant 3$ verschwinden in (86) die Koeffizienten

$$\binom{1}{m}\binom{0}{n} \quad \text{und} \quad C_{l,m,n} \quad \text{für} \quad l\leqslant \max(1,n).$$

Wegen (60), (66) und (92) ist

$$vr'^2+|y|N\leqslant vr'\beta,$$

und wegen (73) und (78) ist

$$(2v)^{-m}(r'/4)^{-m} \ll (V/4)^{-m}.$$

Insgesamt hat man also

$$\begin{aligned}(2v)^{-m}F_{m,n}(w,z;y) \\ = N\sum_{l=n}^{\infty} 2^{-m} C_{l,m,n}(vw)^{1-l-m}z^{l-n} + O\big(vr'\beta(V/4)^{-m-n}\big)\end{aligned} \tag{129}$$

für $m,n\geqslant 0$, $m+n\geqslant 3$ und $(w,z)\in(K'', V/4)$.

Mit den elementaren Ungleichungen

$$0\leqslant\binom{g}{k}\leqslant 2^g, \quad \left|\binom{-g}{k}\right|\leqslant 2^{g+k} \quad (g,k\geqslant 0) \quad \text{und} \quad \left|\binom{\frac{1}{2}}{l}\right|\leqslant 1 \quad (l\geqslant 0)$$

bekommt man

$$(130)\qquad |C_{l,m,n}| \leqslant 4^l 2^m \qquad (l,\ m,\ n \geqslant 0,\ m+n \geqslant 3)\,.$$

In Verbindung mit (79) folgt also für alle $(w, z) \in (K'', V/4)$

$$C_{l,m,n}(vw)^{1-l-m}z^{l-n} = C_{l,m,n}(z/vw)^{l-n}(vw)^{1-m-n}$$
$$\ll 4^l 2^m (16)^{n-l} 2^{m+n} (vr')^{1-m-n}\,.$$

Setzt man dies in (129) ein, so kommt wegen $\beta \ll N$, (73) und (78) $(2v)^{-m}F_{m,n}(w, z; y) \ll (V/4)N^{1-m-n}N$ für $m, n \geqslant 0$, $m+n \geqslant 3$, $(w, z) \in (K'', V/4)$. Wegen (115) und (117) ist für $m, n \geqslant 0$, $m+n \geqslant 3$

$$S_{m,n}(X') \ll |X'|(36vr'\beta/N)^{m+n-3} \ll |X'|(V/8)^{m+n-3}\,.$$

Insgesamt hat man somit für alle $(w, z) \in (K'', V/4)$

$$\sum_{\substack{m,n\geqslant 0\\ m+n>3}} (2v)^{-m}F_{m,n}(w, z; y)S_{m,n}(X') \ll V^{-3}N|X'|vr'\beta/N \ll (vr')^{-2}\beta|X'|\,.$$

Andererseits folgt aus (114), (115) und (129)

$$\sum_{\substack{m,n\geqslant 0\\ m+n=3}} (2v)^{-m}F_{m,n}(w, z; y)S_{m,n}(X')$$
$$= N \sum_{\substack{l\geqslant n\\ m,n\geqslant 0\\ m+n=3}} 2^{-m}C_{l,m,n}S_{m,n}(X')(vw)^{1-l-m}z^{l-n} + O\big((vr')^{-2}\beta|X'|\big)$$

für alle $(w, z) \in (K'', V/4)$.

Ersetzt man in der letzten Summe den Summationsbuchstaben l durch $l+n$, so erhält man in Verbindung mit (119) die Darstellung

$$(131)\qquad f_4(w, z) = N\sum_{l=0}^{\infty} U_l(X)(vw)^{-2-l}z^l + O\big((vr')^{-2}\beta|X'|\big) \quad \text{in}\quad (K'', V/4)\,,$$

wo

$$(132)\qquad U_l(X) = \sum_{\substack{m,n\geqslant 0\\ m+n=3}} 2^{-m}C_{l+n,m,n}S_{m,n}(X') \qquad (l \geqslant 0)$$

gesetzt ist.

Wegen (115) und (130) gilt offenbar

$$(133)\qquad U_l(X) \ll 4^l|X'| \qquad (l \geqslant 0)\,.$$

Die Reihe in (131) konvergiert also in $(K'', V/4)$ gleichmäßig. Daher stellt der O-Term auf der rechten Seite von (131) eine in $(K'', V/4)$ holomorphe Funktion dar.

Somit erhält man mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel die Abschätzungen

$$f_{4zz}(w, z) = 2NU_2(X)(vw)^{-4} + O\big(N|X'|(vr')^{-5}|z|\big) + O\big(\beta|X'|(vr')^{-4}\big) \quad \text{in}\quad (K'', V/8)\,,$$

$$f_{4wz}(w, z) = -3NU_1(X)v^{-3}w^{-4} + O\big(N|X'|v^{-4}r'^{-5}|z|\big) + O\big(\beta|X'|(vr')^{-3}r'^{-1}\big) \quad \text{in}\quad ([r', 2r'], V/8)$$

und

$$f_{4ww}(w, z) = 6NU_0(X)v^{-2}w^{-4} + O\big(N|X'|v^{-3}r'^{-5}|z|\big) + O\big(\beta|X'|(vr')^{-2}r'^{-2}\big) \quad \text{in}\quad ([r', 2r'], V/8)\,.$$

Es gibt also Funktionen $R_j(w, z)$ $(j = 0, 1, 2)$, die in $(K'', V/8)$ definiert sind und den Beziehungen

$$(134)\qquad |R_j(w, z)| \leqslant c_7|X'|(\beta/N + |z|/vr') \quad \text{in}\quad (K'', V/8)\,,$$

$$(135)\qquad f_{4zz}(w, z) = \big(2U_2(X) + R_0(w, z)\big)N(vw)^{-4} \quad \text{in}\quad (K'', V/8)\,,$$

$$(136)\qquad f_{4wz}(w, z) = \big(-3U_1(X) + R_1(w, z)\big)Nv^{-3}w^{-4} \quad \text{in}\quad ([r', 2r'], V/8)$$

und

$$(137)\qquad f_{4ww}(w, z) = \big(6U_0(X) + R_2(w, z)\big)Nv^{-2}w^{-4} \quad \text{in}\quad ([r', 2r'], V/8)$$

genügen.

Mittels dieser Darstellungen werden wir in jedem der folgenden drei Unterabschnitte für den Parameter X Bedingungen aufstellen, unter denen sich $S_5(X)$ nichttrivial mit Satz 4 bzw. Satz 5 abschätzen läßt.

6.1. Es sei

$$(138)\qquad |U_l(X)| > c_8|X'|\beta/N \quad \text{für}\quad l = 1, 2$$

und

$$j \in \{0, 1\}\,.$$

Wir wollen Satz 4 mit

$$\begin{aligned}
\alpha &= a'', \qquad \beta \to b''\,,\\
r'' &= 4vr'\beta/N\,,\\
r &= c_9\, vr'|U_2(X)|/|X'|\,,\\
L &= |U_2(X)|N(\tfrac{9}{4}vr')^{-4}\,,\\
c &= 4\cdot 3^4, \qquad \varepsilon = \tfrac{1}{4}\,,\\
L' &= |U_1(X)|Nv^{-3}(2r')^{-4}, \qquad C = 2^6\,,\\
f(w, z) &= \big(\operatorname{sgn} U_2(X)\big)f_4(w, z)\,,\\
B(x) &= B_j(x)
\end{aligned}$$

anwenden.

Dazu müssen die Konstanten c_8 und c_9 genauer bestimmt werden: Aus (133) folgt

$$|U_2(X)| < c_{10}|X'| . \tag{139}$$

Daher ist

$$r < c_9 c_{10} v r'$$

und

$$L < c_{10}|X'| N (\tfrac{9}{4} v r')^{-4} .$$

Andererseits ist wegen (138)

$$r > c_8 c_9 v r' \beta / N$$

und

$$L' > c_8 |X'| \beta v^{-3} (2r')^{-4} .$$

Das liefert wegen (73) und (139)

$$c_8 c_9 r''/4 < r < c_9 c_{10} V / c_4$$

und

$$Lr''/r' < 4 c_{10} c_8^{-1} L' .$$

Daher wählen wir zunächst

$$c_9 < \min(c_4/8c_{10},\, c_7^{-1})$$

und dann unter Verwendung von (19)

$$c_8 > \max\big(c(c' c_9/4)^{-1},\, 16cc_{10}/\varepsilon,\, c_7\big) .$$

Dann erhält man

$$c_{11} c c'^{-1} r'' < r < V/8 \quad \text{mit} \quad c_{11} > 1 \tag{140}$$

und

$$4cLr''/\varepsilon r' < L' . \tag{141}$$

Wir prüfen nun die Voraussetzungen von Satz 4 nach: Die Bedingung (17) ist wegen (56), (121) und (124) und (18) ist wegen (140) erfüllt.

In (20) ist

$$K = K''$$

zu setzen. Die Bedingungen (21) und (22) sind dann wegen (134), (135), (138), $c_7 < c_8$ und $c_9 < c_7^{-1}$ erfüllt.

In Verbindung mit (120) folgt daraus außerdem (23). Wegen (125) ist (24) und wegen (88) und (122) ist (25) erfüllt.

In (26) dürfen wir wegen (23) und (127)

$$S = \begin{cases} S_{6+j} & \text{im Falle} \quad U_2(X) > 0 , \\ \overline{S_{6+j}} & \text{im Falle} \quad U_2(X) < 0 \end{cases} \tag{142}$$

setzen.

$F(w, z)$ sei die in $(K, c'Lr)$ holomorphe Bildfunktion von $f(w, z)$. Mit den Abkürzungen (27) und (128) ist dann die Summe in (28) durch

$$S_8(A', y', Y'): = \sum_{\substack{A' < m \leqslant b'',\, n \in R \\ f_z(m, B(m)) < n + y' \leqslant f_z(m, Y')}} e\big(F(m, n + y' - f_z(m, 0); y') - np(m)\big) \tag{143}$$

für $A' \geqslant a''$, $y' \in R$, $|Y'| \leqslant r''$ zu ersetzen. Ferner ist (30) wegen (134), (136), (138) und (141) erfüllt. Nach Satz 4 gilt also (31).

Wir wollen daraus die Abschätzung

$$S_{6+j} \ll L^{-1/2} \sup_{\substack{A' \geqslant a'' \\ |y'| \leqslant Lr'' \\ |Y'| \leqslant r''}} |S_8(A', y', Y')| + (L'r' + 1) L^{-1/2} + (r' + L'^{-1}) \log t \tag{144}$$

herleiten.

Wegen (43), (49), (50), (58) und $t \geqslant 3$ ist $N \ll t$, und wegen (60) und (65) ist $r' \ll N$, $v \ll t/N^2$ und $r'' \ll vr'$. Infolgedessen haben wir $r'(r''+1) \ll vr'^2 + r' \ll t + N \ll t$. Ferner ist wegen (96), (116) und (139) $Lr'' \ll N(vr')^{3-4+1} \ll t$. Im Falle

$$L^{-1/2} < r'(r''+1) \tag{145}$$

ist somit

$$\log(L^{-1}+2) \ll \log t \quad \text{und} \quad \log(Lr''+2) \ll \log t .$$

Wegen (142) folgt also dann aus (31) die Abschätzung (144). Ist aber (145) nicht erfüllt, so gilt wegen (121), (125), (127) die triviale Abschätzung

$$S_{6+j} \ll r'(r''+1) \ll L^{-1/2} ,$$

also erst recht (144). Damit ist (144) bewiesen.

Nun sei

$$A' \geqslant a'', \quad |y'| \leqslant Lr'' \quad \text{und} \quad |Y'| \leqslant r'' . \tag{146}$$

Wegen (30) ist nach Satz 4 die Funktion $f_z(x, B(x))$ in $(a'', b'']$ monoton. Da Y' an Stelle von $B(x)$ ebenfalls den Bedingungen (24) und (25) genügt, ist auch die Funktion $f_z(x, Y')$ in $(a'', b'']$ monoton. Daher ist die Menge

$$I_0(u): = \{x \in (A', b'']: f_z(x, B(x)) < u \leqslant f_z(x, Y')\} \tag{147}$$

für jedes $u \in R$ ein Intervall.

Auf Grund der nun gültigen Ungleichungen (9), (30) und (146) folgt mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung für alle $x_0, x_1 \in I_0(u)$ $(u \in R)$

$$\begin{aligned} L'|x_0 - x_1| &\leqslant |f_z(x_0, 0) - f_z(x_1, 0)| \\ &\leqslant |f_z(x_0, 0) - u| + |f_z(x_1, 0) - u| \ll Lr'' . \end{aligned}$$

Daher existieren reelle, in R definierte Funktionen $a_3(u), b_3(u)$ mit

$$(148)\qquad [a_3(u), b_3(u)] \subset \{x \in [A', b'']:\ f_z(x, B(x)) \leqslant u \leqslant f_z(x, Y')\},$$

$$(149)\qquad \{m:\ m \in I_0(u)\} = \{m:\ a_3(u) \leqslant m \leqslant b_3(u)\}$$

und

$$(150)\qquad b_3(u) - a_3(u) \ll Lr''/L'.$$

Sind andererseits u_0 und u_1 reelle Zahlen mit

$$I_0(u_j) \neq \emptyset \qquad (j = 0, 1),$$

so existieren nach (147) zwei Zahlen x_0 und x_1 in $[a'', b'']$ mit

$$f_z(x_j, B(x_j)) < u_j \leqslant f_z(x_j, Y') \qquad (j = 0, 1),$$

wegen (9) ist also

$$u_j = f_z(x_j, 0) + O(Lr'') \qquad (j = 0, 1)$$

und daher wegen (30)

$$u_1 - u_0 \ll L'r' + Lr'' \ll L'r'.$$

Die Menge aller $u \in R$ mit $I_0(u) \neq \emptyset$ ist also in einem Intervall enthalten, dessen Länge $\ll L'r'$ ist.

Somit folgt aus (143), (147) und (149)

$$(151)\qquad S_8(A', y', Y') \ll (L'r' + 1)\Big[\sup_{\substack{u \in R\\ b_3(u) \geqslant a_3(u)+1}} |S_9(u)| + 1\Big],$$

wo

$$S_9(u) = \sum_{a_3(u) < m \leqslant b_3(u)} e\big(f_5(m; u)\big)$$

und

$$f_5(x; u) = F\big(x, u - f_z(x, 0); y'\big) - (u - y')p(x)$$

für $a_3(u) \leqslant x \leqslant b_3(u)$ gesetzt ist.

Es sei

$$(152)\qquad u \in R \quad \text{und} \quad b_3(u) \geqslant a_3(u) + 1.$$

Nach Satz 3 ist dann $f_5(x; u)$ in $[a_3(u), b_3(u)]$ reell und zweimal stetig differenzierbar.

Wegen (146) und (148) gilt

$$f_5''(x; u) = \big(F_{ww} - 2f_{wz}(x, 0)F_{wz} + f_{wz}^2(x, 0)F_{zz} - f_{wwz}(x, 0)F_z\big)(x, \hat{z}; y')$$

mit $\hat{z} = u - f_z(x, 0)$ für $a_3(u) \leqslant x \leqslant b_3(u)$, und dabei ist wegen (9) $|\hat{z}| \leqslant cLr''$.

