Problème aux dérivées tangentielles discontinues pour une équation elliptique

par W. POGORZELSKI † (Warszawa)

1. Introduction. Le problème aux limites à dérivée tangentielle, posé pour la première fois par H. Poincaré [1], consiste en la recherche d'une fonction harmonique à l'intérieur d'un domaine plan qui vérifie, en tout point de la courbe limitant ce domaine, une relation linéaire entre les valeurs limites: 1° de la dérivée dans la direction de la normale, 2° de la dérivée dans la direction de la tangente, 3° de la fonction elle-même.

Le problème de H. Poincaré a fait l'objet des recherches de plusieurs auteurs. Les résultats les plus approfondis ont été obtenus par B. Hvédelidzé [2] et I. Vécoua [3], [4].

L'auteur du présent travail a généralisé le problème de H. Poincaré dans le cas d'une relation non linéaire entre les valeurs limites des dérivées au bord du domaine donné (voir [5]). Ensuite, dans les travaux [6] et [7], l'auteur a étudié le problème non linéaire aux limites aux dérivées tangentielles pour les équations elliptique et parabolique d'une forme générale dans l'espace à n dimensions. Ces problèmes ont été résolus par la méthode topologique de Schauder. Dans la publication [8] ce problème est résolu par la méthode des approximations successives.

Dans le présent travail l'auteur étudiera le problème aux dérivées tangentielles discontinues pour une équation elliptique dans le plan, à coefficients hölderiens.

2. Énoncé du problème. Soit dans le plan une ligne fermée de Jordan L_0 limitant le domaine borné Ω . Soient à l'intérieur du domaine Ω des lignes fermées $L_1, L_2, \dots, L_q$, disjointes, limitant avec la ligne L_0 un domaine S_0 . L'ensemble des lignes $L_1, \dots, L_q$ peut être vide, alors on a $S_0 = \Omega$. Soient en outre à l'intérieur du domaine S_0 les arcs fermés et disjointes $l_1, l_2, \dots, l_{q'}$. On admet que les lignes $L_0, \dots, L_q$ et les arcs $l_1, \dots, l_{q'}$ ont des tangentes continues en tout point. Soit ensuite un ensemble fini de points $C_1, C_2, \dots, C_n$, composé de toutes les extrémités des arcs $l_1, \dots, l_{q'}$ et en outre, peut être, de points choisis arbitrairement

sur ces arcs mêmes et sur les lignes fermées $L_0, \dots, L_q$ (pas nécessairement sur chacune). Ces points peuvent être arbitrairement ordonnés. On admet que la ligne L_0 a une direction positive dans le plan orienté et que les lignes fermées intérieures $L_1, \dots, L_q$ ont les directions négatives. Les directions des arcs non fermés $l_1, \dots, l_{q'}$ sont choisies arbitrairement. Désignons par L l'ensemble de points

$$L = \sum_{\nu=0}^q L_\nu + \sum_{\nu=1}^{q'} l_\nu.$$

Soit une équation elliptique dans le plan, de la forme

$$(1) \quad \begin{aligned} \Psi(u) &= \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^2 b_j(X) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(X)u \\ &= F\left(X, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right). \end{aligned}$$

Nous admettons les hypothèses suivantes.

Fig. 1

I. Les coefficients $a_{ij}(X)$, $b_j(X)$, $c(X)$ sont définis en tout point $X(x_1, x_2)$ du domaine fermé $\Omega + L_0$ et vérifient les conditions de Hölder

$$(2) \quad \begin{aligned} |a_{ij}(X) - a_{ij}(X')| &\leq \text{const } |XX'|^h, \\ |b_j(X) - b_j(X')| &\leq \text{const } |XX'|^h, \\ |c(X) - c(X')| &\leq \text{const } |XX'|^h, \end{aligned}$$

où $|XX'|$ désigne la distance euclidienne des deux points X, X' du domaine Ω , h est une constante positive non supérieure à l'unité.

II. La forme quadratique

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(X) Z_i Z_j$$

est définie — positive dans le domaine $\Omega + L_0$.

III. La fonction réelle $F(X, u_0, u_1, u_2)$ est définie dans la région ouverte:

$$(3) \quad X \in S, \quad -\infty < u_\nu < +\infty \quad (\nu = 0, 1, 2)$$

où S désigne l'ensemble de tous les points du domaine S_0 non situés sur les arcs l_ν .

La fonction F vérifie l'inégalité suivante:

$$(4) \quad |F(X, u_0, u_1, u_2)| < \frac{M_F}{|XP_X|^p} + M'_F \sum_{\nu=0}^2 |u_\nu|$$

où P_X désigne un point de l'ensemble L le plus rapproché du point intérieur X , M_F et M'_F sont des constantes positives, la constante non négative p est inférieure à l'unité ($0 \leq p < 1$). En outre la fonction F vérifie une condition de Hölder-Lipschitz

$$(5) \quad |F(X, u_0, u_1, u_2) - F(X', u'_0, u'_1, u'_2)| \leq C(S^*) |XX'|^{h_F} + \\ + k_F \sum_{\nu=0}^2 |u_\nu - u'_\nu|^{h'_F}$$

en tout domaine fermé S^* situé à l'intérieur de l'ensemble S . Le coefficient positif $C(S^*)$ dépend du domaine S^* et peut être non borné; le coefficient positif k_F ne dépend pas du domaine S^* ; les constantes positives h_F et h'_F ne sont pas supérieures à l'unité.

