Eine Einbettung m-dimensionaler Mengen in einen $(m+1)$-dimensionalen absoluten Retrakt

von

H. G. Bothe (Berlin)

1. Einleitung. Zweck dieser Ausführungen ist es, den folgenden Satz zu beweisen:

Ist $m \geqslant 0$ eine ganze Zahl, so gibt es einen $(m+1)$-dimensionalen absoluten Retrakt (¹) X^{m+1}, *in den sich jeder m-dimensionale separable metrische Raum topologisch (d.h. homöomorph) einbetten läßt* (²).

Der Beweis soll auf folgendem mir von Herrn Professor Borsuk vorgeschlagenen Wege geführt werden: Wir werden für jede ganze Zahl $m \geqslant 0$ zu einer m-dimensionalen Universalmenge (³) U^m eine $(m+1)$-dimensionale Obermenge X^{m+1} konstruieren, die ein absoluter Retrakt ist. Ist das gelungen, so haben wir den Satz bereits bewiesen, denn jeder m-dimensionale separable metrische Raum läßt sich topologisch in U^m und damit erst recht in X^{m+1} einbetten.

Im Falle $m = 0$ ist die Menge aller irrationalen Zahlen des Intervalls $[0,1]$ eine m-dimensionale Universalmenge (siehe z.B. [3], Seite 174). Diese Menge ist in den eindimensionalen absoluten Retrakt $[0,1]$ eingebettet, so daß unser Satz im Falle $m = 0$ bereits bewiesen ist und wir uns in Zukunft auf den Fall $m > 0$ beschränken können.

Wenn wir in dieser Arbeit von Räumen sprechen, so ist stets vorausgesetzt, daß diese Räume metrisierbar und separabel sind.

2. Komplexe. Es sei $n > 0$ eine ganze Zahl und W_0 der n-dimensionale Einheitswürfel im n-dimensionalen euklidischen Raum E^n. Die

(¹) Unter einem absoluten Retrakt verstehen wir einen kompakten metrischen Raum A mit folgender Eigenschaft: Ist R ein beliebiger metrischer Raum und A' eine zu A homöomorphe Teilmenge von R, so läßt sich R auf A' retrahieren, d.h., es gibt eine Abbildung f von R auf A', deren Einschränkung auf A' die identische Abbildung von A' auf sich ist.

(²) Die Frage nach der Existenz eines derartigen absoluten Retraktes wurde zuerst von K. Borsuk in [1] aufgeworfen.

(³) Eine m-dimensionale Universalmenge ist ein m-dimensionaler metrischer Raum, in den sich jeder m-dimensionale separable metrische Raum topologisch einbetten läßt.

Menge W_0 besteht also aus allen Punkten $p = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, die der Bedingung

$$0 \leqslant \xi_i \leqslant 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

genügen. Der aus allen Seiten von W_0 bestehende Komplex sei mit $\mathfrak{W}_0$ bezeichnet. Hierbei sowie auch später in ähnlichen Fällen sehen wir W_0 selbst als (uneigentliche) Seite von W_0 an. $\mathfrak{W}_0$ ist also eine Menge von Würfeln der Dimensionen $0, 1, \dots, n$.

Es sei $\nu \geqslant 1$ eine ganze Zahl. Wir wollen die *ν-fache Unterteilung* $\mathfrak{W}_0^{(\nu)}$ von $\mathfrak{W}_0$ definieren. Dazu zerspalten wir jede eindimensionale Kante von W_0 in ν Strecken der Länge ν^{-1} und zerlegen dementsprechend ganz W_0 in ν^n kongruente achsenparallele Würfel der Kantenlänge ν^{-1}. Diese Würfel und ihre Seiten bilden den Komplex $\mathfrak{W}_0^{(\nu)}$. Man sieht sofort: Ist $\mu = \varkappa \cdot \nu$ ($\varkappa \geqslant 1$, ganz), so ist $\mathfrak{W}_0^{(\mu)}$ eine Unterteilung von $\mathfrak{W}_0^{(\nu)}$ in dem Sinne, daß jeder Würfel aus $\mathfrak{W}_0^{(\mu)}$ in einem Würfel aus $\mathfrak{W}_0^{(\nu)}$ liegt und jeder Würfel aus $\mathfrak{W}_0^{(\nu)}$ Vereinigung der in ihm enthaltenen Würfel aus $\mathfrak{W}_0^{(\mu)}$ ist.

Unter einem *ν-Komplex* verstehen wir eine Teilmenge von $\mathfrak{W}_0^{(\nu)}$, die mit einem Würfel W auch alle Seiten von W enthält. Die ν-Komplexe sind also sets abgeschlossen. Wenn wir in Zukunft von Komplexen sprechen, so ist stets vorausgesetzt, daß diese Komplexe für gewisse Zahlen ν ν-Komplexe sind. Ist $\mathfrak{K}$ ein Komplex, so bezeichnen wir das *Polyeder* von $\mathfrak{K}$ — die Vereinigung aller in $\mathfrak{K}$ enthaltenen Würfel also—mit $[\mathfrak{K}]$. Ist $\mathfrak{K}$ ein ν-Komplex und $\varkappa \geqslant 1$ eine ganze Zahl, so verstehen wir unter der *$\varkappa$-fachen Unterteilung* $\mathfrak{K}^{(\varkappa)}$ *von* $\mathfrak{K}$ den $\varkappa\nu$-Komplex, der aus allen in $[\mathfrak{K}]$ enthaltenen Würfeln aus $\mathfrak{W}_0^{(\varkappa-\nu)}$ besteht. Insbesondere gilt dann $[\mathfrak{K}^{(\varkappa)}] = [\mathfrak{K}]$.

Das *r-dimensionale Gerüst* $\mathfrak{S}^r(\mathfrak{K})$ eines Komplexes $\mathfrak{K}$ ist der Teilkomplex von $\mathfrak{K}$, der aus allen höchstens r-dimensionalen Würfeln aus $\mathfrak{K}$ besteht. Ist $\mathfrak{L}$ ein Teilkomplex von $\mathfrak{K}$ (eine Teilmenge von $\mathfrak{K}$ also, die mit einem Würfel W auch alle Seiten von W enthält), so verstehen wir unter der in $\mathfrak{K}$ gebildeten *Umgebung* $\mathfrak{N}_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{L})$ von $\mathfrak{L}$ den Teilkomplex von $\mathfrak{K}$, der aus allen Würfeln W, die einen zu $\mathfrak{L}$ gehörenden Eckpunkt besitzen und den Seiten dieser Würfel W besteht.

Neben dem gewöhnlichen mit ϱ bezeichneten Abstand zweier Punkte im E^n führen wir noch einen weiteren unseren Zwecken angepaßten Abstand ϱ^* ein. Sind $p = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ und $p' = (\xi_1', \dots, \xi_n')$ zwei Punkte aus E^n, so sei

$$\varrho^*(p, p') = \max |\xi_i - \xi_i'| .$$

Für zwei Teilmengen A, B von E^n setzen wir wie üblich

$$\varrho^*(A, B) = \inf \varrho^*(p, p'); \quad p \in A, p' \in B .$$

Unter der *ε-Umgebung* $N_B(A, \varepsilon)$ einer Menge A in einer Menge B ($A \subseteq B$) verstehen wir die Menge der Punkte p aus B, für die $\varrho^*(p, A) \leqslant \varepsilon$ gilt.

