In particular, it follows from (d) that any initial ordinal ω_γ is perfect, since for $\gamma = 0$, $\omega_0 = \omega$ is perfect and for $\gamma > 0$ $\omega_\gamma = \omega^{\omega_\gamma} = \omega^{\omega^{\omega_\gamma}}$.

From theorems 3.3 and 3.4 we see that in order to find all transfinite perfect numbers it suffices to solve the following two problems of finite arithmetic:

(1) Find all finite numbers N such that $\tau(N) = N$.

(2) Find all finite numbers N such that $\tau(N) = N-1$.

Problem (1) is simply the well-known problem of determining all finite perfect numbers. Problem (2) seems to be new; I call such numbers *almost perfect*. Clearly, $N = 2^n$ is almost perfect for any non-negative integer n. The question arises whether there are any almost perfect integers which are not of the form 2^n. It is easy to obtain necessary conditions for such an N, but the general problem seems to be at least as difficult as (1). In particular, I have been able to prove that if N is almost perfect and not a power of 2 then N has at least three distinct prime divisors, either N or $2N$ is a perfect square, and $N > 10^7$, with stronger results if N is odd.

One may also consider the question of perfect cardinals, the definition being the same as in the finite case. The axiom of choice must be assumed in making this definition since the proper divisors of a cardinal will usually form an infinite family, so we now assume the axiom of choice. Every cardinal is then finite or an aleph, and it is easy to prove that a cardinal n is perfect if and only if n is finite and perfect or $n = \aleph_\alpha$ where α is an ordinal of the second kind. It follows from the continuum hypothesis that $2^{\aleph_0}$ is not perfect. It is interesting that this also follows from the weaker hypothesis $2^{\aleph_0} < \aleph_{\omega_1}$, for $2^{\aleph_0}$ is not the sum of a denumerable family of smaller cardinals ([1], p. 401) whereas any $\aleph_\alpha$, $\alpha < \omega_1$ and α of the second kind, is such a sum.

References

[1] W. Sierpiński, *Cardinal and ordinal numbers*, Warszawa 1958.

[2] S. Sherman, *Some new properties of transfinite ordinals*, Bull. of Amer. Math. Soc. 47 (1941), pp. 111-116.

[3] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford 1945.

[4] L. E. Dickson, *History of the theory of numbers*, Washington (Carnegie Institute), 1919.

Reçu par la Rédaction le 22. 1. 1962

Eine Anwendung der unendlichwertigen Logik auf topologische Räume

von

B. Scarpellini (Genève)

1. Einleitung. In [1] wurde gezeigt, daß die Menge der „wahren" Formeln des unendlichwertigen Prädikatenkalküls von Łukasiewicz-Tarski nicht axiomatisierbar ist. Dabei wurde eine Formel als wahr bezeichnet, wenn sie bei jeder Bewertung immer den Wert Null annimmt. Zu analogen Fragestellungen gelangt man, wenn man statt beliebiger Mengen E und beliebiger n-stelliger Abbildungen $\varphi(x, \ldots, x_n)$ von E in $[0,1]$ nur topologische Räume T und n-stellige stetige Funktionen von T in $[0,1]$ zuläßt.

Dabei kann man etwa folgende Probleme betrachten:

a) *Welches ist der Kompliziertheitsgrad (in bezug auf die Kleene-Hierarchie) der Menge der Formeln, die auf T immer den Wert Null annehmen.*

b) *Lassen sich zwei Räume T_1, T_2 durch eine Formel F in dem Sinne unterscheiden, daß etwa F identisch Null auf T_1, hingegen erfüllbar größer Null auf T_2 ist.*

c) *Welches ist der Kompliziertheitsgrad, wenn statt der Menge der Formeln, die identisch Null sind, die Menge der Formeln, die erfüllbar Null sind, betrachtet wird.*

d) *Sind zwei Räume T_1, T_2 durch eine Formel F in dem Sinne unterscheidbar, daß etwa F erfüllbar Null auf T_1, hingegen immer größer Null auf T_2 ist.*

Von diesen vier Problemen erweist sich das letzte (d) als das interessanteste. In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß zu einem Raum T jedenfalls dann eine Formel F mit den in d) gewünschten Eigenschaften konstruiert werden kann, wenn T einigen spezifischen logischen Forderungen genügt. Die Fragen a), b), c) werden in 6. kurz gestreift.

Als Aussagenkalkül wurde hier eine etwas leichter zu handhabende Form als die von A. Rose und B. Rosser in [2] entwickelte gewählt. Man kann aber unschwer zeigen, daß sich zu jeder Formel des hier entwickelten Kalküls eine erfüllungsgleiche aus der eben erwähnten finden läßt.

Es sei bemerkt, daß man es hier eigentlich nicht mit einem Kalkül zu tun hat, da weder Axiome noch Herleitungsregeln auftreten, sondern mit einem semantischen System, in welchem „wahr" erfüllbar Null bedeutet und falsch „immer größer Null".

2. Syntax. Im folgenden seien in unformaler Weise die Formeln des Kalküls $\mathcal{S}$ und ihre Interpretation beschrieben. Wegen der großen Zahl der auftretenden Variablen werden wir manchmal genötigt sein, verschiedene Dinge mit ein und demselben Buchstaben zu bezeichnen. Dies wird jedoch nur dann geschehen, wenn aus dem Text die Bedeutung des betreffenden Symbols eindeutig hervorgeht.

Wir beginnen mit einer Liste von Variablen für reelle Zahlen $X_1, X_2, \ldots, X, Y$ und den stetigen Funktionen $X+Y$, $X-Y$, $\max(X, Y)$, $\min(X, Y)$. Die Menge $\mathcal{A}$ der Aussagenfunktionen ist wie folgt definiert:

1. die rationalen Zahlen sind in $\mathcal{A}$,
2. mit jeder rationalen Zahl a ist aX, aY, aX_i in $\mathcal{A}$;
3. ist $P(U)$ in $\mathcal{A}$, wo U eine Variable aus obiger Liste ist, so auch $P(V)$, wo V eine der Variablen X, Y, X_i ist;
4. mit P, Q sind auch $P+Q$, $P-Q$, $\max(P,Q)$, $\min(P,Q)$ in $\mathcal{A}$.

Für das Weitere werden wir $X \wedge Y$, $X \vee Y$ für die Funktionen $\max(X, Y)$, $\min(X, Y)$ schreiben. Für die Funktion $\max(O, X-Y)$ führen wir die Abkürzung $X \dot{-} Y$ ein, für die Funktion $X \dot{-} Y \wedge Y \dot{-} X$ die Abkürzung $|X-Y|$.

Die in einer Formel auftretenden (rationalen Zahlen) bezeichnen wir als Koeffizienten.

Zu den Ausdrücken des Prädikatenkalküls gelangen wir, indem wir Individuenvariablen, Variablen für stetige Funktionen und zwei neue Operationen Max, Min zum Aufbau neuer Formeln zulassen.

$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \Psi_1, \ldots, e, s, a, m$ seien Variable für stetige Funktionen. Die Stellenzahlen der Variablen Φ_i, e sei eins, diejenige von s zwei, diejenigen von a, m drei. Wir behalten uns vor, die Stellenzahlen der restlichen Variablen nach Bedarf zu fixieren.

Ferner ist $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots, x, y, u, v$ eine Liste von Individuenvariablen. Die Menge $\mathcal{F}$ der Prädikatenformeln ist dann wie folgt definiert:

1. Ist Ψ eine Variable für n-stellige stetige Funktionen und $u_1, \ldots, u_n$ Individuenvariablen, so ist $\Psi(u_1, \ldots, u_n)$ in $\mathcal{F}$.
2. Ist $P(X_1, \ldots, X_m)$ in $\mathcal{F}$, und sind $A_1, \ldots, A_m$ Formeln aus $\mathcal{F}$, so ist $P(A_1, \ldots, A_m)$ in $\mathcal{F}$.
3. Ist A in $\mathcal{F}$, und w eine Individuenvariable aus obiger Liste, so sind $\operatorname{Max}_w A$, $\operatorname{Min}_w A$ in $\mathcal{F}$.

Man kann nun in üblicher Weise zwischen freiem und gebundenem Auftreten einer Individuenvariablen unterscheiden und sich auf die Menge $\mathcal{F}_0$ derjenigen Formeln beschränken, in denen eine Individuenvariable nur frei oder nur gebunden auftritt.

Sei nun A eine Formel aus $\mathcal{F}_0$, die nur die $n_1, \ldots, n_t$-stelligen Funktionsvariablen $\Psi_1, \ldots, \Psi_t$ enthält. $u_1, \ldots, u_s$ seien die in A vorkommenden Individuenvariablen. Durch Angabe eines kompakten topologischen Raumes T, von t $n_1, \ldots, n_t$-stelligen stetigen Funktionen $\Psi_1^0, \Psi_2^0, \ldots, \Psi_t^0$ und Punkten $a_1, \ldots, a_s$ aus T läßt sich der Formel A durch folgende Festsetzung eine reelle Zahl zuordnen:

1. *Ist A gleich $\Psi_i(u_1, \ldots, u_k)$ $(k = n_i)$, so ist der Wert von A gleich $\Psi_i^0(a_1, \ldots, a_s)$.*

2. *A sei von der Form $P(A_1, \ldots, A_p)$, mit $P(X_1, \ldots, X_p)$ aus $\mathcal{A} \cdot a_i$ sei der Wert von A_i $(i = 1, \ldots, p)$. Dann ist der Wert von A gleich $P(a_1, \ldots, a_p)$.*

3. *A sei von der Form $\operatorname{Max}_x B(x)$, und b_a der Wert von $B(a)$. Dann ist der Wert von A gleich $\sup_a b_a$, $a \in T$.*

4. *A ist von der Form $\operatorname{Min}_x B(x)$. Dann ist der Wert von A gleich $\inf_a b_a$, $a \in T$.*

Die Angabe eines kompakten Raumes T, von Funktionen Ψ_i^0 und von Punkten $a_1, \ldots, a_s$ aus T nennen wir eine *Bewertung* der Formel A. Nehmen zwei Formeln A und B für jede Bewertung denselben Wert an, so nennen wir A, B äquivalent.

Aus der Definition der Bewertung ergibt sich, daß wenn eine Formel F erfüllbar Null ist auf T (d. h. eine Bewertung zuläßt, die ihr den Wert Null erteilt), und T stetiges Bild ist von T_1, daß dann F auch erfüllbar Null ist auf T_1.

Für späteren Gebrauch müssen wir noch drei Teilmengen $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_0$ von Formeln aus $\mathcal{F}_0$ hervorheben. Eine Formel F ist genau dann in $\mathcal{P}_1$, wenn F von der Form $P(\Phi_{a_1}, \ldots, \Phi_{a_s})$ ist, mit $P(X_1, \ldots, X_s) \in \mathcal{A}$. F liegt genau dann in $\mathcal{P}$, wenn F in $\mathcal{P}$ liegt und nur Koeffizienten der Form $m2^{-n}$ enthält. F liegt genau dann in $\mathcal{P}_0$, wenn F in $\mathcal{P}$ liegt und von der Form $(0 \wedge L_1) \vee \ldots \vee (0 \wedge L_k)$ ist, wo die L_i keine Verbandsoperationen enthalten (somit Linearformen der Φ_{a_i} sind).