IV. Nous supposons que l'angle $\Delta(P, P_1)$ entre les tangentes en deux points arbitraires P, P_1 de chaque arc l_ν ou ligne L_ν vérifie l'inégalité

$$(6) \quad \Delta(P, P_1) \leq \text{const } |PP_1|^{h_L},$$

où la constante positive h_L n'est pas supérieure à l'unité.

V. La fonction réelle donnée $g(P)$, définie en tout point P sur L , différent des points de discontinuité C_ν , vérifie les inégalités

$$(7) \quad |g(P)| < M_g, \quad |g(P) - g(P_1)| < \frac{k_g |PP_1|^\mu}{[|PC_\nu| |P_1C_\nu|]^\mu},$$

où l'on admet que les points P, P_1 sont situés à l'intérieur d'un même arc $\widehat{C_\nu C_\nu}$, joignant deux points de discontinuité voisins sur L et que

$P_1 \in \widehat{PC}_{v_1}$, M_g et k_g sont des constantes positives; la constante μ vérifie la condition $0 < \mu < 1$. Conformément à la définition donnée par l'auteur dans le travail [9], la fonction $g(P)$ appartient à la classe $\mathfrak{H}_0''$.

VI. La fonction réelle donnée $G(P, u, v)$, définie dans la région

$$(8) \quad P \in L - \sum C_v, \quad -\infty < u < +\infty, \quad -\infty < v < +\infty,$$

vérifie les inégalités

$$(9) \quad |G(P, u, v)| \leq M_G(|u| + |v|) + \frac{M'_G}{\prod_{v=1}^n |PC_v|^a},$$

$$|G(P, u, v) - G(P', u', v')| \leq M_G[|u - u'|^{h_G} + |v - v'|] + \frac{k_G |PP'|^\mu}{[|PC_v| |P'C_{v_1}|]^{a+\mu}}$$

$$(P, P' \in \widehat{C_v C_{v_1}}, P' \in \widehat{PC_{v_1}})$$

où M_G, M'_G, k_G, h_G sont des constantes positives ($h_G \leq 1$). Par conséquent, la fonction $G(P, u, v)$ appartient à la classe $\mathfrak{H}_a''$ relativement à la variable P ; on admet que

$$0 \leq a < 1, \quad 0 < \mu < 1, \quad a + \mu < 1.$$

Le problème aux limites que nous nous proposons d'étudier consiste en la recherche d'une fonction $u(X)$ qui vérifie l'équation (1) en tout point intérieur X de l'ensemble S et dont les dérivées ont des valeurs limites vérifiant l'égalité

$$(10) \quad \frac{du}{dT_P} + g(P)u(P) = G[P, u(P), u_s(P)]$$

en tout point $P \in L - \sum_{v=1}^n C_v$; du/dT_P désigne la valeur limite, au point P , de la dérivée transversale

$$(11) \quad \frac{du}{dT_P} = \lim_{X \rightarrow P} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(X) \cos(N_P, x_j) \frac{\partial u}{\partial x_j} \quad (P \neq C_v)$$

où la direction positive de la normale N_P à tout arc l_v est dans la même relation avec sa direction que les normales aux lignes frontières $L_0, L_1, \dots, L_n$ intérieures au domaine S_0 , avec les directions de ces lignes. Ensuite $u_s(P)$ désigne la valeur limite de la dérivée dans la direction positive de la tangente au point P :

$$(12) \quad u_s(P) = \lim_{X \rightarrow P} \frac{du(X)}{ds_P} \quad (P \neq C_v).$$

La limite (11) concerne les points X situés du côté positif de tout arc l_a et la limite (12) se rapporte à ceux qui sont situés des deux côtés de tout arc (excepté L_a). On demande que les limites (11) et (12) ne dépendent pas de la manière dont le point X tend vers le point $P \neq C_v$. Outre la condition (10), nous demandons que les dérivées de la fonction cherchée $u(X)$ vérifient une inégalité de la forme

$$(13) \quad \left| \frac{\partial u(X)}{\partial x_j} \right| < \frac{\text{const}}{\prod_{v=1}^p |XC_v|^\theta}$$

où la constante positive θ est inférieure à l'unité. Nous admettons encore l'hypothèse suivante.

VII. Le problème aux limites homogène:

$$(13') \quad \frac{dv}{dT_P} + g(P)v = 0, \quad P \in L - \sum_{v=1}^n C_v$$

pour l'équation homogène $\Psi(v) = 0$, en conservant la condition (13), n'a qu'une solution nulle $v = 0$.

3. Les formules et les théorèmes fondamentaux. Conformément aux recherches connues de Levi, continuées par Gevrey [10] et Giraud [11] (voir aussi le travail [12]), la solution fondamentale de l'équation (1) est donnée par la formule

$$(14) \quad \Gamma(X, Y) = w^F(X, Y) + \iint_{\Omega'} w^Z(X, Z) \Phi(Z, Y) dZ$$

(en négligeant les termes réguliers) pour tout couple X, Y de points différents d'un domaine mesurable $\Omega' \supset \Omega$. La quasi-solution est donnée par la formule

$$(15) \quad w^Z(X, Y) = \log \left[\sum_{i,j=1}^2 a^{ij}(Z) (x_i - \xi_i) (x_j - \xi_j) \right]$$

où $a^{ij}(Z)$ désignent les éléments de la matrice inverse de la matrice $\{a_{ij}(Z)\}$, x_i et ξ_i sont les coordonnées des points X et Y . La fonction Φ dans la formule (14) est la solution d'une équation de Fredholm. Dans notre travail nous nous appuierons sur les propriétés suivantes de quelques intégrales de l'équation elliptique.