Für zwei ν-Komplexe $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{K}$ gilt dann

$$N_{[\mathfrak{K}]}([\mathfrak{L}], \nu^{-1}) \supseteq [\mathfrak{N}_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{L})] .$$

Uns interessiert besonders der folgende Spezialfall, in dem man — wie leicht zu sehen ist — diese Inklusion durch die entsprechende Gleichung ersetzen kann:

(1) Sind $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{K}$ zwei ν-Komplexe und $\mathfrak{L}^{(\varkappa)} \subseteq \mathfrak{K}^{(\varkappa)}$ die $\varkappa$-Unterteilungen von $\mathfrak{L}$ bzw. $\mathfrak{K}$ ($\varkappa \geqslant 2$), so gilt

$$N_{[\mathfrak{K}]}([\mathfrak{L}], (\varkappa\nu)^{-1}) = [\mathfrak{N}_{\mathfrak{K}^{(\varkappa)}}(\mathfrak{L}^{(\varkappa)})] .$$

3. Universalmengen. Es sollen jetzt gewisse m-dimensionale Universalmengen definiert werden, die sich durch eine naheliegende Verallgemeinerung aus der ursprünglichen Mengerschen Universalmenge ergeben.

Es sei $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots$ eine Folge von ganzen Zahlen, die alle größer als 2 sind. Wir definieren zu jeder derartigen Folge eine m-dimensionale Universalmenge U^m, indem wir sukzessive gewisse Polyeder $[\mathfrak{A}_i]$ und $[\mathfrak{B}_i]$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) konstruieren, deren Limes die gesuchte Universalmenge U^m ist.

Es sei $n = 2m+1$ und $\mathfrak{W}_0$ wie im letzten Abschnitt der Komplex aus allen Seiten des n-dimensionalen Einheitswürfels W_0 in E^n. Wir setzen:

$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{W}_0; \qquad \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{S}^m(\mathfrak{A}_0);$$
$$\mathfrak{A}_i = \mathfrak{N}_{\mathfrak{U}_{i-1}^{(\varkappa_i)}}(\mathfrak{B}_{i-1}^{(\varkappa_i)}); \qquad \mathfrak{B}_i = \mathfrak{S}^m(\mathfrak{A}_i) \quad (i = 1, 2, \dots) .$$

Bezeichnen wir $\varkappa_1 \dots \varkappa_i$ mit ν_i, so sind $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{B}_i$ ν_i-Komplexe. Zur Abkürzung schreiben wir

$$[\mathfrak{A}_i] = U_i, \quad [\mathfrak{B}_i] = V_i .$$

Es gilt dann $U_i \supseteq U_{i+1}$, $V_i \subseteq V_{i+1}$, $U_i \supseteq V_i$, und die Menge

$$U^m = \bigcap_{i=0}^{\infty} U_i = \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} V_i}$$

ist — wie im nächsten Abschnitt bewiesen wird — eine m-dimensionale Universalmenge. Setzen wir insbesondere $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \dots = 3$, so erhalten wir die gewöhnliche Mengersche Universalmenge.

Bemerkung. Aus (1) folgt

(2) $$U_i = N_{U_{i-1}}(V_{i-1}, \nu_i^{-1}) .$$

Ein Punkt $p = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ liegt genau dann in V_i, wenn er in U_i enthalten ist und wenigstens $m+1$ seiner Koordinaten die Gestalt

$\xi_j = k_j\nu_i^{-1}$ mit ganzzahligem k_j haben. Die Gleichung (2) besagt dann, daß ein Punkt $q = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ aus U_{i-1} genau dann in U_i liegt, wenn wenigstens $m+1$ seiner Koordinaten eine Ungleichung der Form $|\zeta_j - k_j\nu_{i-1}^{-1}| \leqslant \nu_i^{-1}$ mit ganzzahligem k_j erfüllen.

4. Beweis der Universalität von U^m. Da man auf die übliche Weise leicht sieht, daß sich die Menge U^m für jedes positive ε durch eine ε-Abbildung in ein m-dimensionales Polyeder überführen läßt und damit höchstens m-dimensional ist ([4]), brauchen wir hier nur zu zeigen, daß sich jeder m-dimensionale Raum topologisch in U^m einbetten läßt. Um das zu beweisen, gehen wir von der m-dimensionalen Nöbelingschen Universalmenge M_n^m aus, die aus allen in $W_0 = [\mathfrak{A}_0]$ gelegenen Punkten besteht, die höchstens m rationale Koordinaten besitzen ([5]). Wie von Hurewicz bewiesen wurde kann man zu jedem m-dimensionalen Raum R eine homöomorphe Teilmenge R' von M_n^m finden, deren (in W_0 gebildete) abgeschlossene Hülle $\bar{R}'$ noch immer in M_n^m liegt. Insbesondere gibt es also eine zu M_n^m homöomorphe Teilmenge von M_n^m, deren abgeschlossene Hülle N noch immer in M_n^m enthalten ist. N ist dann eine kompakte Teilmenge von M_n^m. Wir werden unsere Behauptung — daß U^m eine m-dimensionale Universalmenge ist — bewiesen haben, wenn wir zeigen können, daß U^m eine zu N homöomorphe Teilmenge enthält. Dieses Ziel wird erreicht sein, wenn es uns gelingt, einen Homöomorphismus g von W_0 auf sich zu konstruieren, der N in eine Teilmenge von U^m überführt.

Lemma. *Es sei $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ eine Folge von monoton wachsenden Homöomorphismen des Intervalls $I = [0,1]$ auf sich und $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ eine Folge von ganzen Zahlen, die alle größer als 1 sind. Wir setzen $\nu_0 = 1$, $\nu_i = \varkappa_1 \ldots \varkappa_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ und $\psi_i = \varphi_i \ldots \varphi_0$. Sodann nehmen wir an, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1) *Jede Abbildung φ_i setzt sich aus endlich vielen linearen Stücken zusammen. Genauer: zu jedem i gibt es eine Zerlegung von I in endlich viele Teilintervalle, auf denen φ_i linear ist.*

2) *Der Anstieg eines jeden linearen Stückes von φ_i ist mindestens $2\cdot\varkappa_{i+1}^{-1}$.*

3) *Ist $0 \leqslant k \leqslant 2\nu_i$ eine ganze Zahl, so gilt $\varrho_i(\frac{1}{2}k\nu_i^{-1}) = \frac{1}{2}k\nu_i^{-1}$.*

Unter diesen Voraussetzungen konvergiert die Folge $\psi_0, \psi_1, \ldots$ gleichmäßig gegen einen Homöomorphismus von I auf sich.

Beweis. Da alle φ_i monoton wachsend sind, ist auch jede Funktion ψ_i ein monoton wachsender Homöomorphismus von I auf sich. Aus 3) folgt sofort, daß für jedes $j \geqslant i$ die Funktion φ_j die Intervalle $[\frac{1}{2}k\nu_i^{-1}, \frac{1}{2}(k+1)\nu_i^{-1}]$ homöomorph auf sich abbildet. Die Abbildungen φ_i^{-1} sind ebenfalls monoton wachsend und stückweise linear, und der Anstieg ihrer linearen Stücke ist höchstens $\frac{1}{2}\varkappa_{i+1}$.

Wir zeigen zuerst, daß die Folge $\psi_0, \psi_1, \ldots$ gleichmäßig konvergiert und damit eine stetige Limesfunktion ψ besitzt. Es sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen i so groß, daß $\nu_i^{-1} < \varepsilon$ wird. Ist dann $\xi \in I$ und $k\nu_i^{-1} \leqslant \psi_i\xi \leqslant (k+1)\nu_i^{-1}$ (k ganz), so gilt für alle $j \geqslant i$ ebenfalls $k\nu_i^{-1} \leqslant \psi_j\xi \leqslant (k+1)\nu_i^{-1}$ und damit $|\psi_j\xi - \psi_i\xi| \leqslant \nu_i^{-1} < \varepsilon$. (Hierbei haben wir benutzt, daß alle φ_j mit $j \geqslant i$ das Intervall $[k\nu_i^{-1}, (k+1)\nu_i^{-1}]$ auf sich abbilden.) Damit ist die gleichmäßige Konvergenz der Folge $\psi_0, \psi_1, \ldots$ bewiesen.