Ferner ist wegen (146) $|y'| \leqslant Lr''$, und wegen (14) gilt

$$(153)\qquad F_z(w, 0) = 0 \quad \text{für alle} \quad w \in K.$$

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung liefert nun wegen (27), (30), (119), (131) und der Bedeutung von L' und $f(w, z)$ (vgl. S. 393)

$$(154)\qquad f_5''(x; u) = (F_{ww} + f_{wz}^2 F_{zz})(x, 0) + O(L'r'^{-1}M_{0,1}) + \\ + O\big(Lr''(M_{2,1} + L'M_{1,2} + L'^2 M_{0,3})\big)$$

für $a_3(u) \leqslant x \leqslant b_3(u)$, wo

$$M_{j,k} = \max_{\substack{r' \leqslant w \leqslant 2r'\\ |z| \leqslant cLr''}} \left|\frac{\partial^{j+k}}{\partial w^j \partial z^k} F(w, z)\right| \qquad (j, k \geqslant 0)$$

gesetzt ist.

Wegen (13) bis (15) gilt

$$(155)\qquad (F_{ww} + f_{wz}^2 F_{zz})(x, 0) = -f_{zz}^{-1}(x, 0)H(x) \qquad (r' \leqslant x \leqslant 2r')$$

mit

$$(156)\qquad H(x) := (f_{ww}f_{zz} - f_{wz}^2)(x, 0).$$

Die Größen $M_{j,k}$ lassen sich folgendermaßen abschätzen: Wegen (12) und (153) liefert das Schwarzsche Lemma

$$|F_z(w, z)| \leqslant 2c'r|z|/c'Lr \quad \text{in} \quad (K, c'Lr).$$

Speziell gilt also wegen (140)

$$F_z(w, z) \ll r'' \quad \text{in} \quad (K, cLr'').$$

Ferner hat man wegen (10) und (15)

$$F_{zz}(w, z) \ll L^{-1} \quad \text{in} \quad (K, c'Lr).$$

Mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel folgt also

$$M_{2,1} \ll r''r'^{-2}, \qquad M_{1,2} \ll (Lr')^{-1}$$

und wegen (140)

$$(157)\qquad M_{0,1} \ll r'', \qquad M_{0,3} \ll L^{-1}(Lr)^{-1}.$$

Insbesondere ist wegen $Lr'' \ll L'r'$ (vgl. (30))

$$(158)\qquad M_{2,1} + L'M_{1,2} \ll L'/Lr'.$$

Mit (133), (134) und (137) erhält man

$$(159)\qquad f_{ww}(x, 0) \ll |X'|Nv^{-2}r'^{-4} =: L_0 \quad \text{für} \quad r' \leqslant x \leqslant 2r',$$

wegen (8), (30) und (156) ist also

$$(160)\qquad L'^2/L \ll |f_{zz}^{-1}(x, 0)H(x)| + L_0.$$

Faßt man nun (154), (155), (157), (158) und (160) zusammen, so ergibt sich mit einer passenden Funktion $R_4(x)$

$$(161)\qquad f_5''(x; u) = -f_{zz}^{-1}(x, 0)H(x)\big(1 + R_4(x)\big) + O(L'r''/r' + L_0 r''/r)$$

für $a_3(u) \leqslant x \leqslant b_3(u)$, und dabei ist

$$R_4(x) \ll r''/r\,.$$

Wegen (138) ist somit bei genügend großem c_8

(162) $$|R_4(x)| \leqslant \tfrac{1}{2}\,.$$

Setzt man die Abschätzungen (134) bis (137) in (156) ein, so erhält man unter Berücksichtigung von (133)

(163) $$H(x) = U(X)N^2v^{-6}x^{-8} + O(V_1) \quad \text{für} \quad r' \leqslant x \leqslant 2r'$$

mit

(164) $$U(X) := (12\,U_0U_2 - 9\,U_1^2)(X)$$

und

(165) $$V_1 := |X'|^2N^2v^{-6}r'^{-8}\beta/N\,.$$

Mit den auf Seite 393 und in (159) eingeführten Abkürzungen findet man noch

(166) $$L(L'r''/r' + L_0r''/r) \ll V_1\,.$$

Für ein genügend großes c_{12} werde nun

(167) $$|U(X)| > c_{12}|X'|^2\beta/N$$

vorausgesetzt.

Wegen (161) bis (166) gelten dann mit

(168) $$L_3 := c_{13}|U(X)|L^{-1}N^2v^{-6}r'^{-8}$$

die Ungleichungen

$$L_3 \leqslant |f_5''(x;u)| \leqslant c_{14}L_3 \quad \text{für} \quad a_3(u) < x \leqslant b_3(u)\,.$$

Damit ist aber eine Bedingung von der Form (32) erfüllt. Wegen (152) können wir also Satz 5 auf $S_9(u)$ anwenden. Dabei ergibt sich unter Berücksichtigung von (150)

$$S_9(u) \ll Lr''L'^{-1}L_3^{1/2} + L_3^{-1/2}\,.$$

Setzt man dies in (151) ein, so kommt

$$S_8(A', y', Y') \ll (L'r'+1)(Lr''L'^{-1}L_3^{1/2} + L_3^{-1/2} + 1)\,.$$

Dies gilt jetzt für alle (A', y', Y'), die den Bedingungen (146) genügen. Daher folgt in Verbindung mit (126) und (144)

$$\begin{aligned} S_5(X) &\ll (L'r'+1)\big(r''L'^{-1}(LL_3)^{1/2} + (LL_3)^{-1/2} + L^{-1/2}\big) + (r' + L'^{-1})\log t \\ &= r'r''(LL_3)^{1/2} + \big(r''(LL_3)^{1/2} + \log t\big)L'^{-1} + \\ &\qquad + (L'r'+1)\big((LL_3)^{-1/2} + L^{-1/2}\big) + r'\log t\,. \end{aligned}$$

Setzt man darin wieder die Bedeutung der auf Seite 393 und in (168) definierten Größen r'', L, L' und L_3 ein und berücksichtigt dann noch (58) und (95), so erhält man mit

(169) $$\begin{aligned} T &:= T_1T_2T_3\,, \\ H_0 &:= Ta(v'r')^{-2}\beta/a + r'\log t\,, \\ H_1 &:= Tv'r'\beta/a + a^{-1}v'^3r'^4\log t\,, \\ H_2 &:= Ta^{1/2}(v'r')^{-1} + a^{-1/2}(v'r')^2\,, \\ H_3 &:= Tr' + a^{-1}v'^3r'^4 \end{aligned}$$

die Abschätzung

(170) $$S_5(X) \ll H_0 + H_1|U_1(X)|^{-1} + H_2|U_2(X)|^{-1/2} + H_3|U(X)|^{-1/2}$$

für alle $X \in (R^2)^3$, die den Bedingungen (116), (138) und (167) genügen.

6.2. Es sei

(171) $$|U_2(X)| > 5c_7|X'|\beta/N\,.$$

Wir wählen ein beliebiges $m \in (a'', b'']$. Wegen (125), (134) und $4vr'\beta/N < V/8$ (vgl. (117)) gilt dann für $B_0(m) < x \leqslant B_1(m)$

$$|R_0(m, x)| \leqslant 5c_7|X'|\beta/N\,.$$

Daher folgt aus (135) und (171) mit

$$L_4 := |U_2(X)|N(2vr')^{-4}$$

die Beziehung (vgl. (32))

$$L_4 \leqslant |f_{4xx}(m, x)| \leqslant 3\cdot 2^4L_4 \qquad (B_0(m) < x \leqslant B_1(m))\,.$$

Nach Satz 5 folgt also unter Beachtung von (125)

$$\sum_{B_0(m) < n + p(m) \leqslant B_1(m)} e\big(f_4(m, n+p(m))\big) \ll \begin{cases} L_4^{1/2}vr'\beta/N + L_4^{-1/2}, & \text{falls } B_1(m) \geqslant B_0(m)+1\,, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Summiert man nun über alle $m \in (a'', b'']$ und beachtet noch die Beziehungen (107), (120), (121) und (123), so findet man mit (vgl. (169))

(172) $$H_4 := (Ta)^{1/2}v'^{-1}\beta/a + r'$$

und

(173) $$H_5 := a^{-1/2}v'^2r'^3$$

die Abschätzung

(174) $$S_5(X) \ll H_4 + H_5|U_2(X)|^{-1/2}$$

für alle $X \in (R^2)^3$, die den Bedingungen (116) und (171) genügen.

6.3. Nun soll $S_5(X)$ in ähnlicher Weise wie $S_8(A', y', Y')$ abgeschätzt werden (vgl. (143)). Dazu führen wir zunächst die Mengen

$$(175)\qquad I_1(u):=\{x \in (a'', b'']:\ B_0(x) < vx+u \leqslant B_1(x)\} \qquad (u \in R)$$

ein.

Da aus (78), (88) und (122) die Ungleichungen

$$0 \leqslant B_j'(x) \leqslant 2v\beta/N < v/2 \qquad (j=0,1;\ x \in R)$$

folgen, stellt $I_1(u)$ ein links offenes und rechts abgeschlossenes Intervall dar, dessen Länge wegen (125) $\ll r'\beta/N$ ist. Mit passenden Funktionen $a_4(u)$, $b_4(u)$ gilt daher

$$(176)\qquad I_1(u) = \big(a_4(u), b_4(u)\big]$$

und

$$(177)\qquad 0 \leqslant b_4(u)-a_4(u) \ll r'\beta/N\,.$$

Außerdem erkennt man, daß die Menge aller $u \in R$ mit $I_1(u) \neq \emptyset$ in einem Intervall enthalten ist, dessen Länge $\ll vr'$ ist.

Ferner folgt aus (93) und (97) $vr' \geqslant 1$, und wegen (123) gilt

$$G_X = \{x \in R^2:\ x_1 \in I_1(x_2+y)\}\,.$$

Unter Berücksichtigung von (107) und (120) ergibt sich also

$$(178)\qquad S_5(X) \ll vr'\Big[\sup_{\substack{u \in R\\ b_4(u) \geqslant a_4(u)+1}} |S_{10}(u)|+1\Big],$$

wo

$$S_{10}(u) = \sum_{a_4(u) < m \leqslant b_4(u)} e\big(f_6(m)\big)$$

und

$$f_6(x) = f_4(x, vx+u) \qquad \text{für} \qquad a_4(u) < x \leqslant b_4(u)$$

gesetzt ist.

Es sei

$$(179)\qquad u \in R \qquad \text{und} \qquad b_4(u) \geqslant a_4(u)+1\,.$$

Wegen (117), (125), (175) und (176) gilt dann für $a_4(u) < x \leqslant b_4(u)$

$$0 \leqslant vx+u < 4vr'\beta/N < V/8\,.$$

Andererseits ist $f_4(w, z)$ in $(K'', V/8)$ holomorph (vgl. (118)) und für reelle Paare (w, z) reell. Somit stellt $f_6(x)$ eine in $\big(a_4(u), b_4(u)\big]$ zweimal stetig differenzierbare reelle Funktion dar, und für ihre zweite Ableitung erhält man

$$f_6''(x) = (f_{4ww}+2vf_{4wz}+v^2f_{4zz})(x, vx+u)\,,$$

also wegen (134) bis (137)

$$f_6''(x) = \big(U'(X)+R_5(x)\big)Nv^{-2}x^{-4}$$

mit

$$(180)\qquad U'(X):=(6U_0-6U_1+2U_2)(X)$$

und

$$|R_5(x)| \leqslant 20c_7|X'|\beta/N\,.$$

Setzt man nun die Ungleichung

$$(181)\qquad |U'(X)| > 40c_7|X'|\beta/N$$

voraus, so folgt

$$L_5 \leqslant |f_6''(x)| \leqslant 3\cdot 2^4 L_5 \qquad \text{für} \qquad a_4(u) < x \leqslant b_4(u)$$

mit

$$L_5:=2^{-5}|U'(X)|Nv^{-2}r'^{-4}$$

und daher wegen (177) und (179) nach Satz 5

$$S_{10}(u) \ll L_5^{1/2}r'\beta/N + L_5^{-1/2}\,.$$

In Verbindung mit (178) ergibt sich daraus

$$S_5(X) \ll vr'(L_5^{1/2}r'\beta/N + L_5^{-1/2}+1)\,.$$

Führt man also noch die Abkürzung (vgl. (169))

$$(182)\qquad H_6:=(Ta)^{1/2}\beta/a+v'r'$$

ein, so bekommt man mit (173) die Abschätzung

$$(183)\qquad S_5(X) \ll H_6+H_5|U'(X)|^{-1/2}$$

für alle $X \in (R^2)^3$, die den Bedingungen (116) und (181) genügen.

7. Setzt man die Abschätzungen (170), (174) und (183) in die Abkürzungen (111) ein, so stößt man auf das Problem, gewisse „Polynomsummen" möglichst günstig nach oben abzuschätzen. Dazu benötigen wir eine algebraische Vorbereitung. Zunächst führen wir einige Abkürzungen ein.

I bezeichne den Integritätsbereich der ganzen Zahlen Sind n und g natürliche Zahlen, so bezeichnen wir die Menge aller Polynome $P = P(u_1, \ldots, u_n)$ aus $I[u_1, \ldots, u_n]$, die eine Darstellung der Form

$$(184)\qquad P = \sum_{\substack{0 \leqslant l_j \leqslant g\\ (j=1,\ldots,n)}} A_{l_1,\ldots,l_n}\prod_{j=1}^{n} u_j^{l_j} \qquad \text{mit} \qquad A_{g,\ldots,g} \neq 0$$

gestatten, mit $I_{n,g}$.

(185) Es sei $1 \leqslant m \leqslant n$ und $P = P(u_1, \ldots, u_n)$ ein Polynom aus $I[u_1, \ldots, u_n]$; $l_1, \ldots, l_m$ seien nichtnegative ganze Zahlen; $j_1, \ldots, j_m$ seien natürliche Zahlen aus $[1, n]$. Dann wird

$$d_{j_1\ldots j_m}^{l_1\ldots l_m}P = \frac{1}{l_1!}\cdots\frac{1}{l_m!}\left[\frac{\partial^{l_1+\ldots+l_m}}{\partial u_{j_1}^{l_1}\ldots\partial u_{j_m}^{l_m}}P(u_1, \ldots, u_n)\right]_{\substack{u_{j_k}=0\\ (k=1,\ldots,m)}}$$

gesetzt.

In Verbindung mit (184) folgt offenbar:

(186) Ist P in $I_{n,g}$ $(n \geqslant 2,\, g \geqslant 1)$, so ist $d_n^g P$ in $I_{n-1,g}$.

(187) Ist $x_0 + x_1 x + \ldots + x_n x^n$ $(n \geqslant 2)$ das allgemeine Polynom n-ten Grades über I, so bezeichne $D(x_0, \ldots, x_n)$ die Diskriminante dieses Polynoms.

Nach [2], S. 138-141 und [4], S. 288 gilt speziell

$$D(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_0 x_2 \tag{188}$$

und

$$27D(x_0, \ldots, x_4) = 4D_1^3(x_0, \ldots, x_4) - D_2^2(x_0, \ldots, x_4) \tag{189}$$

mit

$$D_1(x_0, \ldots, x_4) := x_2^2 + 12x_0x_4 - 3x_1x_3 \tag{190}$$

und

$$D_2(x_0, \ldots, x_4) := 27x_1^2x_4 + 27x_0x_3^2 + 2x_2^3 - (72x_0x_4 + 9x_1x_3)\,x_2\,. \tag{191}$$

Wir führen nun die elementarsymmetrischen Funktionen

$$S^{(n)} := \sum_{\substack{m \in [0,1]^3 \\ s(m)=n}} \prod_{l=1}^{3} u_l^{m_l} \qquad (n = 0, \ldots, 3) \tag{192}$$

und die Zahlen

$$C_{l,n} := 2^{l+n} n!\,(3-n)!\, C_{l+n,3-n,n} \qquad (l = 0, 1, 2;\; n = 0, 1, 2, 3) \tag{193}$$

ein (vgl. (110) und (87)).