THÉORÈME 1. Si la densité $\varphi(P)$ de simple couche, définie pour $P \in L - \sum C_v$, appartient à la classe $\mathfrak{S}_a^\mu$, c'est-à-dire si elle vérifie les inégalités

$$(16) \quad |\varphi(P)| < \frac{M_\varphi}{\prod_{v=1}^n |PC_v|^a}, \quad |\varphi(P) - \varphi(P_1)| \leq \frac{k_\varphi |PP_1|^\mu}{[|PC_v| |P_1C_{v_1}|]^{a+\mu}}$$

en vertu de notre travail [9] ($0 \leq \alpha < 1$, $\alpha + \mu < 1$, $0 < \mu < 1$), P et P_1 étant situés à l'intérieur d'un même arc $\widehat{C_r C_{r_1}}$ et $P_1 \in \widehat{P C_{r_1}}$, alors le potentiel de simple couche, étalée sur les lignes L est défini par la formule

$$(17) \quad U(X) = \int_L \Gamma(X, Q) \varphi(Q) dQ$$

(dQ désigne l'élément de longueur au point Q), a les propriétés suivantes:

1) La fonction (17) possède des dérivées premières et secondes continues vérifiant l'équation

$$\Psi[U(X)] = 0$$

en tout point intérieur X de l'ensemble $S = S_0 - \sum_{r=1}^q l_r$.

2) La fonction (17) a une limite déterminée

$$(18) \quad U(P) = \lim_{X \rightarrow P} U(X) = \int_L \Gamma(P, Q) \varphi(Q) dQ$$

en tout point P sur L .

3) Il existe une valeur limite de la dérivée transversale du potentiel (17), relative au côté positif de l'arc, exprimée par la formule

$$(19) \quad \frac{dU(P)}{dT_P} = \frac{\pi}{\sqrt{\det |a^{ij}(P)|}} \varphi(P) + \int_L \frac{d\Gamma(P, Q)}{dT_P} \varphi(Q) dQ$$

en tout point $P \in L$ différent des points $C_1, \dots, C_n$; la fonction sous le signe intégral admet la limitation

$$(19') \quad \left| \frac{d\Gamma(P, Q)}{dT_P} \right| < \frac{\text{const}}{|PQ|^{1-h_1}}, \quad \text{où } h_1 = \min(h, h_L).$$

4) Il existe une valeur limite bilatérale de la dérivée tangentielle du potentiel (17), déterminée par une intégrale singulière au sens de Cauchy

$$(20) \quad U_s(P) = \lim_{X \rightarrow P} U_{s_P}(X) = \int_L \Gamma_s(P, Q) \varphi(Q) dQ$$

en tout point P sur L , différent des points C_r ; la fonction sous le signe intégral admet une singularité forte, notamment elle est comparable à la fonction $(s - \sigma)^{-1}$, où s et σ désignent les abscisses curvilignes des points P et Q .

Les propriétés 1 et 2 sont évidentes, puisqu'elles n'exigent que l'intégrabilité de la fonction φ . La propriété 3 est vraie sous l'hypothèse suffisante que la fonction $\varphi(Q)$ soit intégrable et continue au point P .

La propriété 4 est vérifiée, puisque la fonction $\varphi(Q)$ est intégrable et satisfait à une simple condition de Hölder dans un voisinage suffisamment petit du point P ne contenant pas les points de discontinuité C_r . Observons encore que la limite (20) ne dépend pas de la manière dont le point intérieur X tend vers le point $P \neq C_r$ (voir le travail [13] de l'auteur).

THÉORÈME 2. Si la fonction $\varphi(Q)$, définie et intégrable sur $L - \sum C_v$, vérifie une inégalité

$$(21) \quad |\varphi(Q)| < \frac{M_\varphi}{\prod_{v=1}^n |QC_v|^a} \quad (0 \leq a < 1)$$

où M_φ est une constante positive, alors les fonctions définies par les intégrales

$$(22') \quad J_1(P) = \int_L \Gamma(P, Q) \varphi(Q) dQ,$$

$$(22'') \quad J_2(P) = \int_L \frac{d\Gamma(P, Q)}{dT_P} \varphi(Q) dQ$$

vérifient les inégalités suivantes

$$(23') \quad |J_1(P)| < \text{const } M_\varphi,$$

$$|J_1(P) - J_1(P_1)| \leq \frac{\text{const } M_\varphi |PP_1|^\theta}{[|PC_v| |P_1C_{v_1}|]^\theta},$$

$$(23'') \quad |J_2(P)| < \frac{\text{const } M_\varphi}{\prod_{v=1}^n |PC_v|^a},$$

$$|J_2(P) - J_2(P_1)| \leq \frac{\text{const } M_\varphi |PP_1|^{\theta h_1}}{[|PC_v| |P_1C_{v_1}|]^{a + \theta h_1}}$$

à l'intérieur de tout arc $\widehat{C_v C_{v_1}}$, où θ est une constante positive, arbitrairement inférieure à l'unité, $h_1 = \min(h, h_L)$, les coefficients positifs const. aux numérateurs ne dépendant pas de la fonction φ .

Par conséquent, d'après le travail [9], les fonctions (22') et (22'') appartiennent aux classes

$$(24) \quad J_1(P) \in \mathfrak{H}_0^\theta, \quad J_2(P) \in \mathfrak{H}_a^{\theta h_1}$$

relativement aux points de discontinuité C_v . Le théorème cité sera important pour notre étude, mais, sa démonstration étant analogue à celles de la théorie classique du potentiel, nous ne la reproduirons pas.