Es gilt jetzt zu zeigen, daß ψ eineindeutig und damit (I is ja ein Kompaktum) ein Homöomorphismus ist. Es sei $0 \leqslant \xi \leqslant \zeta \leqslant 1$ und $\psi\xi = \psi\zeta$. Dann gibt es wegen 3) zu jedem i eine ganze Zahl k mit der Eigenschaft

$$\tfrac{1}{2}k\nu_{i+1}^{-1} \leqslant \psi_i\xi \leqslant \psi_i\zeta \leqslant (\tfrac{1}{2}k+1)\cdot\nu_{i+1}^{-1},$$

und wir erhalten

$$\psi_i\zeta - \psi_i\xi \leqslant \nu_{i+1}^{-1}.$$

Wenden wir hierauf die Abbildung φ_i^{-1} an, so ergibt sich nach der oben über den Ansteig dieser Funktion gemachten Bemerkung

$$\psi_{i-1}\zeta - \psi_{i-1}\xi \leqslant \tfrac{1}{2}\varkappa_{i+1}\cdot\nu_{i+1}^{-1} = \tfrac{1}{2}\nu_i^{-1}.$$

Indem wir diesem Schritt $(i-1)$-mal wiederholen, erhalten wir

$$\psi_0\zeta - \psi_0\xi \leqslant 2^{-i}\nu_1^{-1}.$$

Das gilt für alle Indizes i, so daß $\psi_0\xi = \psi_0\zeta$ und damit $\xi = \zeta$ wird. Hiermit ist das Lemma bewiesen.

Wir konstruieren jetzt eine Folge $g_0, g_1, \ldots$ von Homöomorphismen des Würfels W_0 auf sich, die folgende Eigenschaft besitzt:

1) $g_0, g_1, \ldots$ konvergiert gegen einen Homöomorphismus von W_0 auf sich.

2) $g_i(N) \subseteq U_{i+1}$.

3) $g_i(M_n^m) = M_n^m$. (Hieraus folgt $g_i(N) \subseteq M_n^m$.)

Die Limesfunktion g führt dann N offenbar in eine Teilmenge von $U^m = \bigcap_i U_i$ über, so daß mit der Konstruktion der Folge $g_0, g_1, \ldots$ der Beweis für die Universalität von U^m beendet sein wird. Die Abbildungen g_i sollen konstruiert werden, indem wir für jedes $i = 0, 1, \ldots$ einen Homöomorphismus ψ_i des Intervalls $I = [0,1]$ auf sich definieren und für Punkte $p = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ aus W_0 $g_ip = (\psi_i\xi_1, \ldots, \psi_i\xi_n)$ setzen. Um dann die Eigenschaft 1) nachzuweisen, genügt es zu zeigen, daß die Folge $\psi_0, \psi_1, \ldots$ gegen einen Homöomorphismus ψ von I auf sich konvergiert, denn in diesem Falle ist die Abbildung $g(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\psi\xi_0, \ldots, \psi\xi_n)$ Limes der Folge $g_0, g_1, \ldots$

([4]) Im Abschnitt 5 werden spezielle derartige ε-Abbildungen konstruiert werden. Siehe auch [2] Seite 72.

([5]) Alle hier benutzten Eigenschaften der Menge M_n^m findet man in [2], Seite 64.

Wie im Lemma definieren wir die Abbildungen ψ_i, indem wir Homöomorphismen $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ von I auf sich angeben und $\psi_i = \varphi_1 \ldots \varphi_0$ setzen. Es wird bequem sein, zunächst $\varphi_{-1}\xi = \psi_{-1}\xi = \xi$ zu setzen, so daß g_{-1} die Identität von W_0 auf sich ist. Sicher erfüllt g_{-1} die Bedingungen 2) und 3).

Jetzt nehmen wir an, $\varphi_{-1}, \varphi_0, \ldots, \varphi_{i-1}$ seien bereits so konstruiert, daß die Bedingungen 2) und 3) gelten und beginnen φ_i und damit auch ψ_i festzulegen ($i \geqslant 0$). Nach 2) und 3) ist $g_{i-1}(N)$ ein in $M_n^m \cap U_i$ enthaltenes Kompaktum. Wir bezeichnen mit R die Menge aller der Punkte $p = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ aus W_0, von deren Koordinaten wenigstens $m+1$ die Gestalt $\xi_j = (k_j + \frac{1}{2})\nu_i^{-1}$ mit ganzzahligem k_j haben. Sicher ist R kompakt und da ν_i rational ist zu M_n^m und damit zu $g_{i-1}(N)$ punktfremd. Wir können also eine positive Zahl ε_i mit folgender Eigenschaft finden: Ist $p = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ein Punkt aus $g_{i-1}(N)$, so gilt für wenigstens $m+1$ seiner Koordinaten eine Ungleichung der Form $|\xi_j - l_j\nu_i^{-1}| < \frac{1}{2}\nu_i^{-1} - \varepsilon_i$, wobei die l_j ganze Zahlen sind. (Man braucht nur $\varepsilon_i < \varrho^*(R, g_{i-1}(N))$ zu setzen!) Eine solche Zahl ε_i denken wir uns fest gewählt und zwar so, daß ε_i rational und kleiner als $\frac{1}{2}\nu_i^{-1} - \nu_{i+1}^{-1}$ ist. (Letzteres ist wegen $\nu_{i+1} = \varkappa_{i+1}\nu_i \geqslant 3\nu_i$ sicher möglich.) Es gilt dann

$$0 < \tfrac{1}{2}\nu_i^{-1} - \varepsilon_i < \tfrac{1}{2}\nu_i^{-1} + \varepsilon_i < \ldots < (k+\tfrac{1}{2})\nu_i^{-1} - \varepsilon_i < \\ < (k+\tfrac{1}{2})\nu_i^{-1} + \varepsilon_i < \ldots < (\nu_i - \tfrac{1}{2})\nu_i^{-1} + \varepsilon_i < 1\,,$$

und wir zerlegen $I = [0, 1]$ in folgende Teilintervalle

$$\begin{aligned} I_0 &= [0, \tfrac{1}{2}\nu_i^{-1} - \varepsilon_i]\,, \\ I_k &= [(k-\tfrac{1}{2})\nu_i^{-1} + \varepsilon_i,\ (k+\tfrac{1}{2})\nu_i^{-1} - \varepsilon_i] \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu_i - 1)\,, \\ I_{\nu_i} &= [(\nu_i - \tfrac{1}{2})\nu_i^{-1} + \varepsilon_i, 1]\,, \\ J_k &= [(k+\tfrac{1}{2})\nu_i^{-1} - \varepsilon_i,\ (k+\tfrac{1}{2})\nu_i^{-1} + \varepsilon_i] \quad (k = 0, 1, \ldots, \nu_i - 1)\,. \end{aligned}$$

Sodann setzen wir

$$\varphi_i\xi = \begin{cases} \nu_{i+1}^{-1}(\frac{1}{2}\nu_i^{-1} - \varepsilon_i)^{-1}(\xi - k\nu_i^{-1}) + k\nu_i^{-1} & \text{für} \quad \xi \in I_k\,, \\ (\frac{1}{2}\nu_i^{-1} - \nu_{i+1}^{-1})\,\varepsilon_i^{-1}\big(\xi - (k+\frac{1}{2})\nu_i^{-1}\big) + (k+\frac{1}{2})\nu_i^{-1} & \text{für} \quad \xi \in J_k\,. \end{cases}$$

Man sieht sofort, daß φ eigentlich monoton wachsend ist und

$$\begin{aligned} \varphi_i(I_0) &= [0, \nu_{i+1}^{-1}]\,, \\ \varphi_i(I_k) &= [k\nu_i^{-1} - \nu_{i+1}^{-1},\ k\nu_i^{-1} + \nu_{i+1}^{-1}] \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu_i - 1)\,, \\ \varphi_i(I_\nu) &= [1 - \nu_{i+1}^{-1}, 1]\,, \\ \varphi_i(J_k) &= [k\nu_i^{-1} + \nu_{i+1}^{-1},\ (k+1)\nu_i^{-1} - \nu_{i+1}^{-1}] \quad (k = 0, 1, \ldots, \nu_i - 1)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

gilt, so daß sich die einzelnen linearen Stücke von φ_i zu einem Homöomorphismus von I auf sich zusammenschließen.