Damit erklären wir spezielle Polynome $P_0, \ldots, P_8$ durch

$$P_l := \sum_{n=0}^{3} C_{l,n} S^{(n)} \qquad (l = 0, 1, 2), \tag{194}$$

$$P_3 := 12P_0 - 6P_1 + P_2, \tag{195}$$

$$P_4 := 4P_0P_2 - 3P_1^2, \tag{196}$$

$$P_5 := d_3^0 P_2 d_3^1 P_3 - d_3^1 P_2 d_3^0 P_3, \tag{197}$$

$$P_6 := D(d_3^0 P_4, \ldots, d_3^2 P_4), \tag{198}$$

$$P_7 := D(d_2^0 P_5, \ldots, d_2^2 P_5), \tag{199}$$

$$P_8 := D(d_2^0 P_6, \ldots, d_2^4 P_6). \tag{200}$$

Unser Ziel ist es, die nachstehenden Eigenschaften dieser Polynome zu beweisen:

(201) $P_0, \ldots, P_3 \in I_{3,1}$; $P_4 \in I_{3,2}$; $P_5 \in I_{2,2}$; $P_6 \in I_{2,4}$; $P_7 \in I_{1,4}$; $P_8 \in I_{1,24}$,

$$d_2^2 P_5 = d_{23}^{01} P_2 d_{23}^{11} P_3 - d_{23}^{11} P_2 d_{23}^{01} P_3, \tag{202}$$

$$d_{12}^{22} P_5 = d_{123}^{011} P_2 d_{123}^{111} P_3 - d_{123}^{111} P_2 d_{123}^{011} P_3 \neq 0, \tag{203}$$

$$d_2^4 P_6 = D(d_{23}^{02} P_4, \ldots, d_{23}^{22} P_4). \tag{204}$$

(205) Die Nullstellen von $d_{23}^{22} P_4$, $d_2^2 P_5$, $d_2^4 P_6$ und P_7 sind einfach.

(206) Die Nullstellen von P_8 besitzen höchstens die Vielfachheit 9.

Der Beweis wird in drei Schritten geführt.

7.1. Mit

$$A_l' := \frac{2}{l!} \prod_{j=1}^{l-1} (2j-1) \qquad (l \geqslant 0) \tag{207}$$

gilt offenbar

$$(-1)^{l-1} \binom{\frac{1}{2}}{l} = 2^{-l-1} A_l' \quad \text{für} \quad l = 1, 2, \ldots,$$

nach (87) hat man also für $l = 0, 1, 2$; $n = 0, 1, 2, 3$

$$C_{l+n,3-n,n} = A_{l+n}' 2^{-l-n} \binom{l+n}{n} \binom{1-l-n}{3-n}$$

und somit nach (193)

$$C_{l,n} = n!\,(3-n)!\, A_{l+n}' \binom{l+n}{n} \binom{1-l-n}{3-n}.$$

Andererseits folgt aus (207)

$$A_2' = A_3' = 1, \qquad A_4' = \tfrac{5}{4}, \qquad A_5' = \tfrac{7}{4}.$$

Damit findet man

$$C_{l,n} = 0 \quad \text{für} \quad l, n \geqslant 0,\; l+n \leqslant 1,$$

$$C_{0,2} = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \binom{2}{2} \binom{-1}{1} = -2,$$

$$C_{0,3} = 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \binom{3}{3} \binom{-2}{0} = 6,$$

$$C_{1,1} = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \binom{2}{1} \binom{-1}{2} = 4,$$

$$C_{1,2} = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \binom{3}{2} \binom{-2}{1} = -12,$$

$$C_{1,3} = 6 \cdot 1 \cdot \tfrac{5}{4} \cdot \binom{4}{3} \binom{-3}{0} = 30,$$

$$C_{2,0} = 1 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \binom{2}{0} \binom{-1}{3} = -6,$$

$$C_{2,1} = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \binom{3}{1} \binom{-2}{2} = 18,$$

$$C_{2,2} = 2 \cdot 1 \cdot \tfrac{5}{4} \cdot \binom{4}{2} \binom{-3}{1} = -45,$$

$$C_{2,3} = 6 \cdot 1 \cdot \tfrac{7}{4} \cdot \binom{5}{3} \binom{-4}{0} = 105.$$

Man erkennt also, daß die Koeffizienten von $P_0, \ldots, P_8$ ganze Zahlen sind. Für unsere Zwecke genügt es, diese Koeffizienten modulo 13 kennenzulernen.

Sind P und Q Polynome aus $I[u_1]$, so schreiben wir im folgenden

$$P \equiv Q,$$

wenn für alle $l \geqslant 0$

$$d_1^l P \equiv d_1^l Q \pmod{13}$$

ist (vgl. (185)).

In den folgenden Rechnungen werden wir die Polynome aus $I[u_1]$ meistens in Vektorform schreiben.

Nun gilt nach (195)

$$P_3 = \sum_{n=0}^{3} C_{3,n} S^{(n)} \tag{208}$$

mit

$$C_{3,n} := 12 C_{0,n} - 6 C_{1,n} + C_{2,n} \quad (n = 0, 1, 2, 3).$$

Es folgt also

$$\begin{aligned} C_{3,0} &\equiv -1\cdot 0 - 6\cdot 0 + (-6) \equiv 7, \\ C_{3,1} &\equiv -1\cdot 0 - 6\cdot 4 + 5 \equiv 7, \\ C_{3,2} &\equiv -1\cdot(-2) - 6\cdot 1 + (-6) \equiv 3, \\ C_{3,3} &\equiv -1\cdot 6 - 6\cdot 4 + 1 \equiv -3. \end{aligned}$$

Ferner erhält man nach (185), (192) und (194)

$$\begin{aligned} d_2^0 P_5 &= d_{23}^{00} P_2 d_{23}^{01} P_3 - d_{23}^{01} P_2 d_{23}^{00} P_3 \\ &\equiv (-6, 5)(7, 3) - (5, -6)(7, 7) \equiv (1, -2, 5), \\ d_2^1 P_5 &= d_{23}^{00} P_2 d_{23}^{11} P_3 + d_{23}^{10} P_2 d_{23}^{01} P_3 - d_{23}^{01} P_2 d_{23}^{10} P_3 - d_{23}^{11} P_2 d_{23}^{00} P_3 \\ &= d_{23}^{00} P_2 d_{23}^{11} P_3 - d_{23}^{11} P_2 d_{23}^{00} P_3 \\ &\equiv (-6, 5)(3, -3) - (-6, 1)(7, 7) \equiv (-2, 3, 4) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d_2^2 P_5 &= d_{23}^{10} P_2 d_{23}^{11} P_3 - d_{23}^{11} P_2 d_{23}^{10} P_3 \\ &\equiv (5, -6)(3, -3) - (-6, 1)(7, 3) \equiv (5, 4, 2). \end{aligned} \tag{209}$$

Insbesondere ist wegen (188)

$$D(d_{12}^{02} P_5, \ldots, d_{12}^{22} P_5) \equiv 4^2 - 4\cdot 5\cdot 2 \equiv 2 \tag{210}$$

und nach (199)

$$\begin{aligned} P_7 &\equiv (-2, 3, 4)^2 - 4(1, -2, 5)(5, 4, 2) \\ &\equiv (4, 1, 6, -2, 3) - (7, 2, -2, -1, 1) \equiv (-3, -1, 8, -1, 2). \end{aligned} \tag{211}$$

Wegen (190) und (191) folgt daraus

$$D_1(d_1^0 P_7, \ldots, d_1^4 P_7) \equiv 8^2 + 12(-3)\cdot 2 - 3(-1)^2 \equiv 2$$

und

$$\begin{aligned} D_2(d_1^0 P_7, \ldots, d_1^4 P_7) &\equiv (-1)^2\cdot 2 + (-3)(-1)^2 + 2\cdot 8^3 - \\ &\quad - \big(72(-3)\cdot 2 + 9(-1)^2\big)\cdot 8 \equiv 0, \end{aligned}$$

also wegen (189)

$$D(d_1^0 P_7, \ldots, d_1^4 P_7) \equiv 6. \tag{212}$$

7.2. Aus (194) und (196) folgt

$$P_4 = \sum_{0 \leqslant j, k \leqslant 3} b_{j,k} S^{(j)} S^{(k)}$$

mit

$$b_{j,k} := 4 C_{0,j} C_{2,k} - 3 C_{1,j} C_{1,k}. \tag{213}$$

Nach (192) gilt andererseits für $0 \leqslant j, k \leqslant 3$

$$S^{(j)} S^{(k)} = \sum_{\substack{m,n \in [0,1]^3 \\ s(m)=j \\ s(n)=k}} \prod_{h=1}^{3} u_h^{m_h+n_h} = \sum_{l \in [0,2]^3} B_{j,k,l} \prod_{h=1}^{3} u_h^{l_h}$$

mit

$$B_{j,k,l} := \sum_{\substack{m,n \in [0,1]^3 \\ m+n=l \\ s(m)=j \\ s(n)=k}} 1 \quad (l \in [0, 2]^3).$$

Setzt man also

$$B_l = \sum_{0 \leqslant j,k \leqslant 3} b_{j,k} B_{j,k,l} \quad (l \in [0, 2]^3),$$

so ergibt sich

$$P_4 = \sum_{l \in [0,2]^3} B_l \prod_{h=1}^{3} u_h^{l_h}. \tag{214}$$

Zur Berechnung der Koeffizienten B_l führen wir die Zahlen

$$A(g, l) := \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant 3 \\ l_n = g}} 1 \quad (g = 0, 1, 2;\ l \in [0, 2]^3) \tag{215}$$

ein:

Ist $0 \leqslant j, k \leqslant 3$ und $l \in [0, 2]^3$, so folgt wegen (110) im Falle $s(l) = j + k$

$$B_{j,k,l} = \sum_{\substack{m \in [0,1]^3 \\ l-m \in [0,1]^3 \\ s(m)=j}} 1 = \sum_{\substack{m \in [0,1]^{A(1,l)} \\ s(m)=j-A(2,l)}} 1 = \binom{A(1, l)}{j - A(2, l)}$$

und im Falle $s(l) \neq j + k$

$$B_{j,k,l} = 0.$$

Unter Berücksichtigung von

$$s(l) = A(1, l) + 2A(2, l) \quad (l \in [0, 2]^3)$$

erhält man daher

$$B_l = b'_{A(1,l), A(2,l)} \quad (l \in [0, 2]^3) \tag{216}$$

mit

$$b'_{m,n} := \sum_{j=n}^{m+n} \binom{m}{j-n} b_{j, m+2n-j} \quad (m, n \geqslant 0;\ m + n \leqslant 3).$$

Nach Seite 403 und (213) ist speziell

$$\begin{aligned}
b'_{0,0} &= b_{0,0} = 4\cdot 0 - 3\cdot 0 = 0\,,\\
b'_{0,1} &= b_{1,1} = 4\cdot 0 - 3\cdot 4^2 \equiv 4\,,\\
b'_{0,2} &= b_{2,2} = 4(-2)(-45) - 3(-12)^2 \equiv 6\,,\\
b'_{0,3} &= b_{3,3} = 4\cdot 6\cdot 105 - 3\cdot 30^2 \equiv 2\,,\\
b'_{1,0} &= b_{0,1} + b_{1,0} = 0\,,\\
b'_{1,1} &= b_{1,2} + b_{2,1} = 4\big(0 + (-2)\cdot 18\big) - 6\cdot 4(-12) \equiv 1\,,\\
b'_{1,2} &= b_{2,3} + b_{3,2} = 4\big(-2\cdot 105 + 6(-45)\big) - 6(-12)\cdot 30 \equiv 6\,,\\
b'_{2,0} &= b_{0,2} + 2b_{1,1} + b_{2,0}\\
&= 4\big(0 + 0 + (-2)(-6)\big) - 3(0 + 2\cdot 4^2 + 0) \equiv 4\,,\\
b'_{2,1} &= b_{1,3} + 2b_{2,2} + b_{3,1}\\
&= 4\big(0 + 2(-2)(-45) + 6\cdot 18\big) - 6\big(4\cdot 30 + (-12)^2\big) \equiv -3\,,\\
b'_{3,0} &= b_{0,3} + 3b_{1,2} + 3b_{2,1} + b_{3,0}\\
&= 4\big(0 + 0 + 3(-2)\cdot 18 + 6\cdot(-6)\big) - 6\big(0 + 3\cdot 4(-12)\big) \equiv 2\,.
\end{aligned}$$

In Verbindung mit (214), (215) und (216) folgt daraus

(217) $$B_l = 0 \quad \text{für} \quad s(l) \leqslant 1\,,$$

$$\begin{aligned}
d_{23}^{00}P_4 &\equiv (0, 0, 4)\,,\\
d_{23}^{01}P_4 &= d_{23}^{10}P_4 \equiv (0, 4, 1)\,,\\
d_{23}^{02}P_4 &= d_{23}^{20}P_4 \equiv (4, 1, 6)\,,\\
d_{23}^{11}P_4 &\equiv (4, 2, -3)\,,\\
d_{23}^{12}P_4 &= d_{23}^{21}P_4 \equiv (1, -3, 6)
\end{aligned}$$

und

(218) $$d_{23}^{22}P_4 \equiv (6, 6, 2)\,.$$

Insbesondere gilt nach (188)

(219) $$D(d_{123}^{022}P_4, \ldots, d_{123}^{222}P_4) \equiv 6^2 - 4\cdot 6\cdot 2 \equiv 1\,.$$

Da nach (188) und (198)

$$P_6 = (d_3^1 P_4)^2 - 4 d_3^0 P_4\, d_3^2 P_4$$

ist, ergibt sich weiter

(220) $$\begin{aligned}
d_2^0 P_6 &= (d_{23}^{01}P_4)^2 - 4 d_{23}^{00}P_4\, d_{23}^{02}P_4\\
&\equiv (0, 0, 3, 8, 1) - 4(0, 0, 3, 4, -2) \equiv (0, 0, 4, 5, 9)\,,
\end{aligned}$$

(221) $$\begin{aligned}
d_2^1 P_6 &= 2 d_{23}^{01}P_4\, d_{23}^{11}P_4 - 4(d_{23}^{00}P_4\, d_{23}^{12}P_4 + d_{23}^{10}P_4\, d_{23}^{02}P_4)\\
&\equiv 2(0, 3, -1, 3, -3) - 4\big((0, 0, 4, 1, -2) + (0, 3, 8, -1, 6)\big)\\
&\equiv (0, 7, 2, 6, 4)\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_2^2 P_6 &= (d_{23}^{11}P_4)^2 + 2 d_{23}^{01}P_4\, d_{23}^{21}P_4 -\\
&\qquad - 4(d_{23}^{00}P_4\, d_{23}^{22}P_4 + d_{23}^{10}P_4\, d_{23}^{12}P_4 + d_{23}^{20}P_4\, d_{23}^{02}P_4)\\
&= (d_{23}^{11}P_4)^2 - 4\big(d_{23}^{00}P_4\, d_{23}^{22}P_4 + (d_{23}^{02}P_4)^2\big) - 2 d_{23}^{01}P_4\, d_{23}^{12}P_4\\
&\equiv (3, 3, 6, 1, 9) - 4\big((0, 0, -2, -2, 8) + (3, 8, -3, -1, -3)\big) -\\
&\qquad - 2(0, 4, 2, 8, 6) \equiv (4, 2, 9, -3, 3)\,,\\
d_2^3 P_6 &= 2 d_{23}^{11}P_4\, d_{23}^{21}P_4 - 4(d_{23}^{10}P_4\, d_{23}^{22}P_4 + d_{23}^{20}P_4\, d_{23}^{12}P_4)\\
&\equiv 2(4, 3, 2, 8, 8) - 4\big((0, -2, 4, 1, 2) + (4, 2, 1, 1, -3)\big)\\
&\equiv (5, 6, -3, 8, 7)
\end{aligned}$$

und

(222) $$\begin{aligned}
d_2^4 P_6 &= (d_{23}^{12}P_4)^2 - 4 d_{23}^{02}P_4\, d_{23}^{22}P_4\\
&\equiv (1, 7, 8, 3, -3) - 4(-2, 4, -2, -1, -1) \equiv (9, 4, 3, 7, 1)\,.
\end{aligned}$$