Bemerkung. Beachtet man die Identitäten

$$(a+c) \wedge (b+c) = (a \wedge b) + c\,,$$
$$-(-a \wedge -b) = a \vee b\,,$$
$$a(a \wedge b) = (aa \wedge ab)$$

für $a \geqslant 0$, so zeigt man leicht, daß sich zu jeder Formel P der Form $0 \wedge P'$, P' aus $\mathcal{P}$, eine zu P äquivalente Formel P_0 aus $\mathcal{P}_0$ finden läßt.

Da im Folgenden auch der zweiwertige Prädikatenkalkül erster Stufe Anwendung finden wird, sollen noch einige Bezeichnungen festgelegt werden. Prädikatenvariable des zweiwertigen Kalküls werden wir mit $P, Q, R, \ldots$ bezeichnen, während spezielle Prädikate durch einen Index $_0$ gekennzeichnet werden: P_0, Q_0, R_0. Formeln des zweiwertigen Kalküls bezeichnen wir mit $A, B, \ldots$ während Formeln aus $\mathcal{S}$ mit einer Tilde gekennzeichnet werden sollen: $\tilde{A}, \tilde{B}, \ldots$

3. Banachverbände stetiger Funktionen.

a) Alle im Folgenden betrachteten topologischen Räume sollen metrisch, kompakt, separabel und zusammenhängend sein und mindestens zwei Punkte enthalten (d. h. sie sind auf $[0,1]$ abbildbar). Mit $C(T)$ bezeichnen wir den Banachraum der stetigen Funktionen über T, wobei $\|f\| = \sup_p |f(p)|$, $p \in T$, ist.

Nehmen wir noch die Booleschen Operationen $\wedge$, $\vee$ dazu, so wird $C(T)$ zu einem Banachverband, den wir mit $V(T)$ bezeichnen. Für späteren Gebrauch zitieren wir zwei bekannte Sätze:

Satz 1. *Auf einem kompakten Raum T sei eine Gesamtheit $\mathcal{A}$ stetiger reeller Funktionen $f(p)$ gegeben, die folgenden Bedingungen genügen:*

1. *$\mathcal{A}$ is ein Verband.*

2. *Für zwei verschiedene Punkte p, q aus T und beliebige reelle Zahlen a, b gibt es eine Funktion $f_{a,b}(t)$ aus $\mathcal{A}$ mit*

$$f_{a,b}(P) = a\,, \qquad f_{a,b}(q) = b\,.$$

Dann ist $\mathcal{A}$ dicht in $C(T)$.

Einen Beweis dieses Satzes findet man z. B. in [3].

Satz 2. *Zwei Räume T_1, T_2 sind genau dann homöomorph, wenn $C(T_1)$ und $C(T_2)$ isometrisch sind.*

Einen Beweis findet man in [4].

$\mathcal{B}$ sei eine Familie stetiger Funktionen auf dem Raum T. Zwei Punkte p, q aus T sollen äquivalent heißen, wenn $f(p) = f(q)$ für alle f aus $\mathcal{B}$ ist. Die so definierte Äquivalenzrelation erzeugt eine Klasseneinteilung. $\mathcal{M}$ sei die Menge dieser Klassen. Die Familie $\mathcal{B}$ definiert in $\mathcal{M}$ eine schwache Topologie, wodurch $\mathcal{M}$ zu einem topologischen Raum T' wird. Man zeigt leicht, daß die Abbildung, die jedem $p \in T$ diejenige Klasse aus T' zuordnet, die p enthält, den Raum T stetig auf T' abbildet. Daraus ergibt sich der

Satz 3. *T_1 ist genau dann auf T_2 abbildbar, wenn $V(T_2)$ verbandsisometrisch zu einem Teilverband V (1) von $V(T_1)$ ist, der die Konstante 1 enthält.*

(1) Bezüglich Definition und Eigenschaften von Banachverbänden stetiger Funktionen verweisen wir auf [4].

Beweis. Wird T_1 durch Φ stetig auf T_2 abgebildet, so ist die Behauptung klar.

Sei umgekehrt V^* ein Teilverband von $V(T_1)$, der die Konstanten enthält, und sei V^* isometrisch zu $V(T_2)$. Die Funktionenfamilie V^* erzeugt, wie eben beschrieben wurde, einen Raum T', der stetiges Bild von T_1 ist. Sind p, q zwei verschiedene Punkte aus T_1', so gibt es eine stetige Funktion f aus V^*, für welche $f(p) \neq f(q)$ ist. Sind a, b zwei vorgegebene Zahlen, so findet man Zahlen α, β so, daß $af(p) + \beta = a$, $af(q) + \beta = b$ ist. Somit läßt sich Satz 1 anwenden und es ergibt sich, das V^* mit $V(T_1')$ übereinstimmt.

Da $V(T_1')$ und $V(T_2)$ isometrisch sind, folgt insbesondere, daß auch $C(T_1')$ und $C(T_2)$ isometrisch sind, womit aus Satz 2 die Homöomorphie von T_1' und T_2 folgt. Da T_1' stetiges Bild von T_1 ist, folgt die Behauptung.

b) Einem Raum T und einer Folge von Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ aus $C(T)$ ordnen wir eine Menge von Funktionen $\mathcal{P}(T, \varphi)$ zu durch die Festsetzung: $f \in \mathcal{P}(T, \varphi)$ genau dann, wenn es eine Formel $P(\Phi_{a_1}, \ldots, \Phi_{a_s})$ aus $\mathcal{P}$, so gibt, daß $f(x) = P\big(\varphi_{a_1}(x), \ldots, \varphi_{a_s}(x)\big)$ ist. Ersetzen wir in dieser Definition die Formelmenge $\mathcal{P}$ durch die Mengen $\mathcal{P}_0$ bzw. $\mathcal{P}_1$, so erhalten wir neue Mengen von Funktionen, die wir entsprechend mit $\mathcal{P}_0(T, \varphi)$ bezw. $\mathcal{P}_1(T, \varphi)$ bezeichnen. Wie leicht zu sehen, sind die abgeschlossenen Hüllen $\overline{\mathcal{P}(T, \varphi)}$, $\overline{\mathcal{P}_1(T, \varphi)}$ Banachverbände und insbesondere ist $\overline{\mathcal{P}(T, \varphi)} = \overline{\mathcal{P}_1(T, \varphi)}$. Mit $\mathcal{G}$ bezeichnen wir die Menge der formalen Ungleichungen $\alpha \leqslant \|P\|$, $\|Q\| \leqslant \beta$, wo P, Q aus $\mathcal{P}$ sind und α, β von der Form $m2^{-n}$ $(m \geqslant 0)$ sind.

Sei $\mathcal{W}$ eine Teilmenge von $\mathcal{G}$. Wir sagen, $\mathcal{W}$ sei auf dem topologischen Raum T durch die Folge stetiger Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ aus $C(T)$ erfüllt, wenn gilt: sind $\alpha \leqslant \|P(\Phi_{a_1}, \ldots, \Phi_{a_s})\|$, $\|Q(\Phi_{a_1}, \ldots, \Phi_{a_s})\| \leqslant \beta$ formale Ungleichungen aus $\mathcal{W}$, so ist

$$\alpha \leqslant \big\|P\big(\varphi_{a_1}(x), \ldots, \varphi_{a_s}(x)\big)\big\| \quad \text{und} \quad \beta \geqslant \big\|Q\big(\varphi_{a_1}(x), \ldots, \varphi_{a_s}(x)\big)\big\|.$$

Umgekehrt läßt sich jedem Raum T und jeder Folge von Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ aus $C(T)$ eine Teilmenge $\mathcal{W}(T, \varphi)$ aus $\mathcal{G}$ zuordnen durch die Festsetzung:

$$\alpha \leqslant \|P(\Phi_{a_1}, \ldots, \Phi_{a_s})\| \in \mathcal{W} \leftrightarrow \|P(\varphi_{a_1}, \ldots, \varphi_{a_s})\| \geqslant \alpha\,,$$

$$\|Q(\Phi_{a_1}, \ldots, \Phi_{a_s})\| \leqslant \beta \in \mathcal{W} \leftrightarrow \|Q(\varphi_{a_1}, \ldots, \varphi_{a_s})\| \leqslant \beta\,.$$

$\mathcal{W}_0(T, \varphi)$ ist die wie folgt definierte Teilmenge von $\mathcal{W}(T, \varphi)$: die formalen Ungleichungen $\alpha \leqslant \|P\|$, $\|Q\| \leqslant \beta$ sind genau dann Elemente von $\mathcal{W}_0(T, \varphi)$, wenn sie Elemente von $\mathcal{W}(T, \varphi)$ sind und P, Q Formeln aus $\mathcal{P}_0$ sind.

c) T_1, T_2 seien zwei Räume und $\varphi_0 \equiv 1$, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, eine Folge von Funktionen aus $C(T_2)$, für welche $\overline{\mathcal{P}_1(T_2, \varphi)} = V(T_2)$ ist. Dann gilt der

Satz 4. *T_1 ist genau dann auf T_2 abbildbar, wenn $\mathcal{W}(T_2, \varphi)$ erfüllbar ist auf T_1.*

Beweis. Es ist trivial zu sehen, daß $\mathcal{W}(T_2, \varphi)$ erfüllbar ist auf T_1, wenn T_1 stetig auf T_2 abbildbar ist.

Sei umgekehrt $\mathcal{W}(T_2, \varphi)$ erfüllt auf T_1 durch die Folge $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \ldots$ aus $C(T_1)$. Die Abbildung, die jeder Funktion $P(\varphi_{a_1}, \ldots, \varphi_{a_s})$ aus $\mathcal{P}(T_2, \varphi)$ die Funktion $P(\Psi_{a_1}, \ldots, \Psi_{a_s})$ aus $\mathcal{P}(T_1, \Psi)$ zuordnet, ist eine Isometrie zwischen den Mengen $\mathcal{P}(T_1, \Psi)$ und $\mathcal{P}(T_2, \varphi)$. Um dies einzusehen, genügt es zu zeigen, daß aus $\|P(\varphi_{a_1}, \ldots, \varphi_{a_s})\| = \xi$ die Gleichung $\|P(\Psi_{a_1}, \ldots, \Psi_{a_s})\| = \xi$ folgt.

Seien $\{\mu_n\}$, $\{\nu_n\}$ zwei Folgen von rationalen Zahlen der Form $m2^{-n}$, mit $\lim \mu_n = \xi$, $\lim \nu_n = \xi$, $\mu_n > \mu_{n+1}$, $\nu_n < \nu_{n+1}$. Dann gilt für alle n:

$$\nu_n \leqslant \|P(\varphi_{a_1}, \ldots, \varphi_{a_s})\| \leqslant \mu_n .$$

Das heißt $\mathcal{W}(T_2, \varphi)$ enthält alle formalen Ungleichungen

$$\nu_n \leqslant \|P(\Phi_{a_1}, \ldots, \Phi_{a_s})\| , \qquad \|P(\Phi_{a_1}, \ldots, \Phi_{a_s})\| \leqslant \mu_n .$$

Da $\mathcal{W}(T_2, \varphi)$ auf T_1 durch $\Psi_0, \Psi_1, \ldots$ erfüllt wird, sind alle Ungleichungen $\nu_n \leqslant \|P(\Psi_{a_1}, \ldots, \Psi_{a_s})\| \leqslant \mu_n$ erfüllt, woraus sofort $\|P(\Psi_{a_1}, \ldots, \Psi_{a_s})\| = \xi$ folgt. Die so definierte Isometrie zwischen $\mathcal{P}(T_2, \varphi)$ und $\mathcal{P}(T_1, \Psi)$ läßt sich zu einer Verbandsisometrie zwischen ihren abgeschlossenen Hüllen $\overline{\mathcal{P}(T_2, \varphi)}$, $\overline{\mathcal{P}(T_1, \Psi)}$ fortsetzen. Nach Voraussetzung ist $\overline{\mathcal{P}_1(T_2, \varphi)} = V(T_2)$ und demnach auch $\overline{\mathcal{P}(T_2, \varphi)} = V(T_2)$. Ferner folgt aus $\varphi_0 \equiv 1$ sofort $\Psi \equiv 1$. Somit ist Satz 3 anwendbar, woraus die Behauptung folgt.