THÉORÈME 3. Si la densité $\varphi(Q)$ appartient à la classe $\mathfrak{H}_a^\mu$ ($a > 0$), c'est-à-dire si elle vérifie les inégalités (16), alors les dérivées du potentiel (17) de simple couche vérifient des inégalités de la forme

$$(25) \quad |U_{x_j}(X)| < \frac{cM_\varphi + c'k_\varphi}{\prod_{v=1}^n |XC_v|^a} \quad (j = 1, 2)$$

en tout point X à l'intérieur de l'ensemble S ; c et c' sont des constantes positives, indépendantes de la fonction φ .

Démonstration. Il suffit d'étudier l'intégrale de la dérivée de la quasi-solution étendue à l'arc $\widehat{C, C_1}$,

$$(26) \quad J(X) = \int_{C, C_1} w_{x_j}(X, Q) \varphi(Q) dQ$$

au voisinage du point de discontinuité C_1 , puisque la partie restante concerne la fonction $\bar{w}_{x_j}$ à singularité faible. Soit C, T_0 la demi-tangente issue du point C_1 , sur laquelle sont situées les projections orthogonales des points de l'arc $\widehat{C, C_1}$ au voisinage du point C_1 . Soient ensuite deux demi-droites C, T_1 et C, T_2 situées des deux côtés de la demi-tangente C, T_0 et faisant avec elle des angles aigus égaux. Considérons un arc $\widehat{C, W}$, partie de l'arc $\widehat{C, C_1}$, situé à l'intérieur de l'angle $T_1 C, T_2$, et soit un triangle Δ limité par les demi-droites C, T_1 , C, T_2 et une perpendiculaire à la demi-tangente C, T_0 , passant par le point W — extrémité de l'arc $\widehat{C, W}$. Nous admettons que l'arc $\widehat{C, W}$ est suffisamment petit pour que: 1) la tangente en tout point P de l'arc $\widehat{C, W}$ (extrémités comprises) fasse un angle aigu avec la tangente C, T_0 plus petit que l'angle entre C, T_0 et C, T_1 ; 2) la perpendiculaire à la demi-droite C, T_0 , passant par un point arbitraire X du triangle Δ , coupe l'arc $\widehat{C, W}$ en un seul point P . Considérons encore le triangle Δ' limité par les demi-droites C, T_1 , C, T_2 et une perpendiculaire à C, T_0 , passant par un point W' de l'arc $\widehat{C, W}$ qui le divise en deux parties $\widehat{C, W'}$ et $\widehat{W'W}$ de longueurs égales.

Pour limiter l'intégrale (26), supposons que X soit un point arbitraire du triangle Δ' , non situé sur l'arc $\widehat{C, W'}$, et décomposons l'intégrale (26) en une somme d'intégrales

$$(27) \quad J(X) = J^{(C, P_0)}(X) + J^{(P_0 W)}(X) + J^{(W C_1)}(X)$$

étendues aux arcs $\widehat{C, P_0}$, $\widehat{P_0 W}$, $\widehat{W C_1}$, où P_0 est un point de l'arc $\widehat{C, W}$ tel que les arcs $\widehat{C, P}$ et $\widehat{P P_0}$ aient la même longueur, P désigne le point d'intersection de l'arc $\widehat{C, W'}$ avec la perpendiculaire à la demi-tangente C, T_0 passant par le point $X \in \Delta'$.

Écrivons maintenant la première des intégrales (32) sous la forme suivante:

$$(28) \quad J^{(C, P_0)}(X) = \int_{C, P_0} w_{x_j}^Q(X, Q) [\varphi(Q) - \varphi(P)] dQ + \varphi(P) \int_{C, P_0} w_{x_j}^Q(X, Q) dQ.$$

La première de ces intégrales, d'après la formule (15) et l'inégalité (24), admet la limitation suivante:

$$(29) \quad \left| \int_{C_\nu P_0} w_{x_j}^Q(X, Q) [\varphi(Q) - \varphi(P)] dQ \right| \\ < \int_{C_\nu P} \frac{\text{const } k_\varphi dQ}{|QC_\nu|^{a+\mu} |PQ|^{1-\mu}} + \int_{P P_0} \frac{\text{const } k_\varphi dQ}{|PC_\nu|^{a+\mu} |PQ|^{1-\mu}},$$

puisque le rapport des distances $|PQ|/|XQ|$ admet une borne supérieure pour $X \in \Delta'$. Il en résulte

$$(30) \quad \left| \int_{C_\nu P_0} w_{x_j}^Q(X, Q) [\varphi(Q) - \varphi(P)] dP \right| < \frac{\text{const } k_\varphi}{|PC_\nu|^a} < \frac{\text{const } k_\varphi}{|XC_\nu|^a}$$

en remarquant que le rapport $|XC_\nu|/|PC_\nu|$ admet une borne supérieure pour $X \in \Delta'$.