Aus (214), (217), (220) und (221) folgt noch

(223) $$d_{12}^{jk}P_6 = 0 \quad \text{für} \quad j, k \geqslant 0,\ j + k \leqslant 1\,.$$

Setzt man (222) in (190) und (191) ein, so ergibt sich

$$D_1(d_{12}^{04}P_6, \ldots, d_{12}^{44}P_6) \equiv 3^2 + 12\cdot 9\cdot 1 - 3\cdot 4\cdot 7 \equiv 7$$

und

$$D_2(d_{12}^{04}P_6, \ldots, d_{12}^{44}P_6) \equiv 4^2\cdot 1 + 9\cdot 7^2 + 2\cdot 3^3 - (72\cdot 9\cdot 1 + 9\cdot 4\cdot 7)\cdot 3 \equiv 8\,,$$

also wegen (189)

(224) $$D(d_{12}^{04}P_6, \ldots, d_{12}^{44}P_6) \equiv 4\cdot 7^3 - 8^2 \equiv 8\,.$$

Nach (200) können wir nun das Polynom P_8 modulo 13 berechnen: Setzt man $x_l = d_2^l P_6$ $(l \geqslant 0)$, so folgt

$$\begin{aligned}
x_1^2 &\equiv (0, 7, 2, 6, 4)^2 \equiv (0, 0, -3, 2, -3, 2, 0, 9, 3)\,,\\
x_2^2 &\equiv (4, 2, 9, -3, 3)^2 \equiv (3, 3, -2, -1, 2, -3, -2, 8, 9)\,,\\
x_3^2 &\equiv (5, 6, -3, 8, 7)^2 \equiv (-1, 8, 6, 5, 6, -3, 9, 8, -3)\,,\\
x_0 x_4 &\equiv (0, 0, 4, 5, 9)(9, 4, 3, 7, 1) \equiv (0, 0, -3, 9, 9, 1, 1, 3, 9)\,,\\
x_1 x_3 &\equiv (0, 7, 2, 6, 4)(5, 6, -3, 8, 7) \equiv (0, 9, 0, 8, 2, 6, -2, 9, 2)\,,
\end{aligned}$$

und damit wird

$$\begin{aligned}
x_1^2 x_4 &\equiv (0, 0, -3, 2, -3, 2, 0, 9, 3)(9, 4, 3, 7, 1)\\
&\equiv (0, 0, -1, 6, -2, 4, -3, 3, 9, 2, 7, 4, 3)\,,\\
x_0 x_3^2 &\equiv (0, 0, 4, 5, 9)(-1, 8, 6, 5, 6, -3, 9, 8, -3)\\
&\equiv (0, 0, 9, 1, 3, 5, -1, -2, -3, -2, 5, 5, -1)\,,\\
x_2^3 &\equiv (4, 2, 9, -3, 3)(3, 3, -2, -1, 2, -3, -2, 8, 9)\\
&\equiv (-1, 5, -1, -3, 1, -2, 1, 5, -3, 9, -1, -3, 1)\,,\\
(72 x_0 x_4 + 9 x_1 x_3) x_2 &\equiv (0, 3, 5, 5, 3, 9, 2, -2, 3)(4, 2, 9, -3, 3)\\
&\equiv (0, -1, 0, 5, 6, 3, 1, 5, 8, 9, 0, -2, 9)\,.
\end{aligned}$$

Nach (190) und (191) ist also

$$D' := D_1(d_2^0 P_6, \ldots, d_2^4 P_6) \equiv (3, 2, 1, 5, 0, 4, 3, 4, 7) \tag{225}$$

und

$$D'' := D_2(d_2^0 P_6, \ldots, d_2^4 P_6) \equiv (-2, -2, 6, 9, -3, 2, -3, 6, 5, 9, -3, 5, 8). \tag{226}$$

Daraus folgt zunächst

$$D'^2 \equiv (9, -1, -3, 8, 8, 8, 7, 5, 0, 1, 5, 3, 2, 2, 6, 4, -3)$$

und dann mit passenden ganzen Zahlen D'_l, D''_l $(l \geqslant 0)$

$$D'^3 \equiv (D'_0, \ldots, D'_8, 2, 5, 4, 8, 7, 8, D'_{15}, \ldots, D'_{22}, 3, 5),$$
$$D''^2 \equiv (D''_0, \ldots, D''_8, 2, -3, -1, -1, 8, -1, D''_{15}, \ldots, D''_{22}, 2, -1),$$

also nach (185), (189) und (200)

$$P_8 \equiv (d_1^0 P_8, \ldots, d_1^8 P_8, 6, -3, 4, 7, 7, 7, d_1^{15} P_8, \ldots, d_1^{22} P_8, -3, 8). \tag{227}$$

Man erhält nun die Beziehungen (201) bis (205) sofort mit den bisher bewiesenen Ergebnissen:

Nach Seite 403 bzw. 404 hat man

$$C_{l,3} \neq 0 \quad \text{für} \quad l = 0, 1, 2, 3.$$

Durch Vergleich der Darstellungen (194) und (208) mit (184) folgt daraus

$$P_l \in I_{3,1} \quad \text{für} \quad l = 0, 1, 2, 3.$$

Die übrigen Inklusionen aus (201) sind offenbar Spezialfälle von (209), (211), (218), (222) und (227).

Da die Polynome P_2 und P_3 in den Variablen u_1, u_2, u_3 symmetrisch sind, folgen nach (185) die Behauptungen (202) und (203) aus (209). Wegen (188) ist (204) mit (222) bewiesen.

Ist $P = P(u_1)$ eins der Polynome $d_{23}^{22} P_4, d_2^2 P_5, d_2^4 P_6, P_7$, so besitzt P wegen (209), (211), (218) und (222) einen Grad $g \geqslant 1$, und für dieselbe Zahl g ist wegen (210), (212), (219) und (224) $D(d_1^0 P, \ldots, d_1^g P) \neq 0$. Nach (187) ist somit die Diskriminante von P von Null verschieden. Die Nullstellen von P sind infolgedessen einfach. Damit ist (205) bewiesen.

7.3. Wir beweisen nun (206). Zunächst wollen wir von P_8 den Faktor u_1^2 abspalten: Mit (223) erkennt man, daß $d_2^0 P_6$ durch u_1^2 und $d_2^1 P_6$ durch u_1 teilbar ist. Nach (190) und (191) kann man daher die Polynome D' und D'' aus (225) und (226) folgendermaßen modulo u_1^2 darstellen: Setzt man $x_l = d_2^l P_6$ $(l \geqslant 0)$, so erhält man

$$D' \equiv x_2^2 - 3x_1 x_3 \pmod{u_1^2}$$

und

$$D'' \equiv 2x_2^3 - 9x_1 x_2 x_3 \pmod{u_1^2}$$

und somit

$$4D'^3 - D''^2 \equiv 4(x_2^6 - 9x_2^4 x_1 x_3) - (4x_2^6 - 4 \cdot 9x_2^3 x_1 x_2 x_3) \equiv 0 \pmod{u_1^2}.$$

Wegen (189), (200) und (227) folgt nun

$$Q := P_8 / u_1^2 \in I_{1,22}, \tag{228}$$

und für Q hat man modulo 13 die Darstellung

$$Q \equiv (d_1^0 Q, \ldots, d_1^6 Q, 6, -3, 4, 7, 7, 7, d_1^{13} Q, \ldots, d_1^{20} Q, -3, 8) \tag{229}$$

Insbesondere ist P_8 nicht durch u_1^{10} teilbar.

Somit haben wir zu zeigen, daß die Nullstellen von Q höchstens die Vielfachheit 9 besitzen.

Dazu bezeichnen wir allgemein mit $Q^{(n)}$ $(n \geqslant 0)$ die n-te Ableitung von Q. Eine mindestens 10-fache Nullstelle von Q ist dann eine mehrfache Nullstelle von $Q^{(8)}$. Wenn also $Q^{(8)}$ lauter einfache Nullstellen besitzt, so gilt erst recht (206).

Nach (185) gilt

$$Q^{(8)} = \sum_{j=8}^{22} v_j (d_1^j Q) u_1^{j-8}$$

mit

$$v_j := j(j-1) \ldots (j-7).$$

Durch sukzessive Multiplikation erhält man

$$v_8 \equiv 7, \quad v_9 = 9v_8 \equiv -2, \quad v_{10} = \tfrac{10}{2} v_9 \equiv 3,$$
$$v_{11} = \tfrac{11}{3} v_{10} \equiv -2, \quad v_{12} = \tfrac{12}{4} v_{11} \equiv 7,$$
$$v_j \equiv 0 \quad \text{für} \quad j = 13, \ldots, 20,$$
$$v_{21} \equiv v_8 \equiv 7, \quad v_{22} \equiv v_9 \equiv -2.$$

In Verbindung mit (229) folgt also

$$Q^{(8)} \equiv (5, 5, 8, -1, -3) + (5, -3) u_1^{13} \tag{230}$$

und damit

$$Q^{(9)} \equiv (5, 3, -3, 1) - 3u_1^{13}.$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} q_1 &= Q^{(8)}, & p_1 &= (7, 1), \\ q_2 &= Q^{(9)}, & p_2 &= (2, 3, -1, 7, 3, 2, -2, 3, 8, 4), \\ q_3 &= (9, 5, 0, 8, 9), & p_3 &= (9, 7), \\ q_4 &= (0, 5, 4, 5), & p_4 &= (2, -3), \\ q_5 &= (9, -1, 7), & p_5 &= (-1, 9), \\ q_6 &= (8, 8), & & \\ q_7 &= 4, & & \end{aligned}$$

so erkennt man, daß die Kongruenzen

$$q_n \equiv q_{n+1} p_n + q_{n+2} \quad \text{für} \quad n = 1, \ldots, 5$$

erfüllt sind.

Daraus folgt: Sind P, P' und P'' Polynome aus $I[u_1]$ mit

$$Q^{(8)} = PP' \quad \text{und} \quad Q^{(9)} = PP'',$$

so gilt (vgl. (185))

$$d_1^l P \equiv 0 \quad \text{für} \quad l = 1, 2, \ldots$$

Andererseits ist dann der Anfangskoeffizient von $Q^{(8)}$ wegen (228) und (230) durch den Anfangskoeffizienten von P, aber nicht durch 13 teilbar. P ist also notwendigerweise konstant.

Mit anderen Worten: Die Polynome $Q^{(8)}$ und $Q^{(9)}$ sind im Integritätsbereich $I[u_1]$ teilerfremd. Nach dem Gaußschen Satz (vgl. [8], S. 81) können sie also keine Nullstellen gemeinsam haben.

Dies bedeutet aber gerade, daß $Q^{(8)}$ nur einfache Nullstellen besitzt. Damit ist auch (206) bewiesen.

8. Die nachfolgenden drei Unterabschnitte dienen der Definition der in Nr. 7 erwähnten Polynomsummen.

8.1. Es sei u eine Unbestimmte in bezug auf R. Ist $n \geqslant 2$, $g \geqslant 1$, P in $I_{n,g}$, und besitzt P etwa die Darstellung (184), so ordnen wir jedem X aus $(R^2)^{n-1}$ das Polynom

$$(231) \qquad P(X; u) := \sum_{l=0}^{g} \Bigl(\sum_{\substack{0 \leqslant m_j \leqslant g \\ (1 \leqslant j < n)}} A_{m_1, \ldots, m_{n-1}, l} \prod_{j=1}^{n-1} X_{j1}^{g-m_j} X_{j2}^{m_j} \Bigr) u^l$$

zu.

Ferner setzen wir dann unter Verwendung der Bezeichnung (33) und der Abkürzungen auf Seite 388 für alle X aus $(R^2)^n$

$$P(X) = P\bigl((X_1, \ldots, X_{n-1}); X_n\bigr).$$

Speziell sei P eins der Polynome $P_1, \ldots, P_6$, $d_3^1 P_1$, $d_3^1 P_2$, $d_3^1 P_3$, $d_3^2 P_4$. Wegen (201) liegt dann P für passende Zahlen $n \geqslant 2$ und $g \geqslant 1$ in $I_{n,g}$. Wegen (186) können wir also für alle X aus $(R^2)^{n-1}$ den Ausdruck

$$(d_n^g P)(X)$$

bilden.

Für jedes X aus $(R^2)^{n-1}$ mit $(d_n^g P)(X) \neq 0$ ist $P(X; u)$ ein Polynom aus $R[u]$ vom Grad g. Infolgedessen existieren komplexe Zahlen $z_j(X; P)$ für $j = 1, \ldots, g$, X aus $(R^2)^{n-1}$, derart, daß die Darstellung

$$(232) \qquad P(X; u) = (d_n^g P)(X) \prod_{j=1}^{g} \bigl(u - z_j(X; P)\bigr)$$

für alle X aus $(R^2)^{n-1}$ mit $(d_n^g P)(X) \neq 0$ gilt.

Um eine durchlaufende Numerierung der Zahlen $z_j(X; P)$ zu gewinnen, setzen wir für alle X aus $(R^2)^2$

$$(233) \qquad w_l(X) = z_1(X; P_l) \qquad (l = 1, 2, 3),$$

$$(234) \qquad w_{3+j}(X) = z_j(X; P_4) \qquad (j = 1, 2),$$

und für alle x aus R^2

$$(235) \qquad w_l(x) = z_1(x; d_3^1 P_l) \qquad (l = 1, 2, 3),$$

$$(236) \qquad w_{3+j}(x) = z_j(x; d_3^2 P_4) \qquad (j = 1, 2),$$

$$(237) \qquad w_{5+j}(x) = z_j(x; P_5) \qquad (j = 1, 2),$$

$$(238) \qquad w_{7+j}(x) = z_j(x; P_6) \qquad (j = 1, \ldots, 4).$$

Wegen (185) und (201) gilt mit passenden Zahlen w_l

$$(239) \qquad d_{23}^{11} P_l = d_{123}^{111} P_l(u_1 - w_l) \qquad (l = 1, 2, 3).$$

Ferner erkennt man, daß die Polynome $d_{23}^{22} P_4$, $d_2^2 P_5$, $d_2^4 P_6$, P_7, P_8 insgesamt 36 Nullstellen besitzen, die wir im folgenden mit $w_4, \ldots, w_{39}$ bezeichnen wollen.

Nun ist offenbar stets

$$\max(|w - w'|, |w - w''|) \geqslant \tfrac{1}{2}|w' - w''|.$$

Demnach gibt es zu beliebigen l, X, m, x, n mit

$$1 \leqslant l \leqslant 5, \quad X \text{ aus } (R^2)^2, \quad 1 \leqslant m \leqslant 11, \quad x \text{ aus } R^2, \quad 1 \leqslant n \leqslant 39$$

zugehörige Zahlen

$$(240) \qquad K(l, X), \quad K(m, x), \quad K(n) \quad \text{in } \{2, 3\},$$

derart, daß die Ungleichungen

$$|w_l(X') - w_{K(l,X)}(X')| \geqslant \tfrac{1}{2}|w_2(X') - w_3(X')|,$$
$$|w_m(x') - w_{K(m,x)}(x')| \geqslant \tfrac{1}{2}|w_2(x') - w_3(x')|,$$
$$|w_n - w_{K(n)}| \geqslant \tfrac{1}{2}|w_2 - w_3|$$

erfüllt sind.