Ist f eine Funktion aus $C(T)$, so gelten die Beziehungen:

$$f = (0 \wedge f) - (0 \wedge -f) , \qquad \|f\| = \|0 \wedge f\| \wedge \|0 \wedge -f\| .$$

Daraus und aus Satz 4 erhält man leicht die

Folgerung 1. *T_1 ist genau dann stetig auf T_2 abbildbar, wenn $\mathcal{W}_0(T_2, \varphi)$ auf T_1 erfüllbar ist.*

Da es nur abzählbar viele formale Ungleichungen mit rationalen Koeffizienten gibt, lassen sich die Elemente von $\mathcal{W}_0(T, \varphi)$ in eine Doppelfolge anordnen:

$$\alpha_1 \leqslant \|P_1\| , \quad \alpha_2 \leqslant \|P_2\| , \quad \ldots ,$$
$$\|Q_1\| \leqslant \beta_1 , \quad \|Q_2\| \leqslant \beta_2 , \quad \ldots$$

Sind m_i, n_i zwei Folgen natürlicher Zahlen, so kann man die Ungleichungen bilden:

$$\alpha_1 2^{-m_1} \leqslant \|P_1 2^{-m_1}\| , \quad \alpha_2 2^{-m_2} \leqslant \|P_2 2^{-m_2}\| , \quad \ldots ,$$
$$\|Q_1 2^{-n_1}\| \leqslant 2^{-n_1}\beta_1 , \quad \|Q_2 2^{-n_2}\| \leqslant 2^{-n_2}\beta_2 , \quad \ldots$$

Man erhält auf diese Weise eine Teilmenge aus $\mathcal{W}_0(T, \varphi)$, die mit $\mathcal{W}_0(T, \varphi, m, n)$ bezeichnet werden soll. Dann gilt offenbar unabhängig von der Wahl der Folgen $\{m_i\}\{n_i\}$ die

Folgerung 2. *T_1 ist genau dann auf T_2 abbildbar, wenn $\mathcal{W}_0(T_2, \varphi, m, n)$ auf T_1 erfüllbar ist.*

4. Entwicklung des logischen Formalismus.

A. In diesem Abschnitt sollen einige Hilfsmittel zusammengestellt werden, welche dazu dienen, die in der Einleitung erwähnte Formel zu konstruieren. Der erste Schritt besteht darin, den gewöhnlichen Prädikatenkalkül erster Stufe im Formalismus $\mathfrak{S}$ zu interpretieren. Genauer: zu einer Formel F des Prädikatenkalküls soll eine Formel $\tilde{F}$ aus $\mathfrak{S}$ konstruiert werden, so daß aus der Erfüllbarkeit von F die Erfüllbarkeit Null von $\tilde{F}$ folgt und umgekehrt. Wie dies geschieht, soll im Folgenden ausgeführt werden.

Vorerst sei festgelegt, daß immer wenn in diesem Abschnitt von stetigen Funktionen die Rede ist, nur solche gemeint sind, deren Wertebereich in $[0, 1]$ liegt. Um unnötige Komplikationen zu vermeiden, begnügen wir uns hier damit, die oben angekündigte Konstruktion von $\tilde{F}$ für ein spezielles F durchzuführen. Doch sei gleich bemerkt, daß schon alle charakteristischen Schwierigkeiten im folgenden Beispiel enthalten sind und dieselbe Konstruktion sich in völlig analoger Weise für eine beliebige Formel in pränexer Normalform durchführen läßt.

F sei von der Form $(x_1)(x_2)(\mathsf{E}y_1)(\mathsf{E}y_2)(x_3)(\mathsf{E}y_3)S(x_1, x_2, y_1, y_2, x_3, y_3)$, wo S quantorenfrei ist und nur die zweistellige Prädikatenvariable P und die dreistellige Prädikatenvariable Q enthält.

f sei eine Variable für zweistellige stetige Funktionen, g eine solche für dreistellige. u, v, w, sollen unabhängig voneinander die Variablen x_i, y_i durchlaufen.

Nun ordnen wir jeder aus den Variablen P, Q, x_i, y_i, gebildeten, quantorenfreien Formel T des Prädikatenkalküls eine Formel $\tilde{T}$ aus $\mathfrak{S}$ nach folgender Vorschrift zu:

1) ist T gleich $P(u, v)$ oder $Q(u, v, w)$, so sei T gleich $f(u, v)$ bezw. $g(u, v, w)$;

2) ist T von der Form $A \wedge B$ oder $A \vee B$, so ist $\tilde{T}$ gleich $A \wedge B$ bezw. $A \vee B$;

3) ist T von der Form $\neg A$, so ist $\tilde{T}$ gleich $1/2 \dot{-} A$.

Durch diese Festsetzung ist insbesondere auch der Formel $S(x_1, x_2, \ldots, y_3)$ eine Formel $\tilde{S}(x_1, x_2, y_1, y_2, x_3, y_3)$ zugeordnet. Werden in $\tilde{S}$ die Funktionsvariablen durch stetige Funktionen ersetzt, in S die Prädikatenvariablen durch Prädikate, so sollen die Resultate dieser Ersetzung kurz mit $\tilde{S}_0$ bzw. S_0 bezeichnet werden.

Für späteren Gebrauch erwähnen wir den:

Hilfssatz 1. *Gibt es einen topologischen Raum T, darauf eine zweistellige stetige Funktion φ, eine dreistellige Funktion Ψ und eine offene Menge 0, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:*

a) *für $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in 0$ gilt $\varphi(\alpha_1, \alpha_2) \gtrless 1/2$, $\Psi(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \gtrless 1/2$;*

b) *zu beliebigen $\alpha_1, \alpha_2 \in 0$ findet man $\beta_1, \beta_2 \in 0$, so daß für jedes α_3 ein $\beta_3 \in 0$ existiert mit $S_0(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \alpha_3, \beta_3) > 1/2$;*

so hat F ein Modell.

Beweis. Sind die Bedingungen des Hilfssatzes erfüllt, so betrachten wir einen festen Raum T und nehmen die Punkte von 0 als Elemente eines Modells für F. Wir definieren zwei Prädikate $A_0(x, y)$, $B_0(x, y, z)$ wie folgt:

$$A_0(\alpha_1, \alpha_2) \longleftrightarrow \varphi(\alpha_1, \alpha_2) > 1/2\,,$$
$$B_0(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \leftrightarrow \Psi(\beta_1, \beta_2, \beta_3) > 1/2\,.$$

Dann zeigt man leicht:

$$S_0(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \alpha_3, \beta_3) \leftrightarrow \widetilde{S}_0(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \alpha_3, \beta_3) > 1/2\,,$$
$$\neg S_0(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \alpha_3, \beta_3) \leftrightarrow \widetilde{S}_0(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \alpha_3, \beta_3) < 1/2\,.$$

Aus b) ergibt sich, daß F mit den so definierten Prädikaten den Wert Wahr erhält, womit der Satz bewiesen ist.

Sei h eine Variable für einstellige stetige Funktionen, die wir als Hilfssvariable bezeichnen. Dann bilden wir die Formeln:

$$|1/4 \dot{-} h(x)|\,,$$

$$\operatorname*{Max}_x \operatorname*{Max}_y \big\{h(x) \vee h(y) \vee \big[\big(h(x) \vee h(y)\big) \dot{-} |f(x, y) \dot{-} 1/2|\big]\big\}\,,$$

$$\operatorname*{Max}_{x,y,z} \{h(x) \vee h(y) \vee h(z) \vee [h(x) \vee h(y) \vee h(z) \dot{-} |g(x, y, z) \dot{-} 1/2|]\}\,,$$

$$\operatorname*{Max}_{x_1,x_2} \Big\{h(x_1) \vee h(x_2) \vee \min_{y_1 y_2} \Big\{\Big(h(x_1) \vee h(x_2) \dot{-} 2\big(h(y_1) \vee h(y_2)\big)\Big) \wedge$$
$$\wedge \operatorname*{Max}_{x_3} \Big\{h(x_3) \vee \min_{y_3} \Big\{\big(h(x_1) \vee h(x_2) \vee h(x_3) \dot{-} 2h(y_3)\big) \wedge$$
$$\wedge \big(1/2 \dot{-} \widetilde{S}(x_1, x_2, y_1, y_2, x_3, y_3)\big)\Big\}\Big\}\Big\}\Big\}\,.$$

Diese Formeln bezeichnen wir der Reihe nach mit $A(h)$, $B(h, f)$, $C(h, g)$, $D(h, f, g)$ oder kurz A, B, C, D. Ihre Konjunktion $A \wedge B \wedge C \wedge D$ sei $\widetilde{F}(h, f, g)$. Ersetzen wir in diesen Formeln h, f, g durch stetige Funktionen Φ, φ, Ψ, so soll das Resultat dieser Ersetzung mit $A(\Phi)$, $B(\Phi, \varphi), \ldots$, $\widetilde{F}(\Phi, \varphi, \Psi)$ bezeichnet werden. Es gilt der

Satz 5. *F hat genau dann ein Modell, wenn es einen Raum T gibt, auf dem F erfüllbar Null ist.*

Beweis. Sei T ein topologischer Raum und $\Phi(x)$, $\varphi(x, y)$, $\Psi(x, y, z)$ drei darauf definierte stetige Funktionen, für welche $\widetilde{F}(\Phi, \varphi, \Psi) = 0$ ist.

Dann ist speziell $A(\Phi) = B(\Phi, \varphi) = C(\Phi, \Psi) = D(\Phi, \varphi, \Psi) = 0$. Aus $A(\Phi) = 0$ folgt $\operatorname*{Max}_x \Phi(x) = 1/4$, dh. die offene Menge 0 der Punkte p aus T, für die $\Phi(p) > 0$ ist, ist nicht leer. Aus $B(\Phi, \varphi) = C(\Phi, \Psi) = 0$ folgt für $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ aus 0:

$$|\varphi(\alpha_1, \alpha_2) \dot{-} 1/2| \geqslant \Phi(\alpha_1) \vee \Phi(\alpha_2)\,,$$
$$|\Psi(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \dot{-} 1/2| \geqslant \Phi(\beta_1) \vee \Phi(\beta_2) \vee \Phi(\beta_3)\,,$$

dh.