D'après notre travail [13], la seconde des intégrales (28) est bornée si $X \rightarrow P$; par conséquent, d'après l'inégalité (21), nous aurons

$$(31) \quad \left| \varphi(P) \int_{C_\nu P_0} w_{x_j}^Q(X, Q) dQ \right| < \frac{\text{const } M_\varphi}{|XC_\nu|^a}.$$

En rapprochant les résultats (30) et (31), nous obtenons la limitation suivante

$$(32) \quad |J^{(C_\nu P_0)}(X)| < \frac{\tilde{c} M_\varphi + \tilde{c}' k_\varphi}{|XC_\nu|^a}$$

pour $X \in \Delta'$. Pour étudier la seconde des intégrales (27), désignons par s et σ les longueurs des arcs $\widehat{C_\nu P}$ et $\widehat{C_\nu Q}$ et appliquons l'inégalité

$$\frac{\sigma - s}{\sigma} \geq \frac{1}{2}, \quad \text{si} \quad \sigma \geq 2s,$$

nous aurons alors

$$(33) \quad |J^{(P_0 W)}(X)| < \text{const } M_\varphi \int_{P_0 W} \frac{dQ}{|PQ| |QC|^a} \\ < \text{const } M_\varphi \int_{2s}^{|C_\nu W|} \frac{d\sigma}{\sigma^{a+1}} < \frac{\text{const } M_\varphi}{|XC_\nu|^a}.$$

La troisième des intégrales (27) est évidemment bornée et admet la limitation

$$(34) \quad |J^{(WC_\nu)}(X)| < \text{const } M_\varphi$$

si $X \in \Delta'$. En réunissant les limitations (32), (33), (34), nous aurons

$$(35) \quad |J(X)| < \frac{\tilde{c}_1 M_\varphi + \tilde{c}'_1 k_\varphi}{|XC_v|^a}$$

si $X \in \Delta'$.

Il reste à étudier le cas où le point X est situé dans le domaine D qui est la partie du voisinage du point C_v , extérieure à l'angle convexe entre les demi-droites $C_v T_1$ et $C_v T_2$. On peut montrer, par une analyse élémentaire, dans le cas où le point Q est situé sur l'arc $\widehat{C_v W}$ et le point X dans le domaine D , que les trois distances $|XC_v|$, $|XQ|$, $|QC_v|$ satisfont à l'inégalité

$$(36) \quad \frac{|XQ|}{|XC_v| + |QC_v|} \geq \sin \frac{\vartheta}{2},$$

où ϑ désigne une borne inférieure positive de la mesure de l'angle aigu compris entre le vecteur $\overrightarrow{C_v Q}$ et les demi-droites $C_v T_1$ et $C_v T_2$. Il en résulte pour la partie de l'intégrale (26) étendue à l'arc $\widehat{C_v W}$, si $X \in D$, la limitation

$$(37) \quad \left| \int_{C_v W} w_{X,1}^Q(X, Q) \varphi(Q) dQ \right| < \left(\sin \frac{\vartheta}{2} \right)^{-1} \int_{C_v W} \frac{\text{const } M_\varphi dQ}{|C_v Q|^a [|XC_v| + |QC_v|]} < \frac{\text{const } M_\varphi}{|XC_v|^a}.$$

En rapprochant les limitations (35) et (37), nous arrivons à la conclusion (25) du théorème 3.

THÉOREME 4. *Si la densité $\varphi(Q)$ appartient à la classe $\mathfrak{S}_a^\mu$ ($0 < a < 1$, $0 < \mu < h$, $a + \mu < 1$) c'est-à-dire si elle vérifie les inégalités (16), alors la fonction limite (20) de la dérivée tangentielle du potentiel (17) de simple couche vérifie les inégalités*

$$(38) \quad |U_s(P)| < \frac{c_1 M_\varphi + c_2 k_\varphi}{\prod_{v=1}^n |PC_v|^a},$$

$$|U_s(P) - U_s(P_1)| < \frac{(c'_1 M_\varphi + c'_2 k_\varphi) |PP_1|^\mu}{[|PC_v| |P_1 C_{v_1}|]^{a+\mu}}$$

(où c_1, c_2, c'_1, c'_2 sont des constantes positives, indépendantes de la fonction φ) à l'intérieur de tout arc $\widehat{C, C_{v_1}}$, cette fonction appartient donc aussi à la classe $\mathfrak{S}_a^\mu$, de mêmes paramètres a et μ que la classe de la densité φ .

Pour démontrer le théorème, il suffit d'étudier l'intégrale

$$(39) \quad F(P) = \int_{C, C_{v_1}} \Gamma_s(P, Q) \varphi(Q) dQ$$

où P est situé à l'intérieur ou à l'extérieur de l'arc $\widehat{C_r C_{r_1}}$. En désignant par s et σ les abscisses curvilignes des points P et Q sur $\widehat{C_r C_{r_1}}$, nous pouvons écrire la dérivée tangentielle Γ_s sous la forme

$$(40) \quad \Gamma_s(P, Q) = \frac{\Phi(s, \sigma)}{s - \sigma},$$

donc

$$(41) \quad F(P) = F(s) = \int_{C_r C_{r_1}} \frac{\Phi(s, \sigma)}{s - \sigma} \varphi(\sigma) d\sigma.$$

On montre sans peine, en s'appuyant sur les propriétés (2) et (6), que la fonction $\Phi(s, \sigma)$ satisfait à une condition de Hölder de la forme

$$(42) \quad |\Phi(s, \sigma) - \Phi(s_1, \sigma_1)| < \text{const}[|s - s_1|^{\theta h_1} + |\sigma - \sigma_1|^{\theta h_1}]$$

(où $h_1 = \min(h, h_L)$, $0 < \theta < 1$)

sur tout arc faisant partie de l'ensemble L . Par conséquent, on peut étudier l'intégrale (41), dans les cas où le point P est situé soit à l'extérieur soit à l'intérieur de l'arc $\widehat{C_r C_{r_1}}$, tout à fait comme dans nos travaux [14], [15], [16] consacrés aux propriétés des fonctions de classe $\mathfrak{S}_a^h$ définies sur un système arbitraire d'arcs dans le plan de la variable complexe. On arrive ainsi aux conclusions (38). Observons encore que la limitation de la forme

$$|F(P)| < \frac{\text{const } M_\varphi}{|PC_r|^\alpha |PC_{r_1}|^\alpha},$$

dans le cas où le point P est situé à l'extérieur de l'arc $\widehat{C_r C_{r_1}}$, résulte d'ailleurs de nos considérations à la fin de la démonstration du théorème précédent.