Setzen wir wie angekündigt $\psi_i = \varphi_i\psi_{i-1}$ und

$$g_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\psi_i\xi_1, \ldots, \psi_i\xi_n)\,,$$

so ist für g_i sicher die Bedingung 3) erfüllt, denn da ε_i und die Zahlen ν_i rational sind, ist $\varphi_i\xi$ genau dann rational, wenn ξ rational ist.

Um zu zeigen, daß g_i auch die Bedingung 2) erfüllt, betrachten wir einen Punkt $g_{i-1}p = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in g_{i-1}(N)$. Wir haben dann zu zeigen, daß $g_ip = (\varphi_i\zeta_1, \ldots, \varphi_i\zeta_n)$ in U_{i+1} liegt.

Zunächst wollen wir uns davon überzeugen, daß g_ip in U_i liegt. Es sei W ein n-dimensionaler Würfel aus $\mathfrak{A}_i$, der $g_{i-1}p$ enthält, und zwar sei W durch

$$k_j\nu_i^{-1} \leqslant \xi_j \leqslant (k_j+1)\nu_i^{-1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

definiert (die k_j sind ganze Zahlen). Da man sofort aus der Definition von φ_i sieht, daß für alle ganzen Zahlen k

$$\varphi_i(k\nu_i^{-1}) = k\nu_i^{-1}$$

ist, und da φ_i einen Homöomorphismus darstellt, haben wir

$$\varphi_i[k\nu_i^{-1}, (k+1)\nu_i^{-1}] = [k\nu_i^{-1}, (k+1)\nu_i^{-1}] \qquad (k = 0, \ldots, \nu_i - 1)\,,$$

so daß aus $g_{i-1}p \in W$ sogleich $g_ip = (\varphi_i\zeta_1, \ldots, \varphi_i\zeta_n) \in W \subseteq U_i$ folgt.

Nach der im Abschnitt 3 gemachten Bemerkung genügt es nunmehr zu zeigen, daß wenigstens $m+1$ der Koordinaten $\varphi_i\zeta_j$ von g_ip eine Ungleichung der Form $|\varphi_i\zeta_j - k_j\nu_i^{-1}| \leqslant \nu_{i+1}^{-1}$ erfüllen. Um das zu beweisen, erinnern wir daran, daß die Zahl ε_i gerade so gewählt war, daß für wenigstens $m+1$ der Koordinaten ζ_j von $g_{i-1}p$ Ungleichungen der Form $|\zeta_j - k_j\nu_i^{-1}| < \frac{1}{2}\nu_i^{-1} - \varepsilon_i$ gelten und diese Koordinaten daher zu den Intervallen I_{k_j} gehören. Aus (3) folgt dann sofort $|\varphi_i\zeta_j - k_j\nu_i^{-1}| \leqslant \nu_{i+1}^{-1}$ womit $g_ip \in U_{i+1}$ und auch $g_i(N) \subseteq U_{i+1}$ bewiesen ist.

Um zu zeigen, daß die Folge $g_0, g_1, \ldots$ gegen einen Homöomorphismus g konvergiert, um also die Bedingung 1) zu beweisen, genügt es — wie bereits bemerkt — die Konvergenz der Folge $\psi_0, \psi_1, \ldots$ nachzuweisen. Dazu ziehen wir natürlich das Lemma heran. Daß unsere Funktionen die Voraussetzungen des Lemmas erfüllen, ist teils trivial und ergibt sich teils durch eine einfache Rechnung aus der Definition der Funktionen φ_i.

5. Die Menge X^{m+1}. Wir denken uns die zur Folge $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ mit $\varkappa_i = 3^{i+1}$ gehörende m-dimensionale Universalmenge U^m auf die im Abschnitt 3 angegebene Weise in dem n-dimensionalen euklidischen Raum E^n konstruiert, der als Hyperebene $\xi_{n+1} = 0$ im $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Raum E^{n+1} liegt ($n = 2m+1$). Alle bei der Konstruktion von U^m auftretenden Komplexe $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{B}_i$ sowie die Polyeder U_i und V_i liegen also in dem n-dimensionalen Einheitswürfel W_0 von E^n.

Ehe wir X^{m+1} definieren, führen wir für jeden Index $i = 0, 1, \ldots$ eine stetige Abbildung f_i von W_0 auf sich ein, und zwar gehen wir dabei so vor, daß wir zuerst Funktionen $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ des Intervalls $I = [0, 1]$ auf sich definieren und dann für Punkte $p = (\xi_1, \ldots, \xi_n, 0)$ aus W_0 stets $f_i p = (\varphi_i \xi_1, \ldots, \varphi_i \xi_n, 0)$ setzen.

Wir zerlegen I in die Teilintervalle

$$\begin{aligned} I_0 &= [0, \nu_{i+1}^{-1}]\,, \\ I_k &= [k\nu_i^{-1} - \nu_{i+1}^{-1}, k\nu_i^{-1} + \nu_{i+1}^{-1}] \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu_i - 1)\,, \\ I_{\nu_i} &= [1 - \nu_{i+1}^{-1}, 1]\,, \\ J_k &= [k\nu_i^{-1} + \nu_{i+1}^{-1}, (k+1)\nu_i^{-1} - \nu_{i+1}^{-1}] \qquad (k = 0, 1, \ldots, \nu_i - 1) \end{aligned}$$

und definieren

$$\varphi_i \xi = \begin{cases} k\nu_i^{-1}\,, & \text{falls} \quad \xi \in I_k\,, \\ \nu_i^{-1}(\nu_i^{-1} - 2\nu_{i+1}^{-1})^{-1}(\xi - k\nu_i^{-1} - \nu_{i+1}^{-1}) + k\nu_i^{-1}\,, & \text{falls} \quad \xi \in J_k\,. \end{cases}$$

Auf diese Weise erhalten wir eine stetige monoton wachsende Funktion mit folgenden Eigenschaften:

(4) Ist $0 \leqslant k \leqslant \nu_i - 1$, so bildet φ_i das Intervall $[k\nu_i^{-1}, (k+1)\nu_i^{-1}]$ auf sich ab. Hieraus ergibt sich $|\varphi_i \xi - \xi| \leqslant \nu_i^{-1}$.

(5) Gibt es zu einer Zahl ξ aus I eine ganze Zahl k mit der Eigenschaft $|\xi - k\nu_i^{-1}| \leqslant \nu_{i+1}^{-1}$, so wird $\varphi_i \xi = k\nu_i^{-1}$.