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2) \gtrless 1/2\,, \qquad \Psi(\beta_1, \beta_2, \beta_2) \gtrless 1/2\,,$$

0, φ, Ψ, erfüllen somit die Bedingung a) aus Hilfssatz 1. Aus $D(\Phi, \varphi, \Psi) = 0$ und aus der Kompaktheit von T folgt, daß für alle α_1, α_2 aus 0 Punkte β_1, β_2 so zu finden sind, daß zu jedem α_3 aus 0 ein β_3 existiert mit:

$$2\big(\Phi(\beta_1) \vee \Phi(\beta_2)\big) \geqslant \Phi(\alpha_1) \vee \Phi(\alpha_2)\,,$$
$$2\Phi(\beta_3) \geqslant \Phi(\alpha_1) \vee \Phi(\alpha_2) \vee \Phi(\alpha_3)\,,$$
$$\widetilde{S}_0(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \alpha_3, \beta_3) \geqslant 1/2\,.$$

Dann ist aber $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in 0$, somit $S_0(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \alpha_3, \beta_3) > 1/2$. Dh. $0, \varphi, \Psi$ erfüllen auch die Bedingung b), von Hilfssatz 1, woraus die Erfüllbarkeit von F folgt.

Sei umgekehrt F erfüllbar. $A_0(x, y)$, $B_0(x, y, z)$ sein zwei zahlentheoretische Prädikate, welche der Formel F den Wert Wahr erteilen. Dann gibt es zahlentheoretische Funktionen $u(m_1, m_2)$, $v(m_1, m_2)$, $w(m_1, m_2, m_3)$, so daß:

$$S_0\big(m_1, m_2, u(m_1, m_2), v(m_1, m_2), m_3, w(m_1, m_2, m_3)\big)$$

gilt. Wir setzen $\mu(N) = \operatorname*{Max}_{m_i}(u \wedge v \wedge w) + N$ und definieren eine Funktion $d(n)$ wie folgt: $d(0) = 0$, $d(n+1) = \mu\big(d(n)\big)$. $d(n)$ ist offenbar streng monoton. Auf der Einheitsstrecke $[0, 1]$ wählen wir zwei Folgen $\{\xi_i\}$, $\{\eta_i\}$, mit $0 < \xi_i, \eta_i$ und $\xi_i < \eta_i < \xi_{i+1}$, $\lim \xi_i = \lim \eta_i < 1$. Die Menge 0 sei Vereinigungsmenge der offenen Intervalle $e_i = (\xi_i, \eta_i) \cdot \zeta_i$ sei der Mittelpunkt von e_i. Wir definieren eine auf $[0, 1]$ stetige Funktion Φ wie folgt: auf dem Komplement von 0 sei $\Phi(x) = 0$, für $i \leqslant d(0)$ sei $\Phi(\zeta_i) = 1/4$, für $d(n-1) < i \leqslant d(n)$ sei $\Phi(\zeta_i) = 2^{-(n+2)}$, dazwischen linear. Schließlich wählen wir zwei stetige Funktionen $\varphi(x, y)$, $\Psi(x, y, z)$ welche den Einschränkungen genügen: ist $\alpha_1 \in e_i$, $\alpha_2 \in e_k$, so sei $\varphi(\alpha_1, \alpha_2) > 1/2$ wenn $A_0(i, k) < 1/2$ andernfalls; ist $\alpha_1 \in e_i$, $\alpha_2 \in e_k$, $\alpha_3 \in e_l$ so sei $\Psi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) > 1/2$

wenn $B_0(i, k, l)$, $< 1/2$ andernfalls. Dann zeigt man leicht: $\widetilde{F}(\Phi, \varphi, \Psi) = 0$, womit der Satz bewiesen ist.

Da wir nur solche topologischen Räume betrachten, die auf $[0, 1]$ abbildbar sind, erhält man unmittelbar die

Folgerung 3. *Ist $\widetilde{F}$ auf einem Raum erfüllbar Null, so auf allen anderen.*

Beweis. Ist F erfüllbar Null auf T_0, so hat F nach Satz 5 ein Modell. Dann ist F auf der Einheitsstrecke erfüllbar, somit auf allen (hier betrachteten) Räumen.

Wir erwähnen noch ohne Beweis eine Tatsache. $F_1, \ldots, F_n$ seien n pränexe Normalformen, $\widetilde{F}_1(h, \ldots)$, ..., $\widetilde{F}_n(h, \ldots)$ die nach obiger Vorschrift konstruierten zugeordneten Formeln. Auf die gleiche Art, wie beim Beweis von Satz 5 zeigt man, daß $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n$ genau dann ein Modell hat, wenn es einen Raum T gibt, auf welchem $\widetilde{F}_1(h, \ldots) \wedge \ldots \wedge \widetilde{F}_n(h, \ldots)$ erfüllbar Null ist, und daß in diesem Falle diese Formel auf jedem Raum T erfüllbar Null ist.

B. $\mathfrak{Z}$ sei ein Axiomensystem der Zahlentheorie in pränexer Normalform. N, E, S, A, M seien die darin vorkommenden Prädikatenvariablen, die der Reihe nach die Null, Gleichheit, Nachfolger, Addition und Multiplikation repräsentieren. $\widetilde{\mathfrak{Z}}$ sei die dem $\mathfrak{Z}$ zugeordnete Formel, welche aus den Variablen h, n, e, s, a, m aufgebaut ist. h ist die Hilfsvariable, und n, e, s, a, m sind der Reihe nach den Variablen N, E, S, M zugeordnet. Φ, n_0, e_0, s_0, a_0, m_0 seien stetige Funktionen auf dem Raum T, für welche $\widetilde{\mathfrak{Z}}(\Phi, n_0, \ldots) = 0$ ist. Dann läßt sich auf der Menge $O = \{p\colon \Phi(p) > 0\}$ wie folgt eine Äquivalenzrelation einführen: $p_1 \sim p_2$ genau dann, wenn $e_0(p_1, p_2) > 1/2$ ist. Dadurch zerfällt O in offene Äquivalenzklassen $\{C\}$, nämlich die Elemente eines Modells für $\mathfrak{Z}$, welches wie oben durch die Festsetzungen $N_0(C) \leftrightarrow n_0(p) > 1/2$ für $p \in O$, $E(C_1, C_2) \leftrightarrow e_0(p_1, p_2) > 1/2$ für $p_0, p_2 \in O$, ... usw., gewonnen wird.

Die Menge $\{C\}$ enthält insbesondere eine Folge $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots$ von Äquivalenzklassen, welche der Reihe nach den Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ entsprechen. Dabei kann Φ stets so gewählt werden, daß zu jedem i eine Zahl $\delta_i > 0$ existiert mit der Eigenschaft: ist $k \neq i$, so haben die beiden Mengen η_i, η_k einem Abstand $\geqslant \delta_i$. Im Folgenden setzen wir stets voraus, daß Φ auf diese Weise gewählt worden sei.

Definition 1. Ein zahlentheoretisches Prädikat $P_0(x_1, \ldots, x_n)$ heißt *darstellbar* durch die Formel $\widetilde{G}(p)$, wenn gilt:

a) ist $\widetilde{G}(p_0) \wedge \widetilde{\mathfrak{Z}} = 0$ auf T und $x_1 \in \eta_{i_1}, \ldots, x_n \in \eta_{i_n}$, so ist $p_0(x_1, \ldots, x_n) > 1/2$ wenn $P_0(i_1, \ldots, i_n)$, im andern Fall $< 1/2$;

b) ist $\widetilde{\mathfrak{Z}} = 0$ auf T und das erzeugte Modell die Zahlentheorie, so ex. p_0 mit $\widetilde{G}(p_0) = 0$.

p nennen wir die dem Prädikat P_0 zugeordnete Funktionsvariable. Es gilt der

Satz 6. *Jedes rekursive Prädikat P_0 ist darstellbar.*

Beweis. Wir verwenden die Tatsache, daß sich jedes rekursive Prädikat aus der Null, der Nachfolgerfunktion $'$ und den Prädikaten $x + y = z$, $xy = z$ mit den Operationen $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $(\mathrm{E}y)_{<x}$, $(y)_{<x}$ gewinnen läßt.

1) P_0 sei von der Form $U_0 \wedge V_0$. $\widetilde{G}_1(u)$ sei die U_0 darstellende Formel, $\widetilde{G}_2(v)$ die V_0 darstellende Formel. Dann bilden wir den Ausdruck:

$$\operatorname*{Max}_{x_1, \ldots, x_n} \{h(x_1) \vee \ldots \vee h(x_n) \vee |p(x_1, \ldots, x_n) \dot{-} (u(x_1, \ldots, x_n) \wedge v(x_1, \ldots, x_n))|\} \wedge \\ \wedge \widetilde{G}_1(u) \wedge \widetilde{G}_2(v)\,.$$

Dies ist offenbar die gesuchte Formel $\widetilde{G}(p)$:

2) ist P_0 von der Form $U_0 \vee V_0$, so verfährt man analog;

3) ist P_0 von der Form $\neg U_0$ und $\widetilde{G}_1(u)$ die zu U_0 gehörige Formel, so können wir für $\widetilde{G}(p)$ folgenden Ausdruck nehmen:

$$\operatorname*{Max}_{x_1, \ldots, x_n} [h(x_1) \vee \ldots \vee h(x_n) \vee |p(x_1, \ldots, x_n) \dot{-} (1 - u(x_1, \ldots, x_n))|] \wedge \widetilde{G}_1(u)\,,$$

4) sei $P_0(x, y)$ von der Form $(\mathrm{E}z)_{\leqslant y} U_0(x, z)$ und $\widetilde{G}_1(u)$ die zu U_0 gehörige Formel. Wir bilden die Ausdrücke:

$$\operatorname*{Max}_{x,y} \{h(x) \vee h(y) \vee n(y) \dot{-} 1/2 \vee |p(x, y) - u(x, y)|\}\,,$$

$$\operatorname*{Max}_{x,y,z,t} \{h(x) \vee \ldots \vee h(t) \vee S(t, z) \dot{-} 1/2 \vee |p(x, z) - (p(x, t) \vee u_0(x, z))|\}\,,$$

die wir der Reihe nach mit I, II bezeichnen. Die Konjunktion $\mathrm{I} \wedge \mathrm{II} \wedge \widetilde{G}_1(u)$ stellt dann die gesuchte Formel $\widetilde{G}(p)$ dar.

5) ist $P_0(x, y)$ von der Form $(z)_{\leqslant y} U_0(x, z)$, so verfährt man analog.

Man zeigt leicht, daß die so definierten Formeln wirklich den Bedingungen a), b) von Def. 1. genügen.

Insbesondere sind die Prädikate $1 = x$, $x < y$ darstellbar. Für diese beiden Prädikate führen wir die Bezeichnungen $I_0(x)$, $K_0(x, y)$ ein. $\widetilde{G}_1(i)$, $\widetilde{G}_2(k)$ seien die Formeln welche sie darstellen.

C. Mit dem bisher entwickelten Formalismus sind wir in der Lage, gewisse rekursive Funktionen in unserem Formalismus darzustellen.

$f(x_1, x_2)$ sei eine auf den positiven ganzen Zahlen definierte Funktion, deren Wertebereich die rationalen Zahlen aus $[0, 1]$ sind.

Definition 2. Wir sagen, f sei eine *normale Funktion*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) es ist $f(m, n) = a(m, n) 2^{-b(m,n)}$;

b) zu jedem ε gibt es ein $N(\varepsilon)$, so daß für $n+m \geqslant N(\varepsilon)$ die Ungleichung $f(m, n) \leqslant \varepsilon$ gilt.

Sind $a(m, n)$, $b(m, n)$ rekursiv, so nennen wir f rekursiv normal.