THÉOREME 5. *Si la fonction $\varrho(Y)$, définie et intégrable dans l'ensemble S , vérifie l'inégalité*

$$(43) \quad |\varrho(Y)| < \frac{M_\varrho}{\prod_{r=1}^n |YC_r|^\alpha} + \frac{M'_\varrho}{|YP_Y|^p},$$

où p et α sont des constantes non négatives, inférieures à l'unité, M_ϱ et M'_ϱ des constantes positives, P_Y désigne le point de l'ensemble L le plus rapproché du point intérieur $Y \in S$, alors le potentiel de charge plane

$$(44) \quad V(X) = \iint_S \Gamma(X, Y) \varrho(Y) dY$$

(dY désigne l'élément d'aire au point Y) possède les propriétés suivantes:

1) Le potentiel (44) et ses dérivées tendent vers des limites déterminées

$$(45) \quad \lim_{X \rightarrow P} V(X) = \iint_S \Gamma(P, Y) \varrho(Y) dY = V(P),$$

$$\lim_{X \rightarrow P} V_{x_j}(X) = \iint_S \Gamma_{x_j}(P, Y) \varrho(Y) dY = V_{x_j}(P),$$

si le point X tend d'une façon arbitraire vers un point P sur L , différent des points de discontinuité C_* .

2) Le potentiel (44) et ses dérivées admettent les limitations

$$(46) \quad |V(X)| < c_0 M_\varrho + c'_0 M'_\varrho, \quad |V_{x_j}(X)| < c_1 M_\varrho + c'_1 M'_\varrho$$

dans l'ensemble $S+L$, où les constantes positives c_0, c'_0, c_1, c'_1 ne dépendent pas de la fonction $\varrho(Y)$.

3) Le potentiel (44) vérifie dans l'ensemble $S+L$ une condition de Lipschitz

$$(47) \quad |V(X) - V(X_1)| \leq 2(c_1 M_\varrho + c'_1 M'_\varrho) |XX_1|.$$

4) La fonction limite de la dérivée du potentiel (44) vérifie à l'intérieur de tout arc C, C_{r_1} une condition de Hölder

$$(48) \quad |V_{x_j}(P) - V_{x_j}(P_1)| \leq \frac{\tilde{c}_0 M_\varrho + \tilde{c}'_0 M'_\varrho}{\prod_{v=1}^n |PC_v|^\alpha |P_1 C_{v_1}|^\alpha} |PP_1|^\theta$$

où $\theta = 1-p$, si $0 < p < 1$, et θ est une constante positive arbitraire, inférieure à l'unité, si $p = 0$.

5) Les dérivées du potentiel (44) vérifient une condition de Hölder

$$(49) \quad |V_{x_j}(X) - V_{x_j}(X_1)| < C(S^*) |XX_1|^\theta$$

dans tout domaine fermé S^* situé dans l'ensemble S , $C(S^*)$ est un coefficient positif, dépendant du domaine S^* et du choix de la constante positive $\theta < 1$.

Les propriétés citées résultent de nos considérations dans le travail [15].

THÉOREME 6. Si la fonction $\varrho(Y)$, définie et intégrable dans l'ensemble S , vérifie l'inégalité

$$(50) \quad |\varrho(Y)| < \frac{M_\varrho}{\prod_{v=1}^n |YC_v|^\alpha} + \frac{M'_\varrho}{|YP_P|^\beta} \quad (0 \leq \alpha < 1; 0 \leq \beta < 1)$$

et une condition de Hölder

$$(51) \quad |\varrho(Y) - \varrho(Y_1)| < k(S^*) |YY_1|^{h_\varrho} \quad (0 < h_\varrho \leq 1)$$

dans un domaine fermé $S^* \subset S$, alors le potentiel de charge plane (44) vérifie l'équation de Poisson

$$(52) \quad \Psi[V(X)] = \frac{2\pi}{\sqrt{\det |a^{ij}(X)|}} e(X)$$

en tout point intérieur X du domaine S^* .

La démonstration de ce théorème résulte des considérations présentées dans les travaux connus de Gevrey et Giraud (voir aussi le travail [12]).

4. Résolution du problème. Nous allons chercher la solution du problème aux limites discontinues proposé sous forme de la somme

$$(53) \quad u(X) = \int_S \int \Gamma(X, Y) F_1 \left[Y, u(Y), \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right] dY + \int_L \Gamma(X, Q) \varphi(Q) dQ$$

d'un potentiel de charge plane et d'un potentiel de simple couche de densité inconnue $\varphi(Q)$ sur L . On a posé

$$(54) \quad F_1(Y, u, u_1, u_2) = (2\pi)^{-1} \sqrt{\det |a^{ij}(\bar{Y})|} F(Y, u, u_1, u_2).$$

En demandant que la fonction (53) vérifie la condition limite (10), on arrive, en vertu des théorèmes 1 et 5, à l'équation

$$(55) \quad \begin{aligned} & \frac{\pi}{\sqrt{\det |a^{ij}(P)|}} \varphi(P) + \int_L \left[\frac{d\Gamma(P, Q)}{dT_P} + g(P) \Gamma(P, Q) \right] \varphi(Q) dQ + \\ & + \int_S \int \left[\frac{d\Gamma(P, Y)}{dT_P} + g(P) \Gamma(P, Y) \right] F_1 \left[Y, u(Y), \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right] dY \\ & = G \left\{ P, u(P), \int_S \int \Gamma_s(P, Y) F_1 \left[Y, u(Y), \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right] dY + \int_L \Gamma_s(P, Q) \varphi(Q) dQ \right\} \end{aligned}$$

sous l'hypothèse que les conditions des théorèmes 1 et 5 soient satisfaites. L'équation (55) doit être vérifiée en tout point P sur L , différents des points C_v .