Da nach (185) $d_3^0 P_l = P_l(u_1, u_2, 0)$ $(l = 1, 2, 3)$ ist, folgt andererseits mit (231) aus (197), (201), (232) und (233)

$$(241) \qquad \begin{aligned} P_5(X) &= P_2(X; 0)(d_3^1 P_3)(X) - P_3(X; 0)(d_3^1 P_2)(X) \\ &= (d_3^1 P_2 d_3^1 P_3)(X)(w_3 - w_2)(X) \\ &\qquad \text{für alle } X \text{ aus } (R^2)^2 \quad \text{mit } (d_3^1 P_2 d_3^1 P_3)(X) \neq 0. \end{aligned}$$

In analoger Weise folgt aus (202) und (235)

$$(242) \qquad \begin{aligned} d_2^2 P_5(x) &= (d_{23}^{11} P_2 d_{23}^{11} P_3)(x)(w_3 - w_2)(x) \\ &\qquad \text{für alle } x \text{ aus } R^2 \quad \text{mit } (d_{23}^{11} P_2 d_{23}^{11} P_3)(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Schließlich folgt aus (203) und (239)

$$(243) \qquad w_2 \neq w_3.$$

8.2. Nun sei P eins der Polynome $P_4, d_3^2P_4, P_5, P_6$. Wegen (198) bis (201), (204) und (186) ist dann mit passenden Zahlen n aus $\{2, 3\}$, g aus $\{2, 4\}$

$$P \quad \text{in} \quad I_{n,g}$$

und

(244) $$D(d_n^0P, \ldots, d_n^gP) \quad \text{in} \quad I_{n-1,2g(g-1)}.$$

Es sei ein beliebiges X aus $(R^2)^n$ gewählt, und es werde stets

(245) $$X_0 = \begin{cases} (X_1, X_2) & \text{im Falle} \quad n = 3, \\ X_1 & \text{im Falle} \quad n = 2 \end{cases}$$

gesetzt (vgl. Seite 388). Ferner sei

(246) $$\big(d_n^gPD(d_n^0P, \ldots, d_n^gP)\big)(X_0) \neq 0$$

und (vgl. (231))

(247) $$P(X) \neq 0.$$

$P(X_0; u)$ läßt sich etwa in der Gestalt (231) schreiben, wenn man dort X durch X_0 ersetzt. Daraus folgt eine Darstellung der Form

$$P(X_0; u) = a_0 + a_1u + \ldots + a_gu^g$$

mit

(248) $$a_m \ll |X_0|^g \qquad (m = 0, \ldots, g)$$

und

(249) $$a_g = (d_n^gP)(X_0) \neq 0.$$

Nach (187) ist also $D := D(a_0, \ldots, a_g)$ die Diskriminante von $P(X_0; u)$. Andererseits gilt wegen (188), (189) und (244) die Identität

$$D(a_0, \ldots, a_g) = D(d_n^0P, \ldots, d_n^gP)(X_0).$$

Insbesondere ist wegen (246) $D \neq 0$.

Daher erfüllt $P(u) = P(X_0; u)$ die Voraussetzungen von Satz 6. Die Zahlen $z_j = z_j(X_0; P)$ $(j = 1, \ldots, g)$ sind in unserem Fall die Nullstellen von $P(u)$ (vgl. (232)). Wegen (247) gilt also nach Satz 6 die Abschätzung (36) für (vgl. (198) und (234))

$$P(u) = P_4(X_0; u), \quad g = 2, \quad x = X_3, \quad D = P_6(X_0), \quad z_j = w_{3+j}(X_0) \quad (j = 1, 2)$$

und (vgl. (204) und (236))

$$P(u) = (d_3^2P_4)(X_1; u), \quad g = 2, \quad x = X_2, \quad D = (d_2^4P_6)(X_1), \\ z_j = w_{3+j}(X_1) \quad (j = 1, 2).$$

Ferner gilt die Abschätzung (35) für (vgl. (199) und (237))

$$P(u) = P_5(X_1; u), \quad g = 2, \quad l = 0, \quad x = X_2, \quad X_{21} \neq 0, \quad D = P_7(X_1), \\ z_j = w_{5+j}(X_1) \quad (j = 1, 2).$$

und (vgl. (200) und (238))

$$P(u) = P_6(X_1; u), \quad g = 4, \quad l = 2, \quad x = X_2, \quad X_{21} \neq 0, \quad D = P_8(X_1), \\ z_j = w_{7+j}(X_1) \quad (j = 1, \ldots, 4).$$

Setzt man noch

(250) $$(X, j) = |X_{n2} - w_j(X_0)X_{n1}|$$

für X aus $(R^2)^n$, $(n, j) = (2, 1), \ldots, (2, 11), (3, 1), \ldots, (3, 5)$, so erhält man unter Berücksichtigung von (248) und (249) die nachstehenden vier Abschätzungen:

Ist

(251) $$X \text{ aus } (R^2)^3 \text{ und } (d_3^2P_4P_6)(X_0)P_4(X) \neq 0,$$

so gilt

$$|X_3|\,|P_4(X)|^{-1} \ll \big|\big((d_3^2P_4)^2P_6\big)(X_0)\big|^{-1/2}|X_0|^2\sum_{j=4}^{5}(X, j)^{-1}.$$

Ist

(252) $$X \text{ aus } (R^2)^2 \text{ und } (d_{23}^{22}P_4d_2^4P_6)(X_1)(d_3^2P_4)(X) \neq 0,$$

so gilt

$$|X_2|\,|(d_3^2P_4)(X)|^{-1} \ll \big|\big((d_{23}^{22}P_4)^2d_2^4P_6\big)(X_1)\big|^{-1/2}|X_1|^2\sum_{j=4}^{5}(X, j)^{-1}.$$

Ist

(253) $$X \text{ aus } (R^2)^2 \text{ und } X_{21}P_7(X_1)P_5(X) \neq 0,$$

so gilt

$$|P_5(X)|^{-1} \ll |P_7(X_1)|^{-1/2}|X_{21}|^{-1}\sum_{j=6}^{7}(X, j)^{-1}.$$

Ist

(254) $$X \text{ aus } (R^2)^2 \text{ und } X_{21}P_8(X_1)P_6(X) \neq 0,$$

so gilt

$$|X_2|^2\,|P_6(X)|^{-1} \ll |P_8(X_1)|^{-1/2}|X_1|^8|X_{21}|^{-1}\sum_{j=8}^{11}(X, j)^{-1}.$$

Schließlich bemerken wir noch, daß auf Grund der Bezeichnung (231) mit passendem c_{15} die Ungleichungen

(255) $$|(d_3^1P_l)(X)| \leq c_{15}|X| \qquad (l = 1, 2, 3;\ X \in (R^2)^2)$$

und

(256) $$\big|\big((d_3^2P_4)^2P_6\big)(X)\big|^{1/2} \leq c_{15}|X|^4 \qquad (X \in (R^2)^2)$$

gelten.

8.3. Wir setzen für jedes X aus $(R^2)^2$ im Falle $l = 1, 2, 3$

(257) $$J_l(X) = \begin{cases} c_{15}|X'|\,|(d_3^1P_l)(X')|^{-1}, & \text{falls} \quad (d_3^1P_l)(X') \neq 0, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

und im Falle $l = 4, 5$

(258) $$J_l(X) = \begin{cases} c_{15}|X'|^4 \left|\left((d_3^2 P_4)^2 P_6\right)(X')\right|^{-1/2}, & \text{falls} \quad (d_3^2 P_4 P_6)(X') \neq 0\,, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen (255) und (256) ist dann für $l = 1, \ldots, 5$ und alle X aus $(R^2)^2$

(259) $$J_l(X) \geqslant 1\,.$$

Unter Verwendung von (240), (245), (250) und

(260) $$(x, m) := |x_2 - w_m x_1| \qquad (m = 1, \ldots, 39;\ x \in R^2)$$

bilden wir nun die Mengen

$$E_0 = \{x \in R^2\colon\ (x', m) > 1 \text{ für } m = 1, \ldots, 39\}\,,$$
$$E_m = \{x \in R^2\colon\ (x', m) \leqslant 1,\ (x', K(m)) > 1\} \quad (m = 1, \ldots, 39)\,,$$
$$E_{40} = \{x \in R^2\colon\ (x', m) \leqslant 1 \text{ für } m = 2, 3\}\,,$$
$$E_{0,0} = \{X \in (R^2)^2\colon\ X_1 \in E_0,\ (X', m) > 1 \text{ für } m = 1, \ldots, 11\}\,,$$
$$E_{0,m} = \{X \in (R^2)^2\colon\ X_1 \in E_0,\ (X', m) \leqslant 1,\ (X', K(m, X_1)) > 1\} \quad (m = 1, \ldots, 11)\,,$$
$$E_{0,12} = \{X \in (R^2)^2\colon\ X_1 \in E_0,\ (X', m) \leqslant 1 \text{ für } m = 2, 3\}\,,$$
$$E_{m,0} = \{X \in (R^2)^2\colon\ X_1 \in E_m,\ (X', K(m)) > 1\} \quad (m = 1, \ldots, 39)\,,$$
$$E_{m,1} = \{X \in (R^2)^2\colon\ X_1 \in E_m,\ (X', K(m)) \leqslant 1\} \quad (m = 1, \ldots, 39)\,,$$
$$E_{0,0,0} = \{X \in (R^2)^3\colon\ X_0 \in E_{0,0},\ (X', m) > J_m(X_0) \text{ für } m = 1, \ldots, 5\}$$
$$E_{0,0,m} = \{X \in (R^2)^3\colon\ X_0 \in E_{0,0},\ (X', m) \leqslant J_m(X_0),\ (X', K) > J_K(X_0)\,,$$
$$K := K(m, X_0),\ X_{31} \neq 0\} \quad (m = 1, \ldots, 5)\,,$$
$$E_{0,0,6} = \{X \in (R^2)^3\colon\ X_0 \in E_{0,0},\ (X', m) \leqslant J_m(X_0) \text{ für } m = 2, 3\}\,,$$
$$E_{0,0,7} = \{X \in (R^2)^3\colon\ X_0 \in E_{0,0},\ X_{31} = 0,\ |X_{32}| \leqslant \max_{l=1,\ldots,5} J_l(X_0)\}\,,$$
$$E_{0,m,0} = \{X \in (R^2)^3\colon\ X_0 \in E_{0,m},\ (X', m) > J_{K(m,X_1)}(X_0)\} \quad (m = 1, \ldots, 11)\,,$$
$$E_{0,m,1} = \{X \in (R^2)^3\colon\ X_0 \in E_{0,m},\ (X', m) \leqslant J_{K(m,X_1)}(X_0)\} \quad (m = 1, \ldots, 11)\,,$$
$$E_{m,0,0} = \{X \in (R^2)^3\colon\ X_0 \in E_{m,0},\ (X', m) > J_{K(m)}(X_0)\} \quad (m = 1, \ldots, 39)\,,$$
$$E_{m,0,1} = \{X \in (R^2)^3\colon\ X_0 \in E_{m,0},\ (X', m) \leqslant J_{K(m)}(X_0)\} \quad (m = 1, \ldots, 39)$$

und aus formalen Gründen die Mengen

$$E_{40,0} = \{X \in (R^2)^2\colon\ X_1 \in E_{40}\} \quad \text{und} \quad E_{j,k,l} = \{X \in (R^2)^3\colon\ X_0 \in E_{j,k}\}$$

für $(j, k, l) = (40, 0, 0), (0, 12, 0), (m, 1, 0)$ $(m = 1, \ldots, 39)$.

Ferner soll für alle (j, k, l), für die bisher $E_{j,k,l}$ nicht definiert wurde, $E_{j,k,l}$ bzw. $E_{j,k}$ bzw. E_j den leeren Teil von $(R^2)^3$ bzw. $(R^2)^2$ bzw. R^2 bezeichnen.

Dann gilt offenbar stets

(261) $$\begin{cases} \bigcup_l E_{j,k,l} = E_{j,k} \times R^2\,, \\ \bigcup_k E_{j,k} = E_j \times R^2\,, \\ \bigcup_j E_j = R^2\,. \end{cases}$$

Für $g = 0, \ldots, 3$ und alle X aus $(R^2)^2$ setzen wir (vgl. (240))

(262) $$h_{g,j,k,l}(X) = \begin{cases} 2^{g-1}, & \text{falls} \quad 1 \leqslant g \leqslant 3,\ j = k = l = 0\,, \\ K(l, X), & \text{falls} \quad j = k = 0,\ 1 \leqslant l \leqslant 5\,, \\ K(k, X_1), & \text{falls} \quad j = l = 0,\ 1 \leqslant k \leqslant 11\,, \\ K(j), & \text{falls} \quad k = l = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant 39\,, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$q_{g,j,k,l} = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad g = 1,\ j = k = l = 0\,, \\ \frac{1}{2}, & \text{falls} \quad g = 2, 3;\ 0 \leqslant j \leqslant 39,\ 0 \leqslant k \leqslant 11,\ 0 \leqslant l \leqslant 5 \\ & \qquad \text{und } jk = jl = kl = 0\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Unsere Polynomsummen werden nun mit Hilfe der Polynome $P_1, \ldots, P_4$ und der in (93) und (102) eingeführten Zahlen T_l, T'_l wie folgt definiert: Für $0 \leqslant g \leqslant 3$, alle X aus $(R^2)^2$ und alle x aus R^2 sei

(263) $$S_{g,j,k,l}(X) = (T'_3 T_3)^{-1} \sum_{\substack{n \in R^2 \\ |n'| \leqslant T_3 \\ (X_1, X_2, n) \in E_{j,k,l}}} \left[|P_m(Z)|^{-q}\right]_{\substack{m = h_{g,j,k,l}(X) \\ q = q_{g,j,k,l} \\ Z = (X'_1, X'_2, n')}}\,,$$

(264) $$S_{g,j,k,l}(x) = (T'_2 T_2)^{-1} \sum_{\substack{n \in R^2 \\ |n'| \leqslant T_2 \\ (x, n) \in E_{j,k}}} \left|S_{g,j,k,l}((x, n))\right|^{1/2}$$

und

(265) $$S_{g,j,k,l} = (T'_1 T_1)^{-1} \sum_{\substack{n \in E_j \\ |n'| \leqslant T_1}} |S_{g,j,k,l}(n)|^{1/2}\,.$$

9. Zur Abschätzung dieser Summen ziehen wir die Sätze 7 bis 9 heran. Dazu bezeichnen wir zunächst die Summe

$$(T'_l T_l)^{-1} \sum_{\substack{n \in R^2 \\ |n'_2 - w n'_1| \leqslant W \\ |n'_2 - z n'_1| \leqslant Z}} 1$$

im Falle

$$l = 3,\ w = w_2(X'),\ z = w_3(X'),\ W = J_2(X),\ Z = J_3(X) \qquad (X \in (R^2)^2)$$

mit

(266) $$S'(X)\,,$$

im Falle

$$l=2,\quad w=w_2(x'),\quad z=w_3(x'),\quad W=Z=1\quad (x\in R^2)$$

mit

(267) $$S'(x)$$

und im Falle

$$l=1,\quad w=w_2,\quad z=w_3,\quad W=Z=1$$

mit

(268) $$S'.$$

Für alle

$$X \text{ aus } (R^2)^2 \text{ mit } (P_5 d_3^1 P_2 d_3^1 P_3)(X')\neq 0$$

folgt wegen (241) und (259) mit Hilfe der Abschätzung (41) aus Satz 9

$$S'(X)\ll |T_3'T_3 v(w_3-w_2)(X')|^{-1}J_2(X)J_3(X)+(T_3'T_3)^{-1}\big(J_2(X)+J_3(X)\big),$$

also wegen (102) und (257)