Hilfssatz 2. *$f(m, n)$ sei eine normale Funktion. $\{a_i\}$, $\{\beta_i\}$ seien zwei Folgen auf $[0, 1]$ mit $0 < a_i$, $0 < \beta_i$, $a_i < \beta_i < a_{i+1}$ und $\lim a_i = \lim \beta_i < 1$. e_i sei das offene Intervall (a_i, β_i). Dann gibt es eine stetige Funktion $\mu(x_1, x_2)$ mit der Eigenschaft: für $x_1 \in e_i$, $x_2 \in e_k$ ist $\mu(x_1, x_2) = f(i, k)$.*

Der Beweis ist offenbar trivial.

Definition 3. Eine normale Funktion $f(m, n)$ heißt *darstellbar* durch die Formel $\widetilde{H}(\mu)$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) ist $\widetilde{H}(\mu) \wedge \widetilde{\mathfrak{Z}} = 0$ auf T, und ist $x_1 \in \eta_i$, $x_2 \in \eta_k$, dann gilt $\mu(x_1, x_2) = f(i, k)$.

b) Ist $\widetilde{\mathfrak{Z}} = 0$ auf T und das erzeugte Modell die Zahlentheorie, so ex. u mit $\widetilde{H}(u) = 0$.

Gibt es eine Formel, welche f darstellt, so heißt f kurz darstellbar. Wir beginnen damit, die Darstellbarkeit einiger spezieller Funktionen nachzuweisen.

1) Die Funktion 2^{-n} ist darstellbar. Wir bilden die Ausdrücke:

$$\operatorname*{Max}_{x} \{h(x) \vee n(x) \dot{-} 1/2 \vee |\delta(x) \dot{-} 1|\},$$

$$\operatorname*{Max}_{x,y} \{h(x) \vee h(y) \vee S(x, y) \dot{-} 1/2 \vee |2\delta(y) - \delta(x)|\}.$$

Die Konjunktion dieser beiden Ausdrücke liefert die gesuchte Formel $\widetilde{H}_1(\delta)$. δ ist die zur Funktion gehörige Funktionsvariable. Man zeigt leicht, daß die Bedingungen a, b von Def. 3 erfüllt sind.

2) $f(m)$ sei rekursiv normal und von der Form $2^{-b(m)}$. Dann ist f darstellbar. Das Prädikat $b(m) = n$ $(P_0(m, n))$ ist rekursiv und somit darstellbar. $\widetilde{G}_3(p)$ sei eine dieses Prädikat darstellende Formel, p die entsprechende Funktionsvariable. Wir bilden den Ausdruck:

$$\widetilde{G}_3(p) \wedge H_1(\delta) \wedge \operatorname*{Max}_{x,y} \{h(x) \vee h(y) \vee p(xy) \dot{-} 1/2 \vee |\varepsilon(x) - \delta(y)|\}$$

und bezeichnen ihn mit $\widetilde{H}_2(\varepsilon)$. Unter Benutzung des Hilfssatzes 2 sieht man leicht, daß $\widetilde{H}_2(\varepsilon)$ den Bedingungen a, b von Def. 3 genügt und somit f darstellt.

3) $g(m)$ sei rekursiv normal und von der Form $a(m)2^{-b(m)}$. $1(m, n)$ sei die wie folgt definierte Funktion: für $n \leqslant a(m)$ ist $1(m, n) = n2^{-b(m)}$, für $n > a(m)$ ist $1(m, n) = 0$. Wir zeigen, daß die Funktion $1(m, n)$ darstellbar ist. Mit $a(m)$ ist auch das Prädikat $R_0^1(m, n) \equiv n < a(m)$ rekursiv, mithin darstellbar. $\widetilde{G}_4(r_1)$ sei eine Formel, die R_0^1 darstellt und $\widetilde{H}_2(\varepsilon)$ sei wieder die oben konstruierte Formel, welche $2^{-b(m)}$ darstellt. Wir bilden die Ausdrücke:

$$\text{I:} \quad \operatorname*{Max}_{x,y} \{h(x) \vee h(y) \vee n(y) \dot{-} 1/2 \vee \xi(x, y)\};$$

$$\text{II:} \quad \operatorname*{Max}_{xyz} \{h(x) \vee h(y) \vee h(z) \vee r_1(x, y) \dot{-} 1/2 \vee S(y, z) \dot{-} 1/2 \vee \\ \vee \left|\xi(x, z) \dot{-} \big(\xi(x, y) + \varepsilon(x)\big)\right|\};$$

$$\text{III:} \quad \operatorname*{Max}_{x,y,z} \{h(x) \vee h(y) \vee h(z) \vee 1/2 \dot{-} r_1(x, z) \vee S(z, y) \dot{-} 1/2 \vee \xi(x, y)\}.$$

Nun bilden wir die Konjunktion $\mathrm{I} \wedge \mathrm{II} \wedge \mathrm{III} \wedge \widetilde{G}_4(r_1) \wedge \widetilde{H}_2(\varepsilon)$ und bezeichnen sie mit $\widetilde{H}_3(\xi)$. Man zeigt leicht, daß $\widetilde{H}_3(\xi)$ der Definition 3 genügt, mithin $1(m, n)$ darstellt.

Wir bemerken, daß wir nichts anderes gemacht haben, als die Formeln:

$$(m)(s)\,[s \neq 0 \vee l(m, s) = 0],$$

$$(m)(n)(s)\,[s \nless a(m) \vee z \neq s+1 \vee l(m, z) = l(m, s) + 2^{-b(m)}],$$

$$(m)(n)(s)\,[n < a(m) \vee s \neq n+1 \vee l(m, s) = 0]$$

in die Sprache des Systems $\mathfrak{S}$ zu übersetzen.

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich sofort der:

Satz 7. *Ist $g(m) = a(m)2^{-b(m)}$ rekursiv normal, so ist g darstellbar.*

Beweis. Auf Grund der Definition von $l(m, n)$ ist $g(m) = l\big(m, a(m)\big)$. Das Prädikat $R_0^2(m, n) \equiv n = a(m)$ ist rekursiv, wird somit dargestellt durch eine Formel $\widetilde{G}_5(r_2)$. Wir bilden den Ausdruck:

$$\widetilde{H}_3(\xi) \wedge \operatorname*{Max}_{x,y,z} \{h(x) \vee h(y) \vee h(z) \vee r_2(x, y) \dot{-} 1/2 \vee |\eta(x) \dot{-} \xi(x, y)|\}$$

und bezeichnen ihn mit $\widetilde{H}_4(\eta) \cdot g(m)$ wird dargestellt durch $\widetilde{H}_4(\eta)$, wo η die der Funktion g zugeordnete Funktionsvariable ist.

D. Bevor wir das in der Einleitung gestellte Problem lösen können, muß noch eine letzte Klasse von Formeln betrachtet werden. Diese Formeln werden wir schrittweise konstruieren, wobei wieder im wesentlichen die in c) benutzten Methoden zur Anwendung kommen.

$\{P_{i_1 \ldots i_0}(\Phi_{a_1}(x), \ldots, \Phi_{a_s}(x))\}$ sei eine Teilmenge der in 2. definierten Formelmenge P_0. Die Indizes $i_1, \ldots, i_n$ durchlaufen die positiven ganzen Zahlen, während die Indizes $a_1, \ldots, a_s$ sowie die Stellenzahl s von den i_k abhängig sind.

Definition 4. Eine Teilmenge $\{P_{i_1 \ldots i_n}\}$ aus $\mathcal{P}_0$ heißt *darstellbar* durch die Formel $\widetilde{F}(\varphi, \Psi)$, wenn für jede Folge ε_i aus $[0, 1]$ mit $\lim \varepsilon_i = 0$, die Bedingungen erfüllt sind:

a) Ist $\widetilde{\mathfrak{Z}} \wedge \widetilde{F}(\varphi_0, \Psi_0) = 0$ auf T so gilt:

1. für $x_1 \in \eta_i$, $x_2 \in \eta_i$ ist $\varphi_0(x_1, y) = \varphi_0(x_2, y)$ für alle y;

2. ist für $x \in \eta_i$ $\operatorname{Max}_y \varphi_0(x, y) \leqslant \varepsilon_i$, so gilt für $x_1 \in \eta_{a_1}, \ldots, x_s \in \eta_{a_s}$ und $z_1 \in \eta_{i}, \ldots, z_n \in \eta_{i_n}$ die Beziehung

$$P_{i_1 \ldots i_n}(\varphi_0(x_1, y), \ldots, \varphi_0(x_s, y)) = \Psi_0(z_1, \ldots, z_n, y) \quad \text{für alle } y.$$

b) Sei $\widetilde{\mathfrak{Z}}(\varphi_0, \ldots) = 0$ auf T und $\eta_0, \eta_1, \ldots$ die einzigen Äquivalenzklassen, in welche die Menge $0 = \{x\colon \Phi_0(x) > 0\}$ zerfällt. Dann gibt es zu jeder stetigen Funktion $\varphi_0(x, y)$, für welche $\operatorname{Max}_y \varphi_0(x, y) \leqslant \varepsilon_i$ ist, wenn $x \in \eta_i$, eine stetige Funktion $\Psi_0(x_1, \ldots, x_n, y)$, für welche $\widetilde{F}(\varphi_0, \Psi_0) = 0$ ist.

Ferner benötigen wir eine weitere

Definition 5. Eine auf T definierte, $n+1$-stellige stetige Funktion $f(x_1, \ldots, x_n, y)$ genüge der Bedingung:

Ist $x_1 \in \eta_{i_1}, \ldots, x_n \in \eta_{i_n}$, $z_1 \in \eta_{i_1}, \ldots, z_n \in \eta_{i_n}$, so gilt

$$f(x_1, \ldots, x_n, y) = f(z_1, \ldots, z_n, y) \quad \text{für alle } y.$$

Durch die Festsetzung $\hat{f}_{i_1 \ldots i_n}(x) = f(x_1, \ldots, x_n, y)$ für $x_1 \in \eta_{i_1}, \ldots, x_n \in \eta_{i_n}$ wird eine Familie von Funktionen definiert, $\{\hat{f}_{i_1 \ldots i_n}(x)\}$, die wir als die durch f induzierte Familie bezeichnen.

In diesem Zusammenhang erwähnen wir den

Hilfssatz 3. *$\{f_{i_1 \ldots i_n}(x)\}$ sei eine Familie stetiger Funktionen auf T, welche der Bedingung genügt: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N(\varepsilon)$, so daß für $i_1 + \ldots + i_n \geqslant N(\varepsilon)$ die Ungleichung $f_{i_1 \ldots i_n}(x) \leqslant \varepsilon$ gilt. Dann gibt es eine $n+1$-stellige stetige Funktion $f(x_1, \ldots, x_n, x)$, so daß $\{f_{i_1 \ldots i_n}(x)\}$ die durch f induzierte Familie ist, d. h.*

$$f_{i_1 \ldots i_n}(x) = \hat{f}_{i_1 \ldots i_n}(x).$$

Der Beweis ergibt sich leicht mit Hilfe des Satzes von Urysohn, wenn man unsere früher gemachte Festsetzung beachtet, nach welcher die Menge $0 = \{x\colon \Phi_0(x) > 0\}$ stets so gewählt wird, daß zu jedem i ein $\delta_i > 0$ existiert, so daß für $k \neq i$ der Abstand der Mengen η_i, η_k größer oder gleich δ_i ist.