(6) $$|\varphi_i \xi - \varphi_i \zeta| \leqslant (1 + 3^{-i})|\xi - \zeta| \qquad (\xi, \zeta \in I)\,.$$

Die ersten beiden Eigenschaften folgen unmittelbar aus der Definition von φ_i. Um (6) zu beweisen, bemerken wir, daß φ_i monoton wachsend ist und sich aus endlich vielen linearen Stücken zusamensetzt, die höchstens den Anstieg $\nu_i^{-1}(\nu_i^{-1} - 2\nu_{i+1}^{-1})^{-1} = (1 - 2\varkappa_{i+1}^{-1})^{-1}$ haben. Daher gilt

$$|\varphi_i \xi - \varphi_i \zeta| \leqslant (1 - 2\varkappa_{i+1}^{-1})^{-1}|\xi - \zeta|$$

und wegen $\varkappa_{i+1} = 3^{i+2}$ weiter $(1 - 2\varkappa_{i+1}^{-1})^{-1} \leqslant (1 + 3^{-i})$.

Definieren wir nun die Abbildungen f_i von W_0 auf sich wie angekündigt durch $f(\xi_1, \ldots, \xi_n, 0) = (\varphi_i \xi_1, \ldots, \varphi_i \xi_n, 0)$, so haben diese Abbildungen folgende Eigenschaften:

(7) Ist W ein Würfel aus $\mathfrak{W}_0^{(\nu_i)} = \mathfrak{A}_0^{(\nu_i)}$, so gilt $f_i W = W$.

Das folgt sofort aus (4).

(8) $$f_i(U_{i+1}) = f_i(V_{i+1}) = V_i\,.$$

Das ergibt sich einfach aus (5) und (7) und der im Abschnitt 3 gemachten Bemerkung.

(9) $$\varrho(f_i p, f_i q) \leqslant (1 + 3^{-i})\,\varrho(p, q) \qquad (p, q \in W_0)\,.$$

Das folgt sofort aus (6).

Jetzt beachten wir, daß alle bisher betrachteten Mengen in der Hyperbene E^n von E^{n+1} liegen. Den Einheitsvektor in Richtung der positiven ξ_{n+1}-Achse nennen wir $\mathfrak{n}$ und bezeichnen die aus einer Menge M durch Parallelverschiebung um $\alpha\mathfrak{n}$ hervorgehende Menge mit $M + \alpha\mathfrak{n}$. Insbesondere werden uns die Mengen $V_i^* = V_i + 2^{-i}\mathfrak{n}$ interessieren. Wir definieren für jedes $i = 0, 1, \ldots$ eine Abbildung g_i von V_{i+1}^* auf V_i^* durch

$$g_i p = f_i(p') + 2^{-i}\mathfrak{n} \qquad (p \in V_{i+1}^*)\,.$$

Der Punkt p' ist hierbei die Projektion $p - 2^{-i-1}\mathfrak{n}$ von p auf E^n (siehe (8)). Es gilt dann:

(10) $$\varrho(g_i p, g_i q) \leqslant (1 + 3^{-i})\,\varrho(p, q) \qquad (p, q \in V_{i+1}^*)\,.$$

Das ist eine unmittelbare Folgerung aus (9).

(11) Ist $p \in V_{i+1}^*$, so hat die von p und $g_i p$ begrenzte Strecke höchstens die Länge $2^{-i}(n+1)$.

Das ergibt sich durch eine grobe Abschätzung aus (4).

(12) Sind p und q zwei verschiedene Punkte aus V_{i+1}^*, so haben die Strecken $[p, g_i p]$ und $[q, g_i q]$ höchstens die Endpunkte $g_i p$, $g_i q$ gemeinsam.

Es sei $p = (\xi_1, \ldots, \xi_n, 2^{-i-1})$, $q = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n, 2^{-i-1})$ und damit $g_i p = (\varphi_i \xi_1, \ldots, \varphi_i \xi_n, 2^{-i})$, $g_i q = (\varphi_i \zeta_1, \ldots, \varphi_i \zeta_n, 2^{-i})$. Die Strecken $[p, g_i p]$ bzw. $[q, g_i q]$ bestehen dann aus den Punkten $p_\tau = (\xi_1(\tau), \ldots, \xi_{n+1}(\tau))$ bzw. $q_\tau = (\zeta_1(\tau), \ldots, \zeta_{n+1}(\tau))$ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ mit

$$\begin{aligned} \xi_j(\tau) &= (1-\tau)\xi_j + \tau\varphi_i \xi_j\,, \\ \zeta_j(\tau) &= (1-\tau)\zeta_j + \tau\varphi_i \zeta_j \end{aligned} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)\,,$$
$$\xi_{n+1}(\tau) = \zeta_{n+1}(\tau) = (1-\tau)2^{-i-1} + \tau 2^{-i}\,.$$

Wegen der letzten Gleichung folgt aus $p_\tau = q_\sigma$ sofort $\tau = \sigma$. Da φ_i monoton wachsend ist, kann $\xi_j(\tau) = \zeta_j(\tau)$ nur dann gelten, wenn $\xi_j = \zeta_j$ ist oder $\tau = 1$. wird. Damit ist (12) bewiesen.

Wir definieren noch V_{-1}^* als Menge, die nur aus dem Punkt $s = (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, 2)$ besteht und die Abbildung g_{-1} von V_0^* auf V_{-1}^* durch $g_{-1}p = s$ für alle p aus V_0^*. Offenbar besitzt die Abbildung g_{-1} die Eigenschaften (10), (11) und (12).

Es sei für $i = -1, 0, 1, 2, \ldots$

$$K_i = \bigcup_{q \in V_{i+1}^*} [p, g_i p]\,.$$

K_i ist also die Vereinigung aller oben betrachteten Strecken. Insbesondere ist K_{-1} der Kegel über V_0^* mit der Spitze s. Allgemein ist K_i ein zwischen den Hyperebenen $E^n+2^{-i-1}\mathfrak{n}$ und $E^n+2^{-i}\mathfrak{n}$ gelegenes Kompaktum, und es gilt

$$K_i \cap (E^n+2^{-i-1}\mathfrak{n}) = V_{i+1}^*, \quad K_i \cap (E^n+2^{-i}\mathfrak{n}) = V_i^* \quad (-1 \leqslant i).$$

Aus (12) folgt einfach, daß $K_i \setminus V_i^*$ zu dem kartesischen Produkt $V_{i+1}^* \times J$ von V_{i+1}^* mit einem halboffenen Intervall J homöomorph und somit $(m+1)$-dimensional ist. (V_{i+1}^* ist ja ein m-dimensionales Polyeder.) Als Vereinigung von $K_i \setminus V_i^*$ mit dem höchstens m-dimensionalen Kompaktum V_i^* ist K_i also $(m+1)$-dimensional (siehe [2] Seite 32).

Die abgeschlossene Hülle $\bar{K}$ der Vereinigung

$$K = \bigcup_{i=-1}^{\infty} K_i$$

ist dann die zu konstruierende Menge X^{m+1}.

Da die K_i zwischen den Hyperebenen $E^n+2^{-i-1}\mathfrak{n}$ und $E^n+2^{-i}\mathfrak{n}$ gelegene Kompakta sind, gilt offenbar

$$X^{m+1} \setminus K = X^{m+1} \cap E^n. \tag{13}$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß $X^{m+1} \cap E^n = U^m$ d.h. die am Anfang dieses Abschnittes konstruierte Universalmenge ist. Um die Inklusion $X^{m+1} \cap E^n \supseteq U^m$ nachzuweisen, genügt es zu zeigen, daß $X^{m+1} \cap E^n$ alle Mengen V_i umfaßt (U^m ist ja die abgeschlossene Hülle der Vereinigung aller dieser Mengen V_i $(i = 0, 1, \ldots)$). Das ist jedoch klar, denn für genügend großes j enthalten alle Mengen V_j^* (die natürlich in K liegen) die Menge $V_i+2^{-j}\mathfrak{n}$.