Notre problème est donc ramené à l'étude du système de deux équations intégral-différentielles (53), (55) à deux fonctions inconnues: $u(X)$ dans l'ensemble S et $\varphi(Q)$ dans l'ensemble $L - \sum C_v$.

Le système (53), (55) étant irrésoluble par les méthodes de l'Analyse classique, nous l'étudierons par la méthode topologique basée sur le théorème suivant de J. Schauder [17]:

„Toute transformation continue d'un ensemble convexe, borné, fermé et contenu dans un espace de Banach, en un sous-ensemble compact a au moins un point invariant”.

Cette étude exigera des considérations plus délicates, à cause de la singularité forte d'une intégrale dans l'équation (55) et du fait que la fonction $\varphi(P)$ et les dérivées de la fonction $u(X)$ ne sont pas bornées dans les voisinages des points C_v .

Considérons donc le système des quatre équations intégrales singulières suivantes

$$\begin{aligned}
 u_v(X) = & \int_S \Gamma_v(X, Y) F_1[Y, u_0(Y), u_1(Y), u_2(Y)] dY + \\
 & + \int_L \Gamma_v(X, Q) \varphi(Q) dQ \quad (v = 0, 1, 2), \\
 (56) \quad & \frac{\pi}{\sqrt{\det |a^{ij}(P)|}} \varphi(P) + \int_L \left[\frac{d\Gamma(P, Q)}{dT_P} + g(P) \Gamma(P, Q) \right] \varphi(Q) dQ + \\
 & + \int_S \left[\frac{d\Gamma(P, Y)}{dT_P} + g(P) \Gamma(P, Y) \right] F_1[Y, u_0(Y), u_1(Y), u_2(Y)] dY \\
 & = G[P, u_0(P), \bar{u}_s(P)]
 \end{aligned}$$

à quatre fonctions inconnues $u_0(X), u_1(X), u_2(X), \varphi(P)$, où l'on a désigné

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_s(P) = & \int_S \Gamma_s(P, Y) F_1[Y, u_0(Y), u_1(Y), u_2(Y)] dY + \int_L \Gamma_s(P, Q) \varphi(Q) dQ, \\
 (56') \quad & \Gamma_0 = \Gamma, \quad \Gamma_v = \Gamma_{x_v} \quad (v = 1, 2).
 \end{aligned}$$

Soit maintenant un espace fonctionnel A composé de tous les systèmes

$$[u_0(X), u_1(X), u_2(X), \varphi(P)]$$

de fonctions continues réelles, définies soit dans l'ensemble ouvert $X \in S$, soit dans l'ensemble $P \in L - \sum C_v$ et vérifiant les inégalités

$$\begin{aligned}
 |XP_X|^\gamma \prod_{j=1}^n |XC_j|^{\beta+h_\varphi} |u_v(X)| & < \infty \quad (v = 0, 1, 2), \\
 (57) \quad & \prod_{j=1}^n |PC_j|^{\beta+h_\varphi} |\varphi(P)| < \infty,
 \end{aligned}$$

où β est une constante égale à l'exposant donné α dans la propriété (9) si $\alpha > 0$, et une constante positive arbitraire, inférieure à l'unité, si $\alpha = 0$, h_φ est une constante positive, fixées arbitrairement de façon qu'on ait

$$(58) \quad \beta + h_\varphi < 1, \quad 0 < h_\varphi < \min(\mu, h, h_L, h_G, 1-p),$$

la constante positive μ figurant dans les propriétés (7) et (9); γ est une constante positive, inférieure à l'unité, arbitrairement fixée. On définit,

comme d'habitude, la somme de deux points de l'espace $\mathcal{A}$ et le produit d'un point par un nombre réel, par les formules

$$(59) \quad [u_0, u_1, u_2, \varphi] + [u'_0, u'_1, u'_2, \varphi'] = [u_0 + u'_0, u_1 + u'_1, u_2 + u'_2, \varphi + \varphi'],$$

$$\lambda[u_0, u_1, u_2, \varphi] = [\lambda u_0, \lambda u_1, \lambda u_2, \lambda \varphi].$$

Ensuite on définit la norme d'un point $U = [u_0, u_1, u_2, \varphi]$ par la formule

$$(60) \quad \|U\| = \max_{0 \leq \nu \leq 2} \sup_{X \in S} \left[|XP_X|^\nu \prod_{j=1}^n |XC_j|^{\beta+h} |u_\nu(X)| \right] +$$

$$+ \sup_{P \in L} \left[\prod_{j=1}^n |PC_j|^{\beta+h_\varphi} |\varphi(P)| \right]$$

et la distance des deux points U, V par la formule

$$(61) \quad \delta(U, V) = \|U - V\|.$$

On peut montrer sans peine que l'espace ainsi défini est complet, il est donc un espace de Banach.