Nun beginnen wir damit, die Darstellbarkeit spezieller Formelmengen nachzuweisen. Wir erinnern noch daran, daß die Funktion 2^{-n} durch die Formel $\widetilde{H}_1(\delta)$ dargestellt wird.

1. Die Menge $\{P_{ms}(x)\}$, mit $P_{ms}(x) = 2^{-m}\Phi_s(x)$ ist darstellbar. Wir bilden die Formeln:

$$\text{I.} \quad \operatorname*{Max}_{x_1 x_2} \{h(x_1) \vee h(x_2) \vee e(x_1, x_2) \dot{-} \tfrac{1}{2} \vee \operatorname*{Max}_y |\varphi(x_1, y) \dot{-} \varphi(x_2, y)|\},$$

$$\text{II.} \quad \operatorname*{Max}_{x_1 x_2} \{h(x_1) \vee h(x_2) \vee n(x_1) \dot{-} \tfrac{1}{2} \vee \operatorname*{Max}_y |\Psi_1(x_1, x_2, y) - \varphi(x_2, y)|\},$$

$$\text{III.} \quad \operatorname*{Max}_{x_1 x_2 z} \{h(x_1) \vee h(x_2) \vee h(z) \vee s(z, x_1) \dot{-} \tfrac{1}{2} \vee \operatorname*{Max}_y |2\Psi_1(x_1, x_2, y) - \Psi_1(z, x_2, y)|\}$$

Nun bilden wir die Konjunktion $\widetilde{H}_1(\delta) \wedge \mathrm{I} \wedge \mathrm{II} \wedge \mathrm{III}$. Dies ist die gesuchte Formel. Unter Benutzung von Hilfssatz 3 zeigt man leicht, daß sie den Bedingungen a, b von Definition 4 genügt.

2. $b(m)$, $c(m)$ seien zwei rekursive Funktionen und $\lim 2^{-b(m)} = 0$. Dann ist die Menge $2^{-b(m)}\Phi_{c(m)}(x)$ darstellbar. Die Prädikate $b(m) = n$, $c(m) = n$, die wir mit $P_0^1(m, n)$, $P_0^2(m, n)$ bezeichnen, sind rekursiv, mithin darstellbar. P_0^1 werde durch $\widetilde{G}_1(p_1)$ dargestellt, P_0^2 durch $\widetilde{G}_2(p_2)$. Wir bilden den Ausdruck:

$$\text{I.} \quad \operatorname*{Max}_{x, y, z} \{h(x) \vee h(z_1) \vee h(z_2) \vee P_1(x_1, z_1) \dot{-} \tfrac{1}{2} \vee P_2(x_1, z_2) \dot{-} \tfrac{1}{2} \vee \operatorname*{Max}_y |\Psi_2(x_1, y) \dot{-} \Psi_1(z_1, z_2, y)|\}$$

und die Konjunktion

$$\widetilde{G}_1(p_1) \wedge \widetilde{G}_2(p_2) \wedge \widetilde{F}_1(\varphi, \Psi_1) \wedge I,$$

welche die gesuchte Formel $\widetilde{F}_2(\varphi, \Psi_2)$ darstellt.

3. Es sei $a(m)$ eine rekursive Funktion, so daß $\lim a(m) 2^{-b(m)} = 0$ ist. $\{P_{ms}\}$ sei wie folgt definiert:

Für $s \leqslant a(m)$ ist $P_{ms}(x)$ das Polynom $s \cdot 2^{-b(m)}\Phi_{c(m)}(x)$,

für $s > a(m)$ ist $P_{ms}(x)$ gleich Null.

Die so definierte Menge ist darstellbar. Die Prädikate $s < a(m)$, $s > a(m)$, die wir mit $Q_0^1(m, s)$, $Q_0^2(m, s)$ bezeichnen, sind rekursiv, somit darstellbar. $\widetilde{G}_3(q_1)$, $\widetilde{G}_4(q_2)$ seien die entsprechenden Formeln. Wir bilden die Ausdrücke:

$$\text{I.} \quad \operatorname*{Max}_{x_1 x_2} \{h(x_1) \vee h(x_2) \vee n(x_2) \dot{-} \tfrac{1}{2} \vee \operatorname*{Max}_y \Psi_3(x_1, x_2, y)\},$$

$$\text{II.} \quad \operatorname*{Max}_{x_i, s} \{h(x_1) \vee \ldots \vee h(s) \vee q_1(x_1, x_2) \dot{-} \tfrac{1}{2} \vee s(x_2, x_3) \dot{-} \tfrac{1}{2} \vee \operatorname*{Max}_y |\Psi_3(x, x_3, y) - (\Psi_3(x_1, x_2, y) + \Psi_2(x_1, y))|\},$$

$$\text{III.} \quad \operatorname*{Max}_{x_i} \{h(x_1) \vee (x_2) \vee q_2(x_1, x_2) \dot{-} \tfrac{1}{2} \vee \operatorname*{Max}_y \Psi_3(x_1, x_2, y)\}.$$

Dann bilden wir die Konjunktion $\mathrm{I} \wedge \mathrm{II} \wedge \mathrm{III} \wedge \widetilde{G}_3(q_1) \wedge \widetilde{G}_4(q_2) \wedge \widetilde{F}_2(\varphi, \Psi_2)$, die wir mit $\widetilde{F}_3(\varphi, \Psi_3)$ bezeichnen. $\widetilde{F}_3(\varphi, \Psi_3)$ genügt den Bedingungen von Definition 4.

4. Die Menge der Polynome $\{a(m) 2^{-b(m)}\Phi_{c(m)}(x)\}$ ist darstellbar. Das Prädikat $s = a(m)$, das wir mit $Q_0^3(m, s)$ bezeichnen, ist rekursiv, mithin darstellbar. $\widetilde{G}_5(q_3)$ sei die entsprechende Formel. Wir bilden den Ausdruck:

$$\text{I.} \quad \operatorname*{Max}_{x_1 x_2} \{h(x_1) \vee h(x_2) \vee h(x_2) \vee q_3(x_1, x_2) \dot{-} \tfrac{1}{2} \vee \operatorname*{Max}_y |\Psi_4(x_1, y) - \Psi_3(x_1, x_2, y)|\}.$$

Die Konjunktion $I \wedge \widetilde{F}_3(\varphi, \Psi_3)$ stellt die gesuchte Formel $\widetilde{F}_4(\varphi, \Psi_4)$ dar.

5. Die Polynomklasse, $\{P_m\}$, mit $P_m(x) = a(m)2^{-\beta(m)}\Phi_{c(m)}(x)$, welche durch die in 4. hergeleitete Formel $\tilde{F}_4(\varphi, \Psi_4)$ dargestellt werde, erfülle die Bedingung:

$$\sum_{m=0}^{\infty} a(m)2^{-b(m)} < 1 .$$

Ferner sei $f(m)$ eine rekursive Funktion mit $f(m_1) < f(m_2)$ für $m_1 < m_2$ und $f(0) \geqslant 1$. Dann definieren wir die Menge $\{P_{ms}\}$ wie folgt:

$P_{00} = P_0$,

für $s \leqslant f(0)$ ist $P_{0s} = \sum\limits_{0}^{s} P_0 + \lambda$,

für $m > 0$ ist $P_{m0} = 0$,

für $m > 0$ und $s \leqslant f(m) - f(m-1)$ ist $P_{ms} = \sum\limits_{1}^{s} P_{f(m-1)+\lambda}$,

für $s > f(m) - f(m-1)$ ist $P_{ms} = 0$;

oder etwas formaler ausgedrückt:

$m = 0 \wedge s = 0 \rightarrow P_{ms} = P_s$,

$m = 0 \wedge s < f(0) \wedge t = s+1 \rightarrow P_{mt} = P_{ms} + P_t$,

$m > 0 \wedge s = 0 \rightarrow P_{ms} = 0$,

$m > 0 \wedge s < f(m) - f(m-1) \wedge t = s+1 \wedge n = f(m-1) + t \rightarrow P_{mt} = P_{ms} + P_n$,

$m > 0 \wedge s > f(m) - f(m-1) \rightarrow P_{ms} = 0$,

$m = 0 \wedge s > f(0) \rightarrow P_{ms} = 0$.

Die jeweils links vom Pfeil stehenden Prädikate bezeichnen wir der Reihe nach mit $W_0^1(m, s)$, $W_0^2(m, s, t)$, $W_0^3(m, s)$, $W_0^4(m, s, t, n)$, $W_0^5(m, s)$, $W_0^6(m, s)$. Sie sind alle rekursiv, mithin darstellbar. $\tilde{G}_6(w_1)$, $\tilde{G}_7(w_2)$, $\tilde{G}_8(w_3)$, $\tilde{G}_9(w_4)$, $\tilde{G}_{10}(w_5)$, $\tilde{G}_{11}(w_6)$ seien Formeln welche diese Prädikate der Reihe nach darstellen. Nun bilden wir die Ausdrücke:

I. $\operatorname*{Max}\limits_{x_i} \{\vee_i h(x_i) \vee w_1(x_1, x_2) \dot{-} \tfrac{1}{2} \operatorname*{Max}\limits_{y} |\Psi_5(x, x_2, y) - \Psi_4(x_1, y)|\}$,

II. $\operatorname*{Max}\limits_{x_i} \{\vee_i h(x_i) \vee w_2(x_1, x_2, x_3) \dot{-} \tfrac{1}{2} \vee \operatorname*{Max}\limits_{y} |\Psi_5(x_1, x_3, y) -$
$- (\Psi_5(x_1, x_2, y) + \Psi_4(x_3, y))|\}$,

III. $\operatorname*{Max}\limits_{x_i} \{\vee_i h(x_i) \vee w_3(x_1, x_2) \dot{-} \tfrac{1}{2} \vee \operatorname*{Max}\limits_{y} \Psi_5(x_1, x_2, y)\}$,

IV. $\operatorname*{Max}\limits_{x_i} (\vee_i h(x_i) \vee w_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \dot{-} \tfrac{1}{2} \vee \operatorname*{Max}\limits_{y} |\Psi_5(x_1, x_3, y) \dot{-}$
$\dot{-} (\Psi_5(x_1, x_2, y) + \Psi_4(x_4, y))|\}$,

V. $\operatorname*{Max}\limits_{x_i} \{\vee_i h(x_i) \vee w_5(x_1, x_2) \dot{-} \tfrac{1}{2} \vee \operatorname*{Max}\limits_{y} \Psi_5(x_1, x_2, y)\}$,

IV. $\operatorname*{Max}\limits_{x_i} \{\vee_i h(x_i) \vee w_6(x_1, x_2) \dot{-} \tfrac{1}{2} \vee \operatorname*{Max}\limits_{y} \Psi_5(x_1, x_2, y)\}$.