Jetzt beweisen wir die Inklusion $X^{m+1} \cap E^n \subseteq U^m$. Es sei dazu p ein Punkt aus $E^n \setminus U^m$. Dann gibt es eine positive Zahl δ, so daß p von allen Mengen V_i $(i = 0, 1, \ldots)$ mindestens den Abstand δ hat. Da nach (11) jede Menge K_i in der $(n+1)2^{-i}$-Umgebung von $V_i^* = V_i+2^{-i}\mathfrak{n}$ enthalten ist, gibt es einen Index, i_0 so daß p von den Mengen K_i $(i = i_0, i_0+1, \ldots)$ mindestens den Abstand $\frac{1}{2}\delta$ hat. Der Abstand des Punktes p von den Mengen K_i $(i = -1, 0, \ldots, i_0-1)$ ist mindestens 2^{-i_0}, so daß wir $\varrho(p, K) \geqslant \min(\frac{1}{2}\delta, 2^{-i_0}) > 0$ und damit $p \notin \bar{K} = X^{m+1}$ erhalten.

Wir haben also die folgende Gleichung bewiesen:

$$X^{m+1} = U^m \cup \bigcup_{i=-1}^{\infty} K_i.$$

Da alle Mengen K_i $(m+1)$-dimensionale Kompakta sind und U^m ein m-dimensionales Kompaktum ist, folgt aus dem dimensionstheoretischen Summensatz (siehe [2] Seite 30), daß X^{m+1} genau $(m+1)$-dimensional ist.

Um unseren Beweis zu beenden, haben wir noch zu zeigen, daß X^{m+1} ein absoluter Retrakt ist.

6. X^{m+1} ist auf einen Punkt zusammenziehbar. Wir wollen hier zeigen, daß man X^{m+1} in sich auf den Punkt s — die Spitze des Kegels K_{-1} also — zusammenziehen kann. Diese Zusammenziehung konstruieren wir schrittweise.

Es sei $i \geqslant -1$ eine ganze Zahl und K_i die im vorigen Abschnitt definierte Menge. Ist $p \in V_{i+1}^*$, so parametrisieren wir die Strecke $[p, g_i p]$ durch eine Parameterfunktion $h_i^*(p, \tau)$ $(2^{-i-1} \leqslant \tau \leqslant 2^{-i})$ so, daß $h_i^*(p, \tau)$ gerade der Punkt auf $[p, g_i p]$ ist, dessen $(n+1)$-te Koordinate mit τ übereinstimmt. Ist dann $q = (\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$ ein Punkt aus $K_i \setminus V_i^*$, so gibt es wegen (12) genau einen Punkt $p \in V_{i+1}^*$, für den die Strecke $[p, g_i p]$ den Punkt q enthält. Wir definieren:

$$h_i(q, \tau) = \begin{cases} q, & \text{falls} \quad 2^{-i-1} \leqslant \tau \leqslant \xi_{n+1}, \\ h_i^*(p, \tau), & \text{falls} \quad \xi_{n+1} \leqslant \tau \leqslant 2^{-i}. \end{cases}$$

Setzen wir noch für Punkte r aus V_i^*

$$h_i(r, \tau) = r \quad (2^{-i-1} \leqslant \tau \leqslant 2^{-i}),$$

so ist h_i eine Zusammenziehung von K_i auf V_i^*. Insbesondere ist h_{-1} eine Zusammenziehung des Kegels K_{-1} auf die Spitze s. Genauer: h_i ist eine Abbildung von $K_i \times [2^{-i-1}, 2^{-i}]$ auf K_i mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} &h_i(p, 2^{-i-1}) = p && (p \in K_i), \\ &h_i(p, \tau) = p && (p \in V_i^*,\ 2^{-i-1} \leqslant \tau \leqslant 2^{-i}), \\ &h_i(p, 2^{-i}) \in V_i^* && (p \in K_i). \end{aligned}$$

Man sieht sofort, daß sich diese Zusammenziehungen h_i zu einer Zusammenziehung h von ganz K auf s zusammensetzen lassen. Im einzelnen kann man diese Zusammenziehung h, die eine Abbildung von $K \times [0, 2]$ auf K sein wird, folgendermaßen schrittweise definieren: Ist $p \in K_{-1}$, so sei

$$h(p, \tau) = \begin{cases} p, & \text{falls} \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1, \\ h_{-1}(p, \tau), & \text{falls} \quad 1 \leqslant \tau \leqslant 2. \end{cases}$$

Ist $h(p, \tau)$ für alle Punkte aus $K_{-1} \cup \ldots \cup K_{i-1}$ bereits definiert und p ein Punkt aus K_i, so setzen wir

$$h(p, \tau) = \begin{cases} h_i(p, \tau), & \text{falls} \quad 2^{-i-1} \leqslant \tau \leqslant 2^{-i}, \\ h(h_i(p, 2^{-i}), \tau), & \text{falls} \quad 2^{-i} \leqslant \tau \leqslant 2. \\ p, & \text{falls} \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 2^{-i-1}. \end{cases}$$

Sicher ist dann h eine stetige Abbildung mit den Eigenschaften

$$h(p,0)=p \quad (p\in K),$$
$$h(p,2)=s \quad (p\in K),$$
$$h(p,\tau)\in K \quad (p\in K,\ 0\leqslant\tau\leqslant 2).$$

Man kann sich h auch auf die folgende Weise definiert denken: Ist $q=(\xi_1,\dots,\xi_{n+1})$ aus $K\setminus\{s\}$, so gibt es genau einen Index i, für den q in $K_i\setminus V_i^*$ liegt. Es gibt dann weiter genau einen Punkt p aus V_{i+1}^*, für den die Strecke $[p,g_ip]$ den Punkt q enthält. Wir betrachten den Streckenzug

$$S=[p,g_ip]\cup[g_ip,g_{i-1}g_ip]\cup\dots\cup[g_0\dots g_ip,g_{-1}g_0\dots g_ip].$$

Ist $\tau\geqslant\xi_{n+1}$, so ist $h(q,\tau)$ der Punkt auf S, dessen $(n+1)$-te Koordinate mit τ übereinstimmt, während für $\tau\leqslant\xi_{n+1}$ stets $h(q,\tau)=q$ gilt.

Aus dieser Bemerkung ergibt sich sofort die folgende Eigenschaft von h:

(14) $\qquad h(K,\tau)$ liegt oberhalb von $E^n+\tau\mathfrak{n}$.

(15) $\qquad h(p,\tau)=h\big(h(p,\sigma),\tau\big)$ für $0\leqslant\sigma\leqslant\tau\leqslant 2$.

Wir beweisen noch zwei weitere Eigenschaften der Abbildung h.

(16) $\qquad \varrho\big(q,h(q,\tau)\big)\leqslant(n+1)2^{-j+1}$ für $0\leqslant\tau\leqslant 2^{-j}$.

Es sei $q=(\xi_1,\dots,\xi_{n+1})$. Ist $q=s$ oder $\xi_{n+1}\geqslant\tau$, so wird $h(q,\tau)=q$ und (16) ist trivial. Wir können also annehmen, daß q in einer Menge $K_i\setminus V_i^*$ mit $i\geqslant j$ enthalten ist. Es sei wieder $p\in V_{i+1}^*$ und $q\in[p,g_ip]$. Dann liegen q und $h(q,\tau)$ auf dem Streckenzug

$$[p,g_ip]\cup\dots\cup[g_{j+1}\dots g_ip,g_jg_{j+1}\dots g_ip].$$

Nach (11) folgt dann

$$\varrho\big(q,h(q,\tau)\big)\leqslant(n+1)\sum_{k=j}^{i}2^{-k}<(n+1)2^{-j+1}.$$

(17) Es gibt eine Zahl a, so daß für je zwei Indizes $i,j\geqslant-1$ und für je zwei Punkte $p,q\in V_i^*$ gilt

$$\varrho\big(h(p,2^{-j}),h(q,2^{-j})\big)\leqslant a\cdot\varrho(p,q).$$

Ist $j\geqslant i$, so wird $h(p,2^{-j})=p$ und $h(q,2^{-j})=q$. Ist $j<i$, so haben wir

$$h(p,2^{-j})=g_j\dots g_{i-1}p,\qquad h(p,2^{-j})=g_j\dots g_{i-1}q.$$

Aus (10) folgt

$$\varrho\big(h(p,2^{-j}),h(q,2^{-j})\big)\leqslant\prod_{k=j}^{i-1}(1+3^{-k})\cdot\varrho(p,q)<\prod_{k=-1}^{\infty}(1+3^{-k})\cdot\varrho(p,q).$$

Da das letzte Produkt konvergiert, brauchen wir nur

$$a=\prod_{k=-1}^{\infty}(1+3^{-k})$$

zu setzen.