(269) $$S'(X)\ll T_3^{-2}|X'|^2|P_5(X')|^{-1}+vT_3^{-2}\big(J_2(X)+J_3(X)\big).$$

Ganz analog folgt wegen (242) für alle

$$x \text{ aus } R^2 \text{ mit } (d_2^2P_5 d_{23}^{11}P_2 d_{23}^{11}P_3)(x')\neq 0$$

die Abschätzung

(270) $$S'(x)\ll T_2^{-2}\Big|\big(d_{23}^{11}P_2 d_{23}^{11}P_3(d_2^2P_5)^{-1}\big)(x')\Big|+vT_2^{-2}$$

und schließlich wegen (247) und $1\ll v$ (vgl. (57), (58) und (65))

(271) $$S'\ll vT_1^{-2}.$$

Wir bezeichnen nun die Summe

$$(T_l'T_l)^{-1}\sum_{\substack{n\in R^2\\ |n_2'-zn_1'|>1\\ |n_2'-wn_1'|\leqslant W\\ 0<|n_1'|\leqslant T_l}}|n_2'-zn_1'|^{-q}$$

im Falle

$$l=3,\quad w=w_m(X'),\quad z=w_{K(m,X)}(X'),\quad W=J_m(X),\quad q=\tfrac12$$
$$(X\in(R^2)^2,\ 1\leqslant m\leqslant 5)$$

mit

(272) $$S_m''(X),$$

im Falle

$$l=2,\quad w=w_m(x'),\quad z=w_{K(m,x)}(x'),\quad W=1,\quad 0\leqslant q\leqslant\tfrac12$$
$$(x\in R^2,\ 1\leqslant m\leqslant 11)$$

mit

(273) $$S_{m,q}''(x)$$

und im Falle

$$l=1,\quad w=w_m,\quad z=w_{K(m)},\quad W=1,\quad 0\leqslant q\leqslant\tfrac12\quad(1\leqslant m\leqslant 39)$$

mit

(274) $$S_{m,q}''.$$

Mit Hilfe der Abschätzung (42) erhalten wir aus (240) bis (243) und (257) bis (259) für alle

$$X \text{ aus } (R^2)^2 \text{ mit } (P_5 d_3^1 P_2 d_3^1 P_3)(X')\neq 0$$

(275) $$S_m''(X)\ll T_3^{-3/2}|(d_3^1P_2d_3^1P_3P_5^{-1})(X')|^{1/2}J_m(X)\quad(1\leqslant m\leqslant 5),$$

für alle

$$x \text{ aus } R^2 \text{ mit } (d_2^2P_5 d_{23}^{11}P_2 d_{23}^{11}P_3)(x')\neq 0$$

(276) $$S_{m,q}''(x)\ll T_2^{-q-1}\Big|\big(d_{23}^{11}P_2 d_{23}^{11}P_3(d_2^2P_5)^{-1}\big)(x')\Big|^q\quad(1\leqslant m\leqslant 11,\ 0\leqslant q\leqslant\tfrac12)$$

und

(277) $$S_{m,q}''\ll T_1^{-q-1}\quad(1\leqslant m\leqslant 39,\ 0\leqslant q\leqslant\tfrac12).$$

Ferner bilden wir die Ausdrücke

(278) $$S_{l,q,q'}:=(T_l'T_l)^{-1}\sup_z\sum_{\substack{n\in R^2,|n'|\leqslant T_l\\ |n_2'-zn_1'|>1\\ |n_1'|^q\neq 0}}|n_1'|^{-q}|n_2'-zn_1'|^{-q'}$$

für $l=1,2,3$ und $q,q'\geqslant 0$ und

(279) $$S_{l,q}:=(T_l'T_l)^{-1}\sum_{\substack{n\in R,|n|\leqslant T_l\\ |n|^q\neq 0}}|n|^{-q}\quad\text{für}\quad l=1,2 \text{ und } q\geqslant 0.$$

Aus der Summationsbedingung

$$n\in R^2,\quad |n'|\leqslant T_l$$

folgt wegen (100) bis (102)

$$|n_2+vn_1|\leqslant T_l,\quad |n_1|\leqslant T_l'.$$

Wegen $T_l\geqslant 1$ und $T_l'\geqslant 1$ können wir somit zur Abschätzung dieser Ausdrücke Satz 8 verwenden (vgl. (38)).

Da wegen (60) und (93) $T_l\ll t$ ist, erhält man

(280) $$S_{l,q,q'}\ll (T_l'T_l)^{-1}v^{-q}T_l'^{1-q}T_l^{1-q'}M_qM_{q'},\quad\text{für}\quad 0\leqslant q,\ q'\leqslant 1$$

und

(281) $$S_{l,q}\ll (T_l'T_l)^{-1}T_l^{1-q}\quad\text{für}\quad 0\leqslant q\leqslant\tfrac12$$

mit
$$M_q: = \begin{cases} (1-q)^{-1} & \text{für} \quad 0 \leqslant q < 1\,, \\ \log t & \text{für} \quad q = 1\,. \end{cases}$$
Berücksichtigt man nun die Ungleichung $T_l' \geqslant (2v)^{-1} T_l$ in (280) und die Ungleichung $T_l' \geqslant 1$ in (281), so findet man

(282) $$S_{l,q,q'} \ll M_q M_{q'} T_l^{-q-q'} \quad \text{für} \quad 0 \leqslant q,\ q' \leqslant 1$$
und

(283) $$S_{l,q} \ll T_l^{-q} \quad \text{für} \quad 0 \leqslant q \leqslant \tfrac{1}{2}\,.$$

Schließlich führen wir noch die Summen (vgl. (250) und (260))
$$s_q(X): = \sum_{m=1}^{11} (X', m)^{-q} \quad \text{für} \quad q \geqslant 0 \text{ und } X \in E_{0,0}$$
und
$$s_q(x): = \sum_{m=1}^{39} (x', m)^{-q} \quad \text{für} \quad q \geqslant 0 \text{ und } x \in E_0$$
ein.

Ist $q, q' \geqslant 0$, so gelten für alle X aus $E_{0,0}$ bzw. E_0 die trivialen Abschätzungen

(284) $$s_q(X)\, s_{q'}(X) \ll s_{q+q'}(X)$$
und

(285) $$s_q^{q'}(X) \ll s_{qq'}(X)\,.$$

Aus der Darstellung (232) folgt in Verbindung mit den Abkürzungen (235) bis (237) und den unter (239) definierten Zahlen w_l:

(286) Ist (P, n) eins der Paare $(d_3^1 P_l, 1)$ $(1 \leqslant l \leqslant 3)$, $(d_3^2 P_4, 2)$, $(P_5, 2)$, so gilt für alle X aus $E_{0,0}$
$$|P(X')|^{-1} \ll s_n(X_1)\, s_n(X)\,.$$

Ferner erhält man mit Satz 7 (vgl. (37)) aus (201), (205) und (206):

(287) Ist (m, P, q) eins der Tripel $(1, d_{23}^{22} P_4, 1)$, $(1, d_2^2 P_5, 1)$, $(3, d_2^4 P_6, 1)$, $(3, P_7, 1)$, $(15, P_8, 9)$, so gilt für alle x aus E_0
$$|x'|^m\, |P(x')|^{-1} \ll s_q(x)\,.$$

9.1. Es sei X aus $E_{0,0}$.

Verbindet man (263) mit (278), (285) und (286), so kommt

(288) $$S_{1,0,0,0}(X) \ll s_1(X_1)\, s_1(X)\, S_{3,0,1}\,,$$
(289) $$S_{2,0,0,0}(X) \ll s_{1/2}(X_1)\, s_{1/2}(X)\, S_{3,0,1/2}$$
und

(290) $$S_{3,0,0,0}(X) \ll s_1(X_1)\, s_1(X)\, S_{3,0,1}\,.$$

Ist $1 \leqslant l \leqslant 5$, so liefert zunächst die triviale Abschätzung wegen (259)

(291) $$S_{0,0,0,l}(X) \ll T_3^{-1} J_l(X)\,,$$
und nach (272) wird
$$S_{2,0,0,l}(X) \ll |d_3^1 P_{K(l,X)}(X')|^{-1/2} S_l''(X)\,,$$
also wegen (240) und (275)

(292) $$S_{2,0,0,l}(X) \ll T_3^{-3/2} J_l'$$
mit

(293) $$J_l': = |X'|^{1/2}\, |P_5(X')|^{-1/2} J_l(X')\,.$$

Ferner erhält man mit (266)

(294) $$S_{0,0,0,6}(X) \ll S'(X)\,.$$

Die triviale Abschätzung gibt wegen (102) und (259)

(295) $$S_{0,0,0,7}(X) \ll v T_3^{-2} \max_{m=1,\dots,5} J_m(X)\,.$$

Wegen (257) und (286) gilt

(296) $$J_l(X) \ll |X'|\, s_1(X_1)\, s_1(X) \quad \text{für} \quad l = 1, 2, 3\,.$$

Zur Abschätzung der Ausdrücke $J_l(X)$ $(l = 4, 5)$ und J_l' $(l = 1, 2, 3)$ bemerken wir, daß X' an Stelle von X der Bedingung (252) und im Falle $X_{21} \neq 0$ auch den Bedingungen (253) und (254) genügt. In Verbindung mit (287) folgt also
$$|X_1'|^{5/2}\, |X_2'|\, |(d_3^2 P_4)(X')|^{-1} \ll |X_1'|^2 s_{3/2}(X_1)\, s_1(X)$$
und im Falle $X_{21} \neq 0$
$$|X_1'|^{3/2}\, |P_5(X')|^{-1} \ll |X_{21}'|^{-1} s_{1/2}(X_1)\, s_1(X)$$
und
$$|X_1'|^{15/2}\, |X_2'|^2\, |P_6(X')|^{-1} \ll |X_1'|^8\, |X_{21}'|^{-1} s_{9/2}(X_1)\, s_1(X)\,.$$

Im Falle $X_{21} \neq 0$ erhält man daher aus (258), (284) und (285)
$$J_4(X) = J_5(X) \ll |X_1'|^{4-1/2+1/4}\, |X_2'|^{4-1-1}\, |X_{21}'|^{-1/2} s_{15/4}(X)\, s_{3/2}(X)\,.$$

Im Falle $X_{21} = 0$ ist offensichtlich $|X'| = |X_1'|\, |X_{22}| \neq 0$, also wegen (232) und (287)
$$|X'|\, |P_5(X')|^{-1} \ll |X_1'|\, |X_{22}(d_2^2 P_5)(X_1')|^{-1} \ll |X_{22}|^{-1} s_1(X_1)$$
und wegen (201)
$$J_4(X) \ll |X_1'|^4 \left|\left((d_{23}^{22} P_4)^2 d_2^4 P_6\right)(X_1')\right|^{-1/2} \ll |X_1'|^{1/2} s_{3/2}(X)\,.$$

Insgesamt folgt also

$$(297)\quad J_l(X) \ll \begin{cases} |X_1'|^{15/4}\,|X_2'|^2\,|X_{21}'|^{-1/2} s_{15/4}(X_1)\, s_{3/2}(X), & \text{falls} \quad X_{21} \neq 0\,, \\ |X_1'|^{3/2} s_{3/2}(X_1), & \text{falls} \quad X_{21} = 0 \end{cases}$$

für $l = 4, 5$ und (vgl. (284) bis (286), (293) und (296))

$$(298)\quad J_l' \ll \begin{cases} |X'|^{3/2} s_2(X_1)\, s_2(X), & \text{falls} \quad 1 \leqslant l \leqslant 3\,, \\ |X_1'|^{14/4}\,|X_2'|^{5/2}\,|X_{21}'|^{-1} s_4(X_1)\, s_2(X), & \text{falls} \quad l = 4, 5;\ X_{21} \neq 0\,, \\ |X_1'|^{3/2}\,|X_{22}|^{-1/2} s_2(X_1), & \text{falls} \quad l = 4, 5;\ X_{21} = 0\,. \end{cases}$$

Außerdem hat man

$$(299)\quad \frac{|X'|^2}{|P_5(X')|} \ll \begin{cases} |X_1'|^{1/2}\,|X_2'|^2\,|X_{21}'|^{-1} s_{1/2}(X_1)\, s_1(X), & \text{falls} \quad X_{21} \neq 0\,, \\ |X_1'|\, s_1(X_1), & \text{falls} \quad X_{21} = 0\,. \end{cases}$$

9.2. Ist $1 \leqslant j \leqslant 39$, $1 \leqslant k \leqslant 11$, $jk = 0$, X aus $E_{j,k}$, und setzt man

$$K = \begin{cases} K(k, X_1) & \text{im Falle} \quad j = 0\,, \\ K(j) & \text{im Falle} \quad k = 0\,, \end{cases}$$

so gelten wegen (259), (263) und (278) die Abschätzungen

$$S_{0,j,k,1}(X) \ll T_3^{-1} J_K(X)$$

und

$$S_{2,j,k,0}(X) \ll |(d_3^1 P_K)(X')|^{-1/2} S_{3,0,1/2}\,.$$

Ferner gilt für alle j, k, l und alle X aus $(R^2)^2$ die triviale Abschätzung

$$S_{0,j,k,l}(X) \ll 1\,.$$

9.3. Wir setzen nun die in 9.1. und 9.2. gewonnenen Abschätzungen der Summen $S_{g,j,k,l}(X)$ in (264) ein. Unter Beachtung von (278), (279) und (285) folgt dann aus (288) bis (293) und (296) bis (298) für alle x aus E_0

$$S_{1,0,0,0}(x) \ll s_{1/2}(x)\, S_{2,0,1/2} S_{3,0,1}^{1/2}\,,$$
$$S_{2,0,0,0}(x) \ll s_{1/4}(x)\, S_{2,0,1/4} S_{3,0,1/2}^{1/2}\,,$$
$$S_{3,0,0,0}(x) \ll s_{1/2}(x)\, S_{2,0,1/2} S_{3,0,1}^{1/2}\,,$$
$$S_{0,0,0,l}(x) \ll T_3^{-1/2} J_6(x) \quad \text{für} \quad l = 1, \ldots, 5$$

mit

$$J_6(x)\colon = |x'|^{1/2} T_2^{1/2} s_{1/2}(x)\, S_{2,0,1/2} + |x'|^{15/8} T_2 s_{15/8}(x)\, S_{2,1/4,3/4} + |x'|^{3/4} s_{3/4}(x)\, S_{2,0}\,,$$
$$S_{2,0,0,l}(x) \ll T_3^{-3/4} |x'|^{3/4} T_2^{3/4} s_1(x)\, S_{2,0,1} \quad \text{für} \quad l = 1, 2, 3\,,$$
$$S_{2,0,0,l}(x) \ll T_3^{-3/4} \big(|x'|^{7/4} T_2^{5/4} s_2(x)\, S_{2,1/2,1} + |x'|^{3/4} s_1(x)\, S_{2,1/4}\big) \quad \text{für} \quad l = 4, 5\,,$$

und aus (269), (294), (295), (297) und (299) folgt für $l = 6, 7$, $x \in E_0$

$$S_{0,0,0,l}(x) \ll T_3^{-1}\big(|x'|^{1/4} T_2 s_{1/4}(x)\, S_{2,1/2,1/2} + |x'|^{1/2} s_{1/2}(x)\, S_{2,0}\big) + v^{1/2} T_3^{-1} J_6(x)\,.$$