Nun bilden wir die Konjunktion $\mathrm{I} \wedge \ldots \wedge \mathrm{VI} \wedge \tilde{G}_6 \wedge \ldots \wedge \tilde{G}_{11} \wedge \tilde{F}_4(\varphi, \Psi_4)$ und bezeichnen diese mit $\tilde{F}_5(\varphi, \Psi_5)$. Nun hat man sich zu überzeugen, daß die Formel $\tilde{F}_5(\varphi, \Psi_5)$ wirklich den Bedingungen a), b) von Definition 4 genügt. Der Nachweis, daß die Bedingungen a) 1., 2. erfüllt sind, läßt sich völlig elementar und ohne Schwierigkeiten erbringen, weshalb wir hier davon absehen, die Details zu erörtern. Um zu zeigen, daß die Bedingung b) erfüllt ist, wählt man als Modell für $\mathfrak{Z}$ die Zahlentheorie und konstruiert die entsprechenden Funktionen $\Phi_0, n_0, e_0, s_0, a_0, m_0$. Dann ist $0 = \bigcup\limits_i \eta_i$ mit $0 = \{x\colon \Phi_0(x) > 0\}$. Φ_0 sei entsprechend der in 4. b) gemachten Festsetzung so gewählt, daß zu jedem i ein $\delta_i > 0$ existiert, so daß $i \neq k$ der Abstand der Mengen η_i und η_k größer gleich δ_i ist. Nun wählen wir eine gegen Null konvergente Folge $\{\varepsilon_i\}$ aus $[0, 1]$ und eine stetige Funktion $\varphi_0(x, y)$, so daß $\operatorname*{Max}\limits_{y} \varphi_0(x, y) \leqslant \varepsilon_i$ für $x \in \eta_i$ gilt. Ferner ersetzen wir in den Formelmengen $\{2^{-m}\Phi_s(x)\}\{2^{-b(m)}\Phi_{c(m)}(x)\}$ usw. die Variablen Φ_i durch die Funktionen $\hat{\Phi}_{0i}(x)$ (die durch $\varphi_0(x, y)$ induzierten Funktionen nach Definition 5). Die entstehenden Familien von Funktionen genügen dann den Bedingungen des Hilfssatzes 3, woraus sofort die Existenz der Funktionen $\Psi_{01}, \Psi_{02}, \ldots, \Psi_{05}$, die der Bedingung b) von Definition 4 genügen, folgt.

6. $\{P_{ms}\}$ sei die in 5. definierte Polynomklasse. Dann zeigt man leicht: es gibt eine Formel $\tilde{F}_6(\varphi, \Psi_6)$, welche die Klasse $\{P_{mc(m)}\}$ darstellt. Diesem Resultat können wir auch eine andere Fassung geben: $\{P_m\}$ sei eine Teilmenge von $\mathcal{P}_0$ und jedes P_m sei von der Form $a_0^m \Phi_{a_0} m(x) + \ldots + a_s^m \Phi_{a_s} m(x)$, $a_i^m \geqslant 0$. Die Menge sei rekursiv, d.h. zu jedem m seien die Keoffizienten a_i^m, die Indizes a_i^m und die Stellenzahl s effektiv berechenbar. Ferner sei die Ungleichung

$$\sum_{m=0}^{\infty} \Big(\sum_{0}^{s_m} a_\lambda^m\Big) < 1$$

gültig. Dann ist die Menge $\{P_m\}$ darstellbar.

7. Sind $\{P_m^1\}$, $\{P_m^2\}$ zwei Mengen von Linearkombinationen von der Art wie sie in 6. betrachtet wurden, so zeigt man leicht, daß die Menge der Differenzen $\{P_m^1 \dot{-} P_m^2\}$ darstellbar ist (wie überhaupt aus der Darstellbarkeit zweier Mengen $\{P_m^1\}$, $\{P_m^2\}$ die Darstellbarkeit der Menge der Differenzen $\{P_m^1 \dot{-} P_m^2\}$ folgt).

8. Wir gehen aus von der in 7. betrachteten Menge $\{P_m^1 \dot{-} P_m^2\}$, wo die Mengen $\{P_m^1\}$, $\{P_m^2\}$ wieder den Bedingungen von 6. genügen sollen. Wir setzen $Q_m = P_m^1 \dot{-} P_m^2 \cdot f(m)$ sei eine rekursive Funktion, $f(m_1) < f(m_2)$ für $m_1 < m_2$. Wir definieren eine Menge $\{P_{ms}\}$ wie folgt:

$P_{00} = Q_0$,

für $s \leqslant f(0)$ ist $P_{0s} = \bigvee\limits_{\lambda=1}^{s} Q_\lambda$, für $m > 0$ ist $P_{m0} = 0$,

für $m > 0$ und $s \leqslant f(m) - f(m-1)$ ist $P_{ms} = \bigvee_{\lambda=1}^{s} Q_{f(m-1)+\lambda}$,

für $s > f(0)$ ist $P_{0s} = 0$,

für $m > 0$ und $s > f(m) - f(m-1)$ ist $P_{ms} = 0$.

Die so definierte Menge ist darstellbar. Bei der Konstruktion der entsprechenden Formel verfährt man im wesentlichen wie in 5. Man hat lediglich die Operation $a + b$ durch die Operation $a \vee b$ zu ersetzen. Daraus ergibt sich insbesondere

9. $\{P_{ms}\}$ sei die in 8. definierte Menge. Dann ist die Menge $\{P_{mf(m)}\}$ darstellbar.

Die bisherigen Resultate fassen wir zusammen in einem Satz. Um ihn formulieren zu können, benötigen wir noch zwei Definitionen.

Definition 6. Jeder Formel P aus $\mathcal{P}_0$ ordnen wir eine Norm zu, $N(P)$, durch die Festsetzung:

a) Ist P von der Form $a_0\Phi_{a_0}(x) + \ldots + a_n\Phi_{a_n}(x)$, $a_i \geqslant 0$, so ist

$$N(P) = \sum_{0}^{n} a_i .$$

b) Ist P von der Form $L_0^1 \dot{-} L_0^2 \wedge L_1^1 \dot{-} L_1^2 \wedge \ldots \wedge L_k^1 \dot{-} L_k^2$, wo die L_i^a Linearkombinationen mit positiven Koeffizienten sind, so ist

$$N(P) = \Big(\sum_{0}^{k} N(L_\lambda^1)\Big) \wedge \Big(\sum_{0}^{k} N(L_\lambda^2)\Big) .$$

Definition 7. $\{P_m\}$ sei eine Teilmenge von $\mathcal{P}_0$, $P_m = (L_1 \wedge 0) \vee \vee \ldots \vee (L_k \wedge 0)$, $L_i = a_0^i \Phi_{a_0^i}(x) + \ldots + a_s^i \Phi_{a_s^i}(x)$. Wir nennen die Menge $\{P_m\}$ *berechenbar*, wenn für jedes n die Koeffizienten a_t^i, die die Indizes α_t^i und die Stellenzahl s effektiv berechenbar sind.

Dann gilt der

Satz 8. *Ist $\{P_m\}$ eine berechenbare Teilmenge von $\mathcal{P}_0$ und ist $\sum_{0}^{\infty} N(P_m) < 1$, so ist die Menge $\{P_m\}$ darstellbar.*

Der Beweis ist eine unmittelbare Folge der Nummern 1 bis 9. Wir bemerken noch, daß wir den Bereich der Funktionen, deren Wertebereich in $[0, 1]$ liegt, nie verlassen mußten.

5. Anwendungen. Nun sind wir in der Lage, die in der Einleitung angekündigte Konstruktion durchzuführen. T sei ein topologischer Raum (kompakt, metrisch, separabel, zusammenhängend und auf $[0, 1]$ abbildbar, gemäß der zu Beginn von 3. a) gemachten Bemerkungen) der folgender *Bedingung* genüge:

Es gibt eine Folge von Funktionen $\varphi_0' \equiv 1, \varphi_1', \varphi_2', \ldots$ aus $C(T)$ mit den Eigenschaften

a) $\overline{\mathcal{P}_1(\varphi', T)} = V(T)$.

b) Für jede Formel $P(\Phi_{a_0}, \ldots, \Phi_{a_s})$ aus $\mathcal{P}_1(\varphi', T)$ ist effektiv entscheidbar, ob die Ungleichungen $\alpha \leqslant \|P(\varphi_{a_0}', \ldots, \varphi_{a_s}')\|$, $\|P(\varphi_{a_0}', \ldots, \varphi_{a_s}')\| \leqslant \beta$ zutreffen oder nicht.

Dann gilt der

Satz 9. *Es gibt eine Formel F mit der Eigenschaft: ein topologischer Raum T_1 ist genau dann abbildbar auf T, wenn F auf T_1 erfüllbar ist.*

Beweis. Aus a) und b) ergibt sich sofort, daß eine Folge von Funktionen $\varphi_0 \equiv 1, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ existiert mit $0 \leqslant \varphi_i \leqslant 1$, $\lim\|\varphi_i\| = 0$, welche auch noch den Bedingungen a), b) genügt. Ferner gibt es eine rekursive Folge von Zahlen ϵ_i der Form $a(i)2^{-b(i)}$ mit $0 \leqslant \epsilon_i \leqslant 1$, $\lim \epsilon_i = 0$, so daß $\|\varphi_i\| \leqslant \epsilon_i$ gilt. Die Funktion $f(i) = \epsilon_i$ ist dann nach Satz 7 darstellbar, etwa durch die Formel $\widetilde{H}_\epsilon(\epsilon)$. Aus b) folgt, daß die Menge $\mathcal{W}_0(T, \varphi)$ rekursiv ist. Deshalb ist es möglich, die Ungleichungen von $\mathcal{W}_0(T, \varphi)$ in einer Doppelfolge anzuordnen:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 \leqslant \|P_1\| , & \alpha_2 \leqslant \|P_2\| , \\ \|Q_1\| \leqslant \beta_1 , & \|Q_2\| \leqslant \beta_2 \end{array}$$

derart, daß die Mengen $\{P_i\}$, $\{Q_i\}$ rekursiv sind. Nun können zwei rekursive Folgen natürlicher Zahlen $\{m_i\}$, $\{n_i\}$ so wählen, daß $\sum N(2^{-m_i}P_i) < 1$, $\sum N(2^{-n_i}Q_i) < 1$, $\alpha_i 2^{-m_i} \leqslant 1$, $\lim \alpha_i 2^{-m_i} = 0$, $\beta_i 2^{-n_i} \leqslant 1$, und $\lim \beta_i 2^{-n_i} = 0$ ist. Die Polynommengen $\{2^{-m_i}P_i\}$, $\{2^{-n_i}Q_i\}$ genügen den Bedingungen von Satz 8 und sind somit darstellbar, etwa durch die Formeln $\widetilde{F}_p(\varphi, \Psi_1)$, $\widetilde{F}_q(\varphi, \Psi_2)$. Ebenso folgt, daß die Funktionen $g(i) = \alpha_i 2^{-m_i}$, $k(i) = \beta_i 2^{-n_i}$ darstellbar sind. $\widetilde{H}_\alpha(\mu)$, $\widetilde{H}_\beta(\nu)$ seien die entsprechenden Formeln.