Jetzt können wir zeigen, daß sich die Abbildung h stetig auf $X^{m+1}\times\times[0,2]$ ausdehnen läßt. Diese Ausdehnung ist dann — da K in X^{m+1} dicht liegt — eine Zusammenziehung von X^{m+1} auf s.

Wir haben zu zeigen, daß für jede gegen ein Element (p,τ) aus $(X^{m+1}\setminus K)\times[0,2]$ konvergierende Folge (p_k,τ_k) von Elementen aus $K\times[0,2]$ die Bildfolge $h(p_k,\tau_k)$ in X^{m+1} ebenfalls konvergent ist. Der Limes dieser letzten Folge wird dann nur von (p,τ) abhängen, und wir können $h(p,\tau)=\lim h(p_k,\tau_k)$ setzen, um die gesuchte Ausdehnung zu erhalten.

Es sei also (p_k,τ_k) eine gegen $(p,\tau)\in(X^{m+1}\setminus K)\times[0,2]$ konvergierende Folge von Elementen aus $K\times[0,2]$.

1. Fall: $\tau=0$. Ist ε eine beliebige positive Zahl, so können wir k_0 so groß wählen, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

(a) $\varrho(p_k,p_{k'})<\frac13\varepsilon$ für $k,k'\geqslant k_0$.

(b) Es gibt eine ganze Zahl i, so daß $(n+1)2^{-i+1}<\frac13\varepsilon$ gilt und aus $k\geqslant k_0$ stets $\tau_k\leqslant 2^{-i}$ folgt.

Dann gilt wegen (16) für $k,k'\geqslant k_0$

$$\varrho\big(p_k,h(p_k,\tau_k)\big)<\tfrac13\varepsilon,$$
$$\varrho\big(p_{k'},h(p_{k'},\tau_{k'})\big)<\tfrac13\varepsilon,$$

und damit

$$\varrho\big(h(p_k,\tau_k),h(p_{k'},\tau_{k'})\big)<\tfrac13\varepsilon+\varrho(p_k,p_{k'})+\tfrac13\varepsilon<\varepsilon.$$

Die Folge $h(p_k,\tau_k)$ ist also eine Cauchyfolge und damit im Kompaktum X^{m+1} konvergent.

2. Fall: $\tau>0$. Indem wir eventuell endlich viele Glieder aus der Folge (p_k,τ_k) streichen, können wir annehmen, daß es eine positive ganze Zahl i mit der Eigenschaft $2^{-i}\leqslant\tau_k$ $(k=1,2,\dots)$ gibt. Wegen (15) gilt dann

(18) $\qquad h(p_k,\tau_k)=h\big(h(p_k,2^{-i}),\tau_k\big).$

Wir werden zeigen, daß die Folge $h(p_k, 2^{-i})$ konvergiert. Wegen (14) sind alle Glieder dieser Folge in der kompakten Teilmenge $(\bigcup_{l=-1}^{i-1} K_l) \times [0, 2]$ von $K \times [0, 2]$ enthalten, so daß auch ihr Limes in dieser Menge liegt. Da h auf $K \times [0, 2]$ stetig ist, folgt dann aus (18) sofort die Konvergenz der Folge $h(p_k, \tau_k)$.

Es sei ε eine positive Zahl. Wir wählen k_0 so groß, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

(a) $\varrho(p_k, p_{k'}) < \frac{1}{3}\varepsilon a^{-1}$ für $k, k' \geqslant k_0$ (siehe (17)).

(b) Es gibt eine ganze Zahl $j \geqslant i$ (i ist die oben ausgewählte Zahl), so daß $(n+1)2^{-j+1} < \frac{1}{3}\varepsilon a^{-1}$ gilt und aus $k \geqslant k_0$ folgt, daß die $(n+1)$-te Koordinate von p_k kleiner als 2^{-j} ist. Beachten wir dann die Gleichung

$$h(p_k, 2^{-i}) = h\big(h(p_k, 2^{-j}), 2^{-i}\big),$$

so erhalten wir für $k, k' \geqslant k_0$

$$\begin{aligned}\varrho\big(h(p_k, 2^{-i}), h(p_{k'}, 2^{-i})\big) &\leqslant a \cdot \varrho\big(h(p_k, 2^{-j}), h(p_{k'}, 2^{-j})\big)\\ &\leqslant a \cdot \Big(\varrho\big(h(p_k, 2^{-j}), p_k\big) + \varrho(p_k, p_{k'}) + \varrho\big(h(p_{k'}, 2^{-j}), p_{k'}\big)\Big)\\ &< a \cdot (\tfrac{1}{3}\varepsilon a^{-1} + \tfrac{1}{3}\varepsilon a^{-1} + \tfrac{1}{3}\varepsilon a^{-1}) = \varepsilon .\end{aligned}$$

Hierbei haben wir (16) und (17) angewandt. Die Folge $h(p_k, 2^{-i})$ ist also eine Cauchyfolge und damit im Kompaktum $(\bigcup_{l=-1}^{i-1} K_l) \times [0, 2]$ konvergent.

7. X^{m+1} ist ein absoluter Retrakt. Da jedes endlichdimensionale in sich auf einem Punkt zusammenziehbare, lokal zusammenziehbare Kompaktum ein absoluter Retrakt ist (siehe z.B. [4] Seite 289), brauchen wir nur zu zeigen, daß X^{m+1} lokal zusammenziehbar ist.

Es sei p zuerst ein Punkt aus K, der in keiner der Mengen V_i^* liegt ($i = -1, 0, 1, \ldots$). Dann gibt es einen Index i, und eine in $K_i \setminus V_i^*$ enthaltene Umgebung U von p (U ist Umgebung von p im Raume X^{m+1}.) Wie wir bereits früher bemerkten, ist $K_i \setminus V_i^*$ zum kartesischen Produkt $V_{i+1}^* \times J$ des Polyeders V_{i+1}^* mit einem halboffenen Intervall J homöomorph. Bedenken wir, daß Polyeder stets lokal zusammenziebar sind, so folgt sofort, daß X^{m+1} im Punkte p lokal zusammenziehbar ist.