Für $k = 1, \ldots, 11$, $x \in E_0$, $K = K(k, x)$ ist nach (257) und (273)

$$S_{0,0,k,0}(x) \ll T_2^{-1}\,,$$
$$S_{0,0,k,1}(x) \ll T_3^{-1/2} |x'|^{1/2} T_2^{1/2} S_{k,1/2}''(x)\, |(d_{23}^{11} P_K)(x')|^{-1/2}\,,$$
$$S_{2,0,k,0}(x) \ll S_{k,1/4}''(x)\, S_{3,0,1/2}^{1/2} |(d_{23}^{11} P_K)(x')|^{-1/4}\,,$$

und nach (267) ist

$$S_{0,0,12,0}(x) \ll S'(x)\,.$$

Für $j = 1, \ldots, 39$, $x \in E_j$, $K = K(j)$ folgt

$$S_{0,j,0,0}(x) \ll 1\,,$$
$$S_{0,j,1,0}(x) \ll T_2^{-1}\,,$$
$$S_{0,j,0,1}(x) \ll T_3^{-1/2} |x'|^{1/2} T_2^{1/2} S_{2,0,1/2} |(d_{23}^{11} P_K)(x')|^{-1/2}\,,$$
$$S_{2,j,0,0}(x) \ll S_{2,0,1/4} S_{3,0,1/2}^{1/2} |(d_{23}^{11} P_K)(x')^{-1/4}\,.$$

Schließlich findet man für alle $x \in R^2$

$$S_{0,40,0,0}(x) \ll 1\,.$$

Setzt man diese Abschätzungen in (265) ein, so folgt unter Beachtung von (278), (279) und (285)

$$S_{1,0,0,0} \ll S_{1,0,1/4} S_{2,0,1/2}^{1/2} S_{3,0,1}^{1/4}\,,$$
$$S_{2,0,0,0} \ll S_{1,0,1/8} S_{2,0,1/4}^{1/2} S_{3,0,1/2}^{1/4}\,,$$
$$S_{3,0,0,0} \ll S_{1,0,1/4} S_{2,0,1/2}^{1/2} S_{3,0,1}^{1/4}\,,$$
$$S_{0,0,0,l} \ll T_3^{-1/4} J_7 \quad \text{für} \quad l = 1, \ldots, 5$$

mit

$$J_7\colon = T_1^{1/4} T_2^{1/4} S_{1,0,1/4} S_{2,0,1/2}^{1/2} + T_1^{15/16} T_2^{1/2} S_{1,0,15/16} S_{2,1/4,3/4}^{1/2} + T_3^{3/8} S_{1,0,3/8} S_{2,0}^{1/2}\,,$$
$$S_{2,0,0,l} \ll T_3^{-3/8} T_1^{3/8} T_2^{3/8} S_{1,0,1/2} S_{2,0,1}^{1/2} \quad \text{für} \quad l = 1, 2, 3\,,$$
$$S_{2,0,0,l} \ll T_3^{-3/8} \big(T_1^{7/8} T_2^{5/8} S_{1,0,1} S_{2,1/2,1}^{1/2} + T_1^{3/8} S_{1,0,1/2} S_{2,1/4}^{1/2}\big) \quad \text{für} \quad l = 4, 5\,,$$
$$S_{0,0,0,l} \ll T_3^{-1/2} \big(T_1^{1/8} T_2^{1/2} S_{1,0,1/8} S_{2,1/2,1/2}^{1/2} + T_1^{1/4} S_{1,0,1/4} S_{2,0}^{1/2}\big) + v^{1/4} T_3^{-1/2} J_7 \quad \text{für} \quad l = 6, 7\,.$$

Für $k = 1, \ldots, 11$ folgt wegen (240), (276) und (287)

$$S_{0,0,k,0} \ll T_2^{-1/2}\,,$$
$$S_{0,0,k,1} \ll T_3^{-1/4} T_1^{1/4} T_2^{1/4} T_2^{-3/4} S_{1,0,1/4}\,,$$
$$S_{2,0,k,0} \ll T_2^{-5/8} S_{1,0,1/8} S_{3,0,1/2}^{1/4}\,,$$

und wegen (270) und (287) gilt

$$S_{0,0,12,0} \ll T_2^{-1} T_1^{1/2} S_{1,0,1/2} + v^{1/2} T_2^{-1}.$$

Für $j = 1, \ldots, 39$ erhält man mit (274)

$$\begin{aligned} S_{0,j,0,0} &\ll T_1^{-1}, \\ S_{0,j,1,0} &\ll T_1^{-1} T_2^{-1/2}, \\ S_{0,j,0,1} &\ll T_3^{-1/4} T_1^{1/4} T_2^{1/4} S_{2,0,1/2}^{1/2} S''_{j,1/4}, \\ S_{2,j,0,0} &\ll S_{2,0,1/4}^{1/2} S_{3,0,1/2}^{1/4} S''_{j,1/8}. \end{aligned}$$

Schließlich erhält man nach (268)

$$S_{0,40,0,0} \ll S'.$$

Im folgenden benötigen wir die wegen (43), (49), (50) und (94) gültige Ungleichung

(300) $$v' \geqslant 1.$$

Verbindet man nun die obigen Abschätzungen der Summen $S_{g,j,k,l}$ mit (95), (169), (282), (283), (277), (271) und (300), so ergibt sich

$$\begin{aligned} S_{1,0,0,0} &\ll T^{-1/4} \log^{1/4} t, \\ S_{2,0,0,0} &\ll T^{-1/8}, \\ S_{3,0,0,0} &\ll T^{-1/4} \log^{1/4} t, \\ J_7 &\ll 1, \\ S_{0,0,0,l} &\ll T_3^{-1/4} \quad \text{für} \quad l = 1, \ldots, 5, \\ S_{2,0,0,l} &\ll T^{-1/8} T_3^{-1/4} \log^{1/2} t \quad \text{für} \quad l = 1, 2, 3, \\ S_{2,0,0,l} &\ll T^{-1/8} T_3^{-1/4} \log^{3/2} t \quad \text{für} \quad l = 4, 5, \\ S_{0,0,0,l} &\ll v'^{1/4} T_3^{-1/2} \quad \text{für} \quad l = 6, 7, \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} S_{0,0,k,0} &\ll T_2^{-1/2}, \\ S_{0,0,k,1} &\ll T_2^{-1/2} T_3^{-1/4}, \\ S_{2,0,k,0} &\ll T^{-1/8} T_2^{-1/2}, \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad k = 1, \ldots, 11$$

$$S_{0,0,12,0} \ll v'^{1/2} T_2^{-1},$$

$$\left.\begin{aligned} S_{0,j,0,0} &\ll T_1^{-1}, \\ S_{0,j,1,0} &\ll T_1^{-1} T_2^{-1/2}, \\ S_{0,j,0,1} &\ll T_1^{-1} T_3^{-1/4}, \\ S_{2,j,0,0} &\ll T^{-1/8} T_1^{-1}, \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, 39$$

$$S_{0,40,0,0} \ll v' T_1^{-2}.$$

10. Wir können nun die Frage nach der Anwendbarkeit der Abschätzungen (170), (174) und (183) beantworten. Zunächst finden wir mit (114), (132), (164), (180), (192) bis (196), (201) und (231) die Identitäten

$$\begin{aligned} U_l(X) &= 2^{-3-l} P_l(X') \quad \text{für} \quad l = 0, 1, 2, \\ U'(X) &= 2^{-4} P_3(X'), \\ U(X) &= 3 \cdot 2^{-8} P_4(X'). \end{aligned}$$

Daraus folgt wegen (232), (250), (257), (258) und wegen der im Zusammenhang mit (251) gültigen Abschätzung mit passendem c_{16}: Ist

(301) $$X \text{ aus } E_{0,0,0} \text{ und } |X'_m| \leqslant T_m \quad \text{für} \quad m = 1, 2, 3,$$

so gilt (vgl. Seite 388 und (245))

$$|U_l(X)| > c_{16} |X'| T_3^{-1} \quad \text{für} \quad l = 1, 2$$

und

$$|U(X)| > c_{16} |X'|^2 T_3^{-1}.$$

Ist

(302) $$(j, k, l) \neq 0, \quad X \text{ aus } E_{j,k,l} \text{ und } |X'_m| \leqslant T_m \quad \text{für} \quad m = 1, 2, 3$$

so gilt im Falle (vgl. (262) und (240))

(303) $$h_{0,j,k,l}(X) = 2$$

die Ungleichung

$$|U_2(X)| > c_{16} |X'| T_3^{-1}$$

und im Falle

(304) $$h_{0,j,k,l}(X) = 3$$

die Ungleichung

$$|U'(X)| > c_{16} |X'| T_3^{-1}.$$

Daher setzen wir jetzt im Anschluß an die Bedingungen (58) und (60) die Ungleichung

(305) $$\beta \leqslant c_{17} a T_3^{-1}$$

mit

$$c_{17} := c_{16} \left(2 \max(c_8, c_{12}, 40 c_7)\right)^{-1}$$

voraus.

Aus (301) folgt dann (116), (138) und (167), aus (302) und (303) folgt (116) und (171), und aus (302) und (304) folgt (116) und (181). Man erkennt also:

Für alle X, die der Bedingung (301) genügen, gilt (170), und für alle X, die den Bedingungen (302) und (303) bzw. (302) und (304) genügen, gilt (174) bzw. (183).

Ferner bemerken wir, daß wegen (172), (182) und (300)

$$H_4 \leqslant H_6$$

ist. Für alle X aus $(R^2)^3$ hat man wegen (107), (108) und der im Zusammenhang mit (98) durchgeführten Betrachtung die triviale Abschätzung

$$S_5(X) \ll v' r'^2 \beta/a\,.$$

Verbindet man diese Ergebnisse mit (103), (106), (111) und (261) bis (265) so bekommt man

$$(306)\qquad S_4(A, y, Y) \ll (v' r'^2 \beta/a)^{7/8} H_7^{1/2}\,,$$

wo

$$\begin{aligned} H_7 :\, = H_0^{1/4} &+ \sum_{g=1}^{3} H_g^{1/4} S_{g,0,0,0} + \\ &+ H_6^{1/4}\Big(\sum_{j=1}^{39} S_{0,j,0,0} + \sum_{k=1}^{11} S_{0,0,k,0} + \sum_{l=1}^{5} S_{0,0,0,l}\Big) + \\ &+ H_5^{1/4}\Big(\sum_{j=1}^{39} S_{2,j,0,0} + \sum_{k=1}^{11} S_{2,0,k,0} + \sum_{l=1}^{5} S_{2,0,0,l}\Big) + \\ &+ (v' r'^2 \beta/a)^{1/4}\Big(S_{0,40,0,0} + S_{0,0,12,0} + S_{0,0,0,6} + S_{0,0,0,7} + \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{39} (S_{0,j,1,0} + S_{0,j,0,1}) + \sum_{k=1}^{11} S_{0,0,k,1}\Big) \end{aligned}$$

gesetzt ist.

Mit Hilfe der Abschätzungen auf Seite 422 erhält man

$$\begin{aligned} (307)\qquad H_7 \ll H_0^{1/4} &+ (H_1 T^{-1}\log t)^{1/4} + (H_2 T^{-1/2})^{1/4} + (H_3 T^{-1}\log t)^{1/4} + \\ &+ H_6^{1/4}(T_1^{-1} + T_2^{-1/2} + T_3^{-1/4}) + \\ &+ (H_5 T^{-1/2})^{1/4}(T_1^{-1} + T_2^{-1/2} + T_3^{-1/4}\log^{3/2} t) + \\ &+ (v' r'^2 \beta/a)^{1/4}(v' T_1^{-2} + v'^{1/2} T_2^{-1} + v'^{1/4} T_3^{-1/2} + \\ &\qquad + T_1^{-1} T_2^{-1/2} + T_1^{-1} T_3^{-1/4} + T_2^{-1/2} T_3^{-1/4})\,. \end{aligned}$$

Daher sei jetzt speziell

$$v' T_1^{-2} = v'^{1/2} T_2^{-1} = v'^{1/4} T_3^{-1/2}\,.$$

Das bedeutet:

$$(308)\qquad T_2 = v'^{-1/2} T_1^2, \qquad T_3 = v'^{-3/2} T_1^4$$

und demnach

$$(309)\qquad T = T_1 T_2 T_3 = v'^{-2} T_1^7\,.$$

Ferner ist dann wegen (300)

$$T_1^{-1} \leqslant T_2^{-1/2} \leqslant T_3^{-1/4}$$

und somit

$$T_1^{-1} T_2^{-1/2} \leqslant T_1^{-1} T_3^{-1/4} \leqslant T_2^{-1/2} T_3^{-1/4} \leqslant v'^{1/4} T_3^{-1/2}\,.$$

Setzt man nun in (307) wieder die Bedeutung der unter (169) bzw. in (173) und (182) eingeführten Bezeichnungen $H_0, \ldots, H_6$ ein, so erhält man wegen $H_3 T^{-1}\log t \ll H_0 + H_1 T^{-1}\log t$

$$(310)\qquad H_7 \ll \sum_{m=0}^{9} K_m^{1/4}$$

mit

$$\begin{aligned} K_0 :&= Ta(r'v')^{-2}\beta/a\,, \\ K_1 :&= r'\log t\,, \\ K_2 :&= v' r' \beta a^{-1}\log t\,, \\ K_3 :&= (Ta)^{-1} v'^3 r'^4 \log^2 t\,, \\ K_4 :&= (Ta)^{1/2}(v'r')^{-1}\,, \\ K_5 :&= (Ta)^{-1/2}(v'r')^2\,, \\ K_6 :&= (Ta)^{1/2} T_3^{-1}\beta/a\,, \\ K_7 :&= v' r'/T_3\,, \\ K_8 :&= (Ta)^{-1/2} v'^2 r'^3 T_3^{-1}\log^6 t\,, \\ K_9 :&= (v'r')^2 T_3^{-2}\beta/a\,. \end{aligned}$$

Wir wollen T_1, T_2, T_3 so wählen, daß

$$(311)\qquad K_0 = K_9$$

wird. Wegen (308) und (309) bedeutet dies:

$$K_0 = v'^{-4} a r'^{-2} T_1^7 \beta/a = v'^5 r'^2 T_1^{-8}\beta/a = K_9\,,$$

also

$$(312)\qquad T_1 = (v'^9 r'^4 a^{-1})^{1/15}\,.$$

Daraus folgt wegen (309)

$$K_0 = (v'^3 r'^{-2} a^8)^{1/15}\beta/a\,.$$

Nach dieser Spezialisierung fordern wir:

$$(313)\qquad K_0 \geqslant K_j \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, 8\,.$$

Aus (306) und (310) folgt dann für jedes Tripel (A, y, Y), das der Bedingung (92) genügt, die Abschätzung

$$S_4(A, y, Y) \ll (v'^{108} r'^{208} a^8)^{1/8\cdot 15}\beta/a\,.$$

In Verbindung mit (58), (61), (66), (91) und (95) folgt also

$$S_2(a', b', \beta', \beta, N) \ll (v'^{48} r'^{148} a^{68})^{1/8\cdot 15}\beta/a + (ar'/v')^{1/2}\,.$$

Das Paar (β', N) muß dabei lediglich den Bedingungen (58) und (59) genügen. Wegen (49) ist aber (58) sicher im Falle $a/2 < N \leqslant b$ erfüllt.