Wir bilden nun die Ausdrücke:

$$\text{I.} \quad \operatorname*{Max}_x \big\{h(x) \vee \operatorname*{Max}_y \big(\varphi(x, y) \dot{-} \epsilon(x)\big)\big\} ,$$

$$\text{II.} \quad \operatorname*{Max}_x \big\{h(x) \vee \big(\mu(x) \dot{-} \operatorname*{Max}_y \Psi_1(x, y)\big)\big\} ,$$

$$\text{III.} \quad \operatorname*{Max}_x \big\{h(x) \vee \big(\operatorname*{Max}_y \Psi_2(x, y) \dot{-} \nu(x)\big)\big\}$$

und die Konjunktion $\mathrm{I} \wedge \mathrm{II} \wedge \mathrm{III} \wedge \widetilde{H}_\epsilon \wedge \widetilde{H}_\alpha \wedge \widetilde{H}_\beta \wedge \widetilde{F}_p \wedge \widetilde{F}_q \wedge \widetilde{\mathfrak{Z}}$, die wir mit $\widetilde{F}(\varphi, \Psi_1, \Psi_2, \epsilon, \mu, \nu)$ bezeichnen. Wir zeigen, daß $\widetilde{F}$ die gesuchte Formel ist. $\widetilde{F}$ ist offenbar erfüllbar auf T und mithin auf T_1, falls T stetiges Bild von T_1 ist. Sei umgekehrt $\widetilde{F}$ erfüllbar auf T_1 und $\varphi_0(x, y)$, $\Psi_{10}(x, y)$, $\Psi_{20}(x, y)$, $\mu_0(x)$, $\epsilon_0(x)$, $\nu_0(x)$ stetige Funktionen, für welche $F(\varphi_0, \Psi_{10}, \Psi_{20}, \epsilon_0, \mu_0, \nu_0) = 0$ ist. $\{\varphi(y)\}$ sei die durch $\varphi_0(x, y)$ induzierte Funktionenfamilie (Definition 4) und $\mathcal{W}_0(T, \varphi, m, n)$ die dem Raum T und den Folgen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \{m_i\}, \{n_i\}$ zugeordnete Menge formaler

Ungleichungen (3. c)). Wir zeigen, daß $\mathfrak{M}_0(T, \varphi, m, n)$ auf T_1 durch $\{\hat{\varphi}_i(y)\}$ erfüllt wird.

Sei etwa $a_i 2^{-m_i} \leqslant \|P_i(\Phi_{a_1}, \ldots, \Phi_{a_s}) 2^{-m_i}\|$ eine Ungleichung aus $\mathfrak{M}_0(T, \varphi, m, n)$. Aus $\tilde{H}_\epsilon(\epsilon_0) = 0$ folgt $\|\hat{\varphi}_\epsilon\| \leqslant \epsilon_i$, d.h. die Bedingungen a) 1., 2. von Definition 4 sind erfüllt. Da die Formel $\tilde{F}_p(\varphi, \Psi_1)$ die Menge $\{2^{-m_i} P_i\}$ darstellt, gilt für $x \in \eta_i$, $x_1 \in \eta_{a_1}, \ldots, x_s \in \eta_{a_s}$ die Beziehung $\Psi_{10}(x, y) = P_i(\varphi_0(x_1, y), \ldots, \varphi_0(x_s, y)) 2^{-m_i}$, d.h. $\Psi_{10}(x, y) = P_i(\hat{\varphi}_{a_1}(y, \ldots, \hat{\varphi}_{a_s}(y)) 2^{-m_i}$. Da ferner die Formel $\tilde{H}_a(\mu)$ die Funktion $a_i 2^{-m_i}$ darstellt, folgt wegen $x \in \eta_i$ die Beziehung $\mu_0(x) = a_i 2^{-m_i}$. Aus II $= 0$ ergibt sich schliesslich $\mu_0(x) \leqslant \max_y \Psi_{10}(x, y)$, d.h. es ist $a_i 2^{-m_i} \leqslant \|P_i(\hat{\varphi}_{a_1}(y), \ldots, \hat{\varphi}_{a_s}(y))\|$, was die Behauptung ist. Analog schliesst man für Ungleichungen der Form $\|Q\| \leqslant \beta$. $\mathfrak{M}_0(T, \varphi, m, n)$ ist somit erfüllbar auf T_1, womit aus Folgerung 2 von Satz 4 folgt, daß T stetiges Bild von T_1 ist.

Beispiel. Auf Grund eines bekannten Struktursatzes (5) läßt sich leicht zeigen, daß die nicht lokal zusammenhängenden Räume genau diejenigen sind, die eine stetige Abbildung auf die wie folgt definierte Teilmenge P der Ebene gestatten:

(x, y) sei genau dann Element von P, wenn $x = r\cos a_n$, $y = r\sin a_n$ mit $0 \leqslant r \leqslant 1$ und $a_n = \pi/2^n$, $n = 1, 2, \ldots$ Auf P gibt es ein Funktionensystem $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$, welches den zu Beginn von 5. erwähnten Eigenschaften genügt. Somit gibt es nach Satz 9 eine Formel $\tilde{F}$ mit der Eigenschaft: $\tilde{F}$ ist genau dann auf T erfüllbar, wenn P stetiges Bild von T ist. $\tilde{F}$ ist somit genau auf allen nicht lokal zusammen-hängenden Räumen erfüllbar aber auf keinem Peano-Raum.

6. Bemerkungen. Zuerst sei erwähnt, daß die an das Funktionensystem $\varphi_0', \varphi_1', \ldots$ gestellte Forderung (Bedingung b)), welche verlangt, daß die Menge $\mathcal{P}_1(\varphi', T)$ rekursiv sei, durch weitaus schwächere ersetzt werden kann. Es läßt sich nämlich zeigen, daß sich der Begriff der Endlichkeit in der Sprache $\mathfrak{S}$ ausdrücken läßt. Insbesondere kann man eine modifizierte Formel $\tilde{\mathfrak{Z}}_1$ konstruieren, welche auf einem Raum T genau dann erfüllbar Null ist, wenn das nach 4. a) konstruierte zugehörige Modell nur die ganzen Zahlen $\geqslant 0$ als Elemente enthält.

Sei $\mathcal{A}$ die Menge der Formeln des Prädikatenkalküls erster Stufe, die neben der Null, der Nachfolgerfunktion $'$, der Gleichheit $=$ und den Operationen $+$, $\cdot$ noch Prädikatenvariablen enthalten.

$\mathfrak{Z}$ sei ein Axiomensystem der Zahlentheorie. Aus dem eben gesagten folgt, daß sich zu jeder Formel F aus $\mathcal{A}$ eine Formel $\tilde{F}$ aus $\mathcal{S}$ konstruieren läßt, so daß für jeden Raum T gilt:

$\tilde{F}$ ist genau dann erfüllbar Null auf T, wenn $F \wedge \mathfrak{Z}$ erfüllbar ist, und die Elemente des Modells für $F \wedge \mathfrak{Z}$ nur aus der Null und seinen Nachfolgern bestehen.

Wir sagen, ein Prädikat $h_0(x, y)$ werde durch eine Formel $F(h)$ aus $\mathcal{A}$ charakterisiert, wenn $F(h_0) \wedge \mathfrak{Z}$ erfüllbar ist auf der Menge $\{0, 0', 0'', \ldots\}$ und wenn es kein von h_0 verschiedenes Prädikat h_0' gibt, für welches dies der Fall ist. Dann läßt sich die Bedingung b), die zum Beweis von Satz 9 benötigt wurde, durch folgende schwächere Bedingung ersetzen:

b') Es gibt zwei zweistellige Prädikate $h_0(i, k)$, $g_0(i, k)$, welche durch die Formeln aus $\mathcal{A}$ charakterisiert werden, so daß gilt:

$$a_i \leqslant \|P_k\| \sim h_0(i, k), \quad \|P_k\| \leqslant a_i \sim g_0(i, k)$$

(wo die rationalen Zahlen und die Formeln P in geeigneter Weise numeriert worden sind).

Von diesem Resultat ausgehend gelangt man zur Formulierung eines Umkehrproblems. Zuerst beachte man, daß es zu jeder Formel $\tilde{F}$ aus $\mathcal{S}$ eine solche aus $\mathcal{A}$ gibt, $F(h, \ldots, f, \ldots, g, x, \ldots)$, so daß $\tilde{F}$ genau dann erfüllbar Null auf $[0, 1]$ ist, wenn $(\mathsf{E}h\ldots)(f\ldots)(\mathsf{E}g\ldots)(x\ldots)F(h, \ldots, f, \ldots, g, \ldots, x, \ldots) \wedge \mathfrak{Z}$ erfüllbar ist auf $\{0, 0', 0'', \ldots\}$, wobei $h, \ldots, f, \ldots, g, \ldots$ Prädikatenvariablen sind.

Ferner sollen zwei Räume T_1, T_2 als äquivalent bezeichnet werden, wenn jeder stetiges Bild des anderen ist. Sei nun T ein Raum, zu welchem eine Formel $\tilde{F}$ aus $\mathcal{S}$ existiere mit der Eigenschaft: ist $\tilde{F}$ erfüllbar auf T_1, so ist T stetiges Bild von T_1. Dann ergeben sich die beiden Vermutungen:

1) Es gibt einen zu T äquivalenten Raum T' und eine Folge stetiger Funktionen $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ über T', welche den Bedingungen a), b') genügen.

2) Die Behauptung 1) ist wenigstens richtig, wenn verlangt wird, daß die in b') auftretenden Prädikate h_0, g_0 durch Formeln der Form $(f\ldots)(\mathsf{E}p\ldots)(x\ldots)F(h, \ldots, f, \ldots, p, \ldots, x, \ldots)$, $(f\ldots)(\mathsf{E}p\ldots)(x\ldots)G(h, f, \ldots, p, \ldots, x\ldots)$ charakterisiert werden.

Man kann ferner untersuchen, ob sich zwei Räume T_1, T_2 der hier betrachteten Art (d. h. den zu Beginn von 3.a) erwähnten Bedingungen genügend) schon mit Formeln unterscheiden lassen, welche nur einstellige Funktionsvariablen enthalten. Einige elementargeometrische Überlegungen zeigen, daß dies nicht der Fall ist. Genauer: es läßt sich zeigen, daß eine Formel $\tilde{F}$ genau dann erfüllbar Null auf T ist, wenn $\tilde{F}$ erfüllbar Null auf der Einheitsstrecke ist.

Zu einer anderen Fragestellung gelangt man, wenn man statt der Begriffe „erfüllbar Null“, „immer größer Null“ die Begriffe „identisch Null“ und „erfüllbar größer Null“ betrachtet. Die auf diese Weise gewonnene Sprache $\mathcal{S}'$ leistet aber bedeutend weniger als die Sprache $\mathcal{S}$. Einige einfache Approximations-Überlegungen zeigen nämlich, daß eine Formel, die identisch Null ist auf der Einheitsstrecke, auch auf der oben definierten Punktmenge P identisch verschwindet und umgekehrt. Ferner ist die Menge der Formeln, die erfüllbar größer Null auf $[0, 1]$ sind, nur rekursiv aufzählbar (allerdings nicht rekursiv, wie sich zeigen läßt).

Es sei noch erwähnt, daß sich die in dieser Arbeit bewiesenen Sätze übertragen lassen auf den Fall, wo die Operationen $\min(a, b)$, $\max(a, b)$ durch die Multiplikation $a \cdot b$ und die Quantoren $\min\limits_x f(x)$, $\max\limits_x f(x)$ durch den einzigen Quantor $\max\limits_x |f(x)|$ ersetzt werden.

Herrn Prof. E. Specker sei für fruchtbringende Diskussionen herzlich gedankt.

Literaturverzeichnis

[1] B. Scarpellini, *Die Nichtaxiomatisierbarkeit der unendlichwertigen Logik von Łukasiewicz-Tarski*, Journ. of Symb. Logic (1961).

[2] A. Rose und J. B. Rosser, *Fragments of many-valued statement calculi*, Trans. Amer. Math. Soc. 87 (1958), S. 1-53.

[3] J. L. Kelley, *General topology*, Van Nostrand, 1955.

[4] M. Day, *Normed linear spaces*, Berlin 1958.

Reçu par la Rédaction le 23. 1. 1962