Es sei jetzt p aus V_i^* ($i = 0, 1, \ldots$) und ε eine positive Zahl. Wir wollen eine in der ε-Umgebung $U(\varepsilon)$ von p enthaltene Umgebung U von p konstruieren, die sich in $U(\varepsilon)$ auf einen Punkt zusammenziehen läßt. Wir betrachten dazu zunächst eine in der $\frac{1}{2}\varepsilon$-Umgebung $U(\frac{1}{2}\varepsilon)$ von p enthaltene Umgebung U^* von p in V_i^*, die sich in $U(\varepsilon)$ auf einen Punkt zusammenziehen läßt. (Da V_i^* ein Polyeder ist, existiert U^*.) Nun sei $0 < \eta < \min(\frac{1}{2}\varepsilon, 2^{-i-1})$. Liegt q in U^*, so sei q' der Punkt der Strecke $[q, g_{i-1}q]$, der von q den Abstand η hat. Ist r ein Punkt aus V_{i+1}^*, für den $g_i r$ in U^* liegt, so bezeichnen wir mit r' den Punkt der Strecke $[r, g_i r]$, der von $g_i r$ den Abstand η hat. (Die Strecken $[q, g_{i-1}q]$ und $[r, g_i r]$ haben mindestens die Länge 2^{-i-1}.) Es sei dann

$$U = \bigcup_{q \in U^*} [q, q'] \cup \bigcup_{g_i r \in U^*} [r', g_i r] .$$

Nach (12) haben je zwei der auftretenden Strecken höchstens ihren in U^* gelegenen Endpunkt gemeinsam, so daß man U leicht in sich auf U^* zusammenziehen kann. Da U^* in $U(\varepsilon)$ auf einen Punkt zusammenziehbar ist, läßt sich auch U in $U(\varepsilon)$ auf einen Punkt zusammenziehen.

Ist p aus V_{-1}^*, d.h. $p = s$, so ist p die Spitze des Kegels K_{-1}, und X^{m+1} läßt sich in p lokal zusammenziehen.

Es sei jetzt p aus $X^{m+1} \setminus K$, $\varepsilon > 0$ und $U(\varepsilon)$ die ε-Umgebung von p in X^{m+1}. Wir wollen eine in $U(\varepsilon)$ zusammenziehbare Umgebung U von p konstruieren. Dazu wählen wir die Zahl i so groß, daß $h(p, \tau)$ für $0 \leqslant \tau \leqslant 2^{-i}$ in $U(\varepsilon)$ liegt. Da $U(\varepsilon)$ offen und h gleichmäßig stetig ist, gibt es eine Umgebung U von p, so daß für alle Punkte q aus U und für $0 \leqslant \tau \leqslant 2^{-i}$ die Bilder $h(q, \tau)$ zu $U(\varepsilon)$ gehören. Wählen wir U genügend klein, so können wir sogar erreichen, daß $h(U, 2^{-i})$ in V_i^* liegt (siehe (13)) und in $V_i^* \cap U(\varepsilon)$ auf einen Punkt zusammengezogen werden kann (V_i^* ist ja ein Polyeder). Dann ist U offenbar in $U(\varepsilon)$ auf einen Punkt zusammenziehbar, denn $h(q, \tau)$ ($0 \leqslant \tau \leqslant 2^{-i}$) ist ja eine in $U(\varepsilon)$ verlaufende Deformation von U in $h(U, 2^{-i})$.

8. Eine andere Konstruktion. Zum Schluß sei noch auf eine andere Konstruktionsmöglichkeit eines $(m+1)$-dimensionalen absoluten Retrakts $\tilde{X}^{m+1}$ hingewiesen, der im topologischen Sinne alle m-dimensionalen Räume enthält. Man betrachtet dazu die zur Folge $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ mit $\varkappa_i = 3$ gebildete Universalmenge — die gewöhnliche Mengersche Universalmenge also — und stellt sie in der Form $U^m = \bigcap_{i=0}^{\infty} U_i$ dar (siehe Abschnitt 3). Die Menge $U_0 = W_0$ ist der n-dimensionale Einheitswürfel und damit ein absoluter Retrakt. Indem man in den Mengen U_i ($i = 1, 2, \ldots$) gewisse Löcher durch $(m+1)$-dimensionale Würfel abschließt, kann man zu neuen Mengen $U_i^* \supseteq U_i$ gelangen, die jeweils Retrakt von U_{i-1}^* sind ($U_0^* = U_0$). Die Retraktionen ϱ_i: $U_{i-1}^* \to U_i^*$ lassen sich so bestimmen, daß ihre Produkte $\varrho_i \ldots \varrho_1$, die ja Retraktionen von U_0 auf U_i^* sind, gegen eine Retraktion von U_0 auf $\tilde{X}^{m+1} = \bigcap_{i=0}^{\infty} U_i^*$ konvergieren. Diese Menge $\tilde{X}^{m+1}$ geht dann aus U^m durch Hinzufügen von abzählbar vielen paarweise disjunkten $(m+1)$-dimensionalen Würfeln hervor, die jeweils mit U^m genau den Rand gemeinsam haben. Hieraus folgt, daß $\tilde{X}^{m+1}$ $(m+1)$-dimensional ist. Die Menge $\tilde{X}^{m+1}$ liegt im $(2m+1)$-dimensionalen euklidischen Raum, während die hier ausführlich konstruierte Menge X^{m+1} in den $(2m+2)$-dimensionalen euklidischen Raum eingebettet ist. Wir haben die Menge X^{m+1} und nicht die Menge $\tilde{X}^{m+1}$ konstruiert, da die Konstruktion von $\tilde{X}^{m+1}$ komplizierter als die von X^{m+1} ist.

Literaturverzeichnis

[1] K. Borsuk, *Sur le plongement des espaces dans les rétractes absolus*, Fund. Math. 27 (1936), S. 239-243.

[2] W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton 1948.

[3] C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa 1952.

[4] — *Topologie II*, Warszawa 1952.

Reçu par la Rédaction le 15. 3. 1962

Some mappings of ANR-sets

by

A. Lelek (Wrocław)

Recently, in connection with a method of construction of ANR-sets [1] having some paradoxical properties, K. Borsuk raised the following problem:

Given an ANR-*set* X. *Take a sequence of mutually disjoint* AR-*sets* $X_1, X_2, \ldots$ *in* X *which have diameters converging to zero. Suppose* ξ_i *is a mapping of* X_i *such that* $\xi_i(X_i)$ *is an* AR-*set for* $i = 1, 2, \ldots$ *Then the decomposition of* X *into the sets* $\xi_i^{-1}(y)$, *where* $i = 1, 2, \ldots$ *and* $y \in \xi_i(X_i)$, *and the points belonging to* $X-(X_1 \cup X_2 \cup \ldots)$, *is upper semicontinuous; thus it induces a mapping* ξ *of* X. *Is* $\xi(X)$ *an* ANR-*set?*

We shall solve the problem in the affirmative for the case when $\xi(X)$ has a finite dimension (see Corollary 7 below). This will be done by showing that $\xi(X)$ is LC^n, i.e. homotopically locally connected in dimensions up to n (see [3], p. 506), for $n = 0, 1, \ldots$ Therefore the condition that $\xi(X)$ is finitely dimensional plays an essential role in our result. It is now an open question if the above problem has an affirmative solution also for $\xi(X)$ with infinite dimension.

THEOREM. *Let* $n = 0, 1, \ldots$, *let* f *be a continuous mapping of an* ANR-*set* X *and let* $X_1, X_2, \ldots$ *be subsets of* X *such that*

(i) X_i *are* $(n-1)$-*connected* ANR-*sets* [2] *for* $i = 1, 2, \ldots$,

(ii) $f(X_i)$ *are* n-*connected* ANR-*sets for* $i = 1, 2, \ldots$,

(iii) f *is* 1-1 *on the set* $X_0 = X-(X_1 \cup X_2 \cup \ldots)$ *and* $f(X_i)$ *are mutually disjoint sets for* $i = 0, 1, \ldots$ *with diameters converging to zero as* i *tends to infinity*.

Then the image $f(X)$ *is* LC^n.

Proof. Put

$$X_\infty = X \times \{0, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots\}$$

---

[1] By ANR-*set* (or AR-*set*) we understand a compact metric absolute neighbourhood (or absolute) retract.

[2] A set is said to be n-*connected* if it is homotopically connected in dimensions up to n, i.e. if all its l-dimensional homotopy groups vanish for $l = 0, 1, \ldots, n$. The (-1)-connectedness means that no condition is required.