Wegen (56) ist $a', b' > 0$, und wegen (60) ist $2 \leqslant \beta \leqslant a/2$. Andererseits hängt die rechte Seite der letzten Abschätzung nicht mehr von (β', N) ab. Daher folgt in Verbindung mit (55):

Unter den Voraussetzungen (49) bis (51), (56), (57), (60) (93), (305), (308), (309), (312) und (313) gilt

$$S_1(a', b') \ll (v'^{12} a^{17} r'^{37})^{1/30} + (ar'/v')^{1/2} a/\beta \,. \tag{314}$$

11. In diesem Abschnitt setzen wir außer (49), (50), (56), (308), (309) und (312) nur die Beziehungen

$$t \geqslant c_{18} \geqslant 3 \,, \tag{315}$$

$$0 < r_0 \leqslant (a^3/t)^{1/2} \log^{-1} t \,, \tag{316}$$

$$r' \leqslant r_0 \,, \tag{317}$$

$$r' \geqslant c_{19} v'^{-27/32} a^{1/4} \,, \tag{318}$$

$$\beta = c_{17} a T_3^{-1} \,, \tag{319}$$

$$K_{10}: = v'^{15} a^{-10} r_0^{10} \leqslant c_{20} \,, \tag{320}$$

$$K_{11}: = v'^{9} a^{-6} r_0^{9} \leqslant c_{20} \,, \tag{321}$$

$$K_{12}: = v'^{12} a^{-8} r_0^{17} \leqslant c_{20} \log^{-15} t \,, \tag{322}$$

$$K_{13}: = v'^{21} a^{-24} r_0^{66} \leqslant c_{20} \log^{-180} t \tag{323}$$

voraus; dabei werden c_{18}, c_{19} und c_{20} im folgenden noch genauer bestimmt.

Wir wollen zeigen, daß dann die Ungleichungen (51), (57), (60), (93), (305), (313) ebenfalls erfüllt sind. Zunächst folgt aus (49), (50) und (316) (vgl. (94)) sofort (51), und mit (316) und (317) gilt erst recht (57).

Aus (308) und (312) ergibt sich

$$T_3 = (v'^{27} a^{-8} r'^{32})^{1/30} \,. \tag{324}$$

Daher gilt wegen (318) bei genügend großem c_{19}

$$T_3 \geqslant \max(2^4, c_{17}/c_1) \,,$$

insbesondere also wegen (300) und (308)

$$T_l \geqslant 2 \quad \text{für} \quad l = 1, 2, 3 \tag{325}$$

und wegen (319)

$$\beta \leqslant c_1 a \,. \tag{326}$$

Andererseits ist wegen (308), (312) und (317)

$$T_1 T_3 / v' r' = v'^{-5/2} r'^{-1} T_1^5 \leqslant K_{10}^{1/30} \,,$$
$$T_2 T_3 / v' r' = v'^{-3} r'^{-1} T_1^6 \leqslant K_{11}^{1/15} \,,$$
$$T_3 T_3 / v' r' = v'^{-4} r'^{-1} T_1^8 \leqslant K_{12}^{1/15} \,,$$

wegen (319) bis (322) hat man also bei hinreichend kleinem c_{20}

$$T_l \leqslant 2^{-4} v' r' c_{17} T_3^{-1} = 2^{-4} v' r' \beta/a \quad \text{für} \quad l = 1, 2, 3 \,. \tag{327}$$

Wegen (316), (317), (326) und $c_1 < 1$ folgt daraus

$$T_3 r' \leqslant v' r'^2 \leqslant a \log^{-2} t$$

und daher nach (315) und (319) bei genügend großem c_{18}

$$r' < \beta \,. \tag{328}$$

Mit (326) und (328) ist (60), und mit (325) und (327) ist (93) erfüllt. (305) ist mit (319) erfüllt.

Aus (317), (319) und (324) folgt für die auf Seite 425 definierten Größen $K_0, \ldots, K_9$ zunächst

$$K_9/K_1 = v'^2 r' T_3^{-2} \beta/a \cdot \log t \geqslant c_{17} K_{13}^{-1/30} \log^{-1} t$$

und

$$K_9/K_2 = v' r' T_3^{-2} \log^{-1} t \geqslant K_{12}^{-1/15} \log^{-1} t \,.$$

Wegen (322) und (323) ist also bei hinreichend kleinem c_{20}

$$K_9 \geqslant K_1 \log^5 t \geqslant K_1 \quad \text{und} \quad K_9 \geqslant K_2 \,.$$

Andererseits bekommt man mit (311)

$$1 = K_0/K_9 = Ta(v'r')^{-4} T_3^2 = (K_0/K_6)^2 = (T_3/K_5)^2$$

und damit

$$K_0 = K_6 = K_9, \qquad K_5 = T_3$$

und

$$K_3 = K_5^2 v'^{-1} \log^2 t = T_3^2 v'^{-1} \log^2 t \,.$$

Insbesondere gilt

$$K_9/K_3 = (K_9/K_1) K_9/K_2 \,,$$
$$K_8 = K_5 r' T_3^{-1} \log^6 t = r' \log^6 t = K_1 \log^5 t$$

und wegen (327)

$$K_9/K_5 = (v'r')^2 T_3^{-3} \beta/a = (K_9/K_2) v' r' T_3^{-1} (\log t) \beta/a \geqslant K_9/K_2$$

und

$$K_6/K_4 = K_9/K_7 = T_3^{-1} v' r' \beta/a \geqslant 1 \,.$$

Damit ist auch (313) bewiesen.

Aus (319) und (324) folgt noch

$$(ar'/v')^{1/2} a/\beta \ll (v'^{12} a^7 r'^{47})^{1/30} \,,$$

und wegen $r' \leqslant r_0 \leqslant a$ gilt

$$a^7 r'^{47} \ll a^{17} r'^{37} \,.$$

Auf der rechten Seite von (314) ist also das zweite Glied von kleinerer Größenordnung als das erste.

Wegen (94) gilt daher unter den Voraussetzungen (49), (50), (56), (315) bis (318) und (320) bis (323) die Abschätzung

$$S_1(a', b') \ll (t^{12} a^{-7} r'^{37})^{1/30} \,. \tag{329}$$

12. In diesem Abschnitt setzen wir nur (49), (50), (315), (316) und (320) bis (323) voraus. Ferner sei

(330) $$1 \leqslant h \leqslant r_0 \quad \text{und} \quad H = \min(c_{19} v'^{-27/32} a^{1/4}, h).$$

Aus (47), (49) und (53) folgt dann

(331) $$S_1(1, h) \ll \sum_{k \geqslant 1} \left|S_1\left(\max(H, 2^k), \min(2^{k+1}, h)\right)\right| + |S_1(1, H)| + a.$$

Setzt man nun bei vorgegebenem $k \geqslant 1$

$$r' = a' = \max(H, 2^k), \qquad b' = \min(2^{k+1}, h),$$

so sind im Falle $a' < b'$ offenbar die Bedingungen (56), (317) und (318) erfüllt. Auf Grund der obigen Voraussetzungen gilt dann die Abschätzung (329). Im Falle $a' \geqslant b'$ ist aber $S_1(a', b') = 0$, und dann ist (329) trivial. In Verbindung mit (331) folgt also

(332) $$S_1(1, h) \ll (t^{12} a^{-7} r_0^{37})^{1/30} + |S_1(1, H)| + a.$$

Nach (53) gilt

$$S_1(1, H) \ll \sum_{1 \leqslant m \leqslant H} \left| \sum_{a < n \leqslant b} e\left(f_1(m, n)\right) \right|.$$

Die innere Summe soll mit Satz 5 abgeschätzt werden: Bei hinreichend großem c_{18} folgt aus (43), (49), (315) und (316), daß die Bedingung (32) für $1 \leqslant m \leqslant H$ mit

$$f(x) = f_1(m, x) = t' \log(1 + m/x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$
$$L = c_{21} t m a^{-3}, \quad c = c_{22}$$

erfüllt ist. Nach Satz 5 gilt also wegen $b - a \leqslant a$

$$S_1(1, H) \ll \sum_{1 \leqslant m \leqslant H} \left(a (t m a^{-3})^{1/2} + (t m a^{-3})^{-1/2}\right) \ll (t/a)^{1/2} H^{3/2} + (a^3/t)^{1/2} H^{1/2}.$$

Wegen (50) und (330) ist aber

$$(t/a) H \ll t^{5/32} a^{15/16} \ll t^{20/32}, \quad H \leqslant r_0 \quad \text{und} \quad (a^3/t) H \ll a r_0.$$

Infolgedessen gilt

(333) $$S_1(1, H) \ll t^{5/16} r_0 + (a r_0)^{1/2}.$$

Ferner gilt wegen (316)

(334) $$(a r_0)^{1/2} \leqslant \min(a/r_0^{1/2}, a).$$

Verbindet man nun (52) mit (331), (333) und (334), so kommt

$$a^{-1/2} S(a, b) \ll (a/r_0)^{1/2} + (t^{12} a^{-7} r_0^{7})^{1/60} + t^{5/32}.$$

Die beiden ersten Terme werden gleich, wenn man

(335) $$r_0 = a t^{-12/37}$$

setzt, und dann gilt

$$(a/r_0)^{1/2} = t^{6/37} > t^{5/32}.$$

Damit haben wir bewiesen, daß unter den Voraussetzungen (49), (50), (315), (316), (320) bis (323) und (335)

(336) $$a^{-1/2} S(a, b) \ll t^{6/37}$$

ist. Im Falle (335) lassen sich die Bedingungen (315), (316) und (320) bis (323) durch zwei einfache Bedingungen ersetzen: Aus (335) folgt nämlich

$$\left(r_0 (a^3/t)^{-1/2}\right)^{37} = t^{18,5-12} a^{37(1-1,5)} = (t^{13} a^{-37})^{1/2},$$
$$K_{10}^{37} = t^{15 \cdot 37 - 120} a^{-37 \cdot 30} = (t^{14,5} a^{-37})^{30},$$
$$K_{11}^{37} = t^{9(37-12)} a^{37(3-18)} = (t^{15} a^{-37})^{15},$$
$$K_{12}^{37} = t^{12(37-17)} a^{37(9-24)} = (t^{16} a^{-37})^{15}$$

und

$$K_{13}^{37} = t^{21 \cdot 37 - 66 \cdot 12} = t^{777-792} = t^{-15}.$$

Die Voraussetzungen (315), (316), (320) bis (323) und (335) sind also erfüllt, wenn für ein genügend großes c_{23}

(337) $$t \geqslant c_{23}$$

und

(338) $$a \geqslant c_{23} t^{16/37} \log t$$

ist.

Demnach gilt die Abschätzung (336) unter den Voraussetzungen (49), (50), (337) und (338).

13. Wir setzen nun (49) und (50) voraus und nehmen an, daß (338) nicht erfüllt ist. Unser Ziel ist wieder (336). Zunächst hat man wegen $t \geqslant 3$

(339) $$a \ll t^{17/37}.$$

Ferner können wir wegen (49) und (50) den Beweis von Theorem 5.18. aus [7] (S. 99, 100) mit

$$k = 4 \quad \text{und} \quad K = 2^{k-1} = 8$$

verwenden: Für jede natürliche Zahl $q \leqslant b - a$ ergibt sich

$$\sum_{a < n \leqslant b} n^{-it} \ll a q^{-1/2} + (tq)^{1/4 - (k-1)/(4K-4)} a^{(2k-1)/(4K-4) + 1/4} +$$
$$+ (tq)^{1/4 - 1/K + (k-1)/(4K-4)} a^{2/K + 1/4 - (2k-1)/(4K-4)} +$$
$$+ (tq)^{-1/4} a^{5/4} + (tq)^{1/5} a^{3/10}.$$

Wegen (49) gilt diese Abschätzung offenbar auch dann, wenn q eine beliebige positive Zahl $\leqslant b - a$ ist.

Nach (46) bekommt man also für $0 < q \leqslant b-a$

(340) $$a^{-1/2}S(a, b) \ll (a/q)^{1/2} + (tq)^{1/7} + (tq)^{13/56}a^{-1/4} + (a^3/tq)^{1/4} + (tq/a)^{1/5}.$$

Hierzu bemerken wir, daß wegen (49) und (50) die Ungleichung

(341) $$(a^3/tq)^{1/4} \leqslant (a/q)^{1/2} \quad \text{für} \quad 0 < q \leqslant b-a$$

gilt.

Nun sei speziell

$$q = a^{7/9}t^{-2/9}.$$

Dann stimmen die beiden ersten Terme auf der rechten Seite von (340) überein. Wenn also außerdem $q \leqslant b-a$ ist, so folgt in Verbindung mit (341)

(342) $$a^{-1/2}S(a, b) \ll (at)^{1/9} + (at)^{13/72}a^{-1/4} + (a^{-2/9}t^{7/9})^{1/5}.$$

Dies gilt aber auch im Falle $q > b-a$, da dann aus (49) und (50) mit der trivialen Abschätzung

$$a^{-1/2}S(a, b) \ll q+1 = a^{7/9}t^{-2/9}+1 \ll (at)^{1/9}$$

folgt.

Damit ist (342) unter den Voraussetzungen (49) und (50) bewiesen. Nun folgt aber aus (339)

$$(at)^{1/9} \ll t^{6/37}.$$

Im Falle $a > t^{10/37}$ ist

$$(at)^{13/72}a^{-1/4} = t^{13/72}a^{-5/72} \ll t^{6/37},$$

und wegen $a \geqslant 1$ ist jedenfalls

$$(a^{-2/9}t^{7/9})^{1/5} \ll t^{7/45} \ll t^{6/37}.$$

Die Abschätzung (336) folgt also im Falle $a > t^{10/37}$ aus (342). Im Falle $a \leqslant t^{10/37}$ ist (336) trivial.

Wegen (48) ist damit unser Hauptsatz bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] H. Behnke und F. Sommer, *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, Berlin 1955.

[2] R. Fricke, *Lehrbuch der Algebra*, Bd. 1, Braunschweig 1924.

[3] S. H. Min, *On the order of* $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, Trans. Amer. Math. Soc. 65 (1949), S. 448-472.

[4] E. Pascal, *Repertorium der höheren Mathematik*, Bd. 1, Leipzig und Berlin 1910.

[5] E. C. Titchmarsh, *On Epstein's Zeta-Function*, Proc. London Math. Soc. (2) 36 (1934), S. 485-500.

[6] — *On the order of* $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, Quart. J. Math. Oxford Ser. 13 (1942), S. 11-17.

[7] — *The theory of the Riemann Zeta-Function*, Oxford 1951.

[8] B. L. van der Waerden, *Algebra I*, Berlin 1955.

Reçu par la Rédaction le 27. 2. 1963

ACTA ARITHMETICA
VIII (1963)

On the genera of quadratic and hermitian forms over an algebraic number field

by

V. C. Nanda (Bombay)

§ 1. Introduction. Pursuing the study of the theory of genera of quadratic forms initiated by Gauss, Minkowski [6] defined a genus of rational integral quadratic forms, in any number of variables, to consist of all forms which are equivalent in the real number field and modulo all positive integers. He then showed that all forms in a genus have the same signature, determinant s and class mod $8s^3$, and that these finitely many invariants determine a genus completely. C. L. Siegel [7] gave an alternative proof of this result, and also obtained a finite set of genus invariants for forms with coefficients in an algebraic number field [8].

The converse problem of proving the existence of a genus of rational integral quadratic forms with prescribed invariants was also solved by Minkowski. H. Braun [1] later gave another set of invariants and a solution of the corresponding converse problem. She [2] also extended the results of Minkowski to hermitian forms over an imaginary quadratic extension of the rational number field.

In this paper we consider quadratic and hermitian forms over an arbitrary algebraic number field. We prove that a genus of hermitian forms can be defined by means of a finite set of invariants. We also prove the existence of genera of quadratic and hermitian forms with prescribed invariants. We use the methods of H. Braun in the proof of our results.

The main difficulty in this discussion is caused by the fact that, unlike in the case of the rational number field, the ring of integers in an algebraic number field is not, in general, a principal ideal domain, so that it is also necessary to take into account singular matrices. For this purpose, the reciprocity formula for Gauss sums (an important tool in the proof), is generalized to cover the case of singular matrices (Lemma 5). This formula appears to be of interest, independently of the application that we make of it.