Considérons maintenant dans l'espace $\mathcal{A}$ l'ensemble E de tous les points $U = [u_0(X), u_1(X), u_2(X), \varphi(P)]$ vérifiant les inégalités

$$(62) \quad \prod_{j=1}^n |XC_j|^\beta |u_\nu(X)| \leq \varrho_1 \quad (\nu = 0, 1, 2),$$

$$\prod_{j=1}^n |PC_j|^\beta |\varphi(P)| \leq \varrho_2,$$

$$[|PC_j| |P_1 C_{j_1}|]^{\beta+h_\varphi} |\varphi(P) - \varphi(P_1)| \leq \kappa_\varphi |PP_1|^{h_\varphi},$$

où $\varrho_1, \varrho_2, \kappa_\varphi$ sont des constantes positives, arbitrairement fixées, on a ensuite $P, P_1 \in \widehat{C_j C_{j_1}}, P_1 \in \widehat{PC_{j_1}}$. Les fonctions $\varphi(P)$ appartiennent donc à la classe $\mathfrak{H}_a^{h_\varphi}$.

L'ensemble E est évidemment fermé et convexe. Tenant compte de la forme des équations intégrales (56), transformons l'ensemble E par les relations suivantes

$$v_\nu(X) = \int_S \Gamma_\nu(X, Y) F_1[Y, u_0(Y), u_1(Y), u_2(Y)] dY +$$

$$+ \int_L \Gamma_\nu(X, Q) \varphi(Q) dQ \quad (\nu = 0, 1, 2),$$

$$(63) \quad \frac{\pi}{\sqrt{\det |a^{ij}(P)|}} \psi(P) + \int_L \left[\frac{d\Gamma(P, Q)}{dT_P} + g(P) \Gamma(P, Q) \right] \psi(Q) dQ$$

$$= - \int_S \left[\frac{d\Gamma(P, Y)}{dT_P} + g(P) \Gamma(P, Y) \right] F_1[Y, u_0(Y), u_1(Y), u_2(Y)] dY +$$

$$+ G[P, v_0(P), \bar{u}_s(P)].$$

Cherchons les conditions pour que ces relations fassent correspondre à tout point $U = [u_0, u_1, u_2, \varphi]$ de l'ensemble E un point déterminé $V = [v_0, v_1, v_2, \psi]$ du même ensemble. Remarquons pour cela, en vertu de la conclusion (30) du théorème 4 et des inégalités (62), qu'on a la limitation

$$(64) \quad \left| \int_L \Gamma_r(X, Q) \varphi(Q) dQ \right| < \frac{c \varrho_2 + c' \kappa_\varphi}{\prod_{j=1}^n |XC_j|^\beta}$$

où les constantes positives c et c' ne dépendent pas de la fonction φ . Ensuite, d'après les inégalités (4) et (62), nous aurons la limitation

$$(65) \quad |F_1[Y, u_0(Y), u_1(Y), u_2(Y)]| < \frac{3c_a M'_F \varrho_1}{\prod_{j=1}^n |YC_j|^\beta} + \frac{c_a M_F}{|Y P_F|^p}$$

où $c_a = (2\pi)^{-1} \sup \sqrt{\det |a^{ij}(X)|}$. Nous en concluons, en vertu du théorème 5, que les fonctions $v_r(X)$, déterminées par la première des formules (63), sont définies et continues dans l'ensemble ouvert S et vérifient l'inégalité suivante

$$(66) \quad |v_r(X)| < \frac{a_1 M_F + a_2 M'_F \varrho_1 + c \varrho_2 + c' \kappa_\varphi}{\prod_{j=1}^n |XC_j|^\beta} \quad (v = 0, 1, 2)$$

où les nouvelles constantes positives a_1, a_2 ne dépendent pas des fonctions F, u_r, φ . Pour étudier la fonction $\psi(P)$, remarquons qu'elle est une solution de l'équation de Fredholm de la forme

$$(67) \quad \frac{\pi}{\sqrt{\det |a^{ij}(X)|}} \psi(P) + \int_L \left[\frac{d\Gamma(P, Q)}{dT_P} + g(P) \Gamma(P, Q) \right] \psi(Q) = f(P)$$

où $f(P)$ est une fonction déterminée par le second membre de l'équation (63). Le noyau de l'équation (67) a une faible singularité précisée par l'inégalité (19'). Cherchons d'abord une limitation pour la fonction $f(P)$. Observons que, d'après les théorèmes 3 et 5, la fonction (56') vérifie l'inégalité

$$(68) \quad |\bar{u}_s(P)| < \frac{a'_1 M_F + a'_2 M'_F \varrho_1 + \bar{c} \varrho_2 + \bar{c}' \kappa_\varphi}{\prod_{j=1}^n |PC_j|^\alpha}$$

analogue à l'inégalité (66). Il en résulte, en vertu de l'hypothèse (9), l'inégalité

$$(69) \quad |G[P, u_0(P), \bar{u}_s(P)]| < \frac{M_G[(a_1 + a'_1) M_F + (a_2 + a'_2) M'_F \varrho_1 + (c + \bar{c}) \varrho_2 + (c' + \bar{c}') \kappa_\varphi] + M'_G}{\prod_{j=1}^n |PC_j|^\beta}$$

et ensuite, en tenant compte de l'inégalité (65) et du théorème 5, nous aurons la limitation

$$(70) \quad |f(P)| < \frac{a_3(M_F + M'_F \varrho_1)(M_G + a'_3) + a_4 M_G(M_F + M'_F \varrho_1 + \varrho_2 + \kappa_\varphi) + M'_G}{\prod_{j=1}^n |PC_j|^\beta}$$

où a_3, a'_3, a_4 sont des constantes positives, indépendantes des fonctions F, G, g, u, φ . En vertu de l'hypothèse VII à la page 37 concernant le problème homogène, l'équation (67) a donc une solution unique, donnée par le premier théorème de Fredholm,

$$(71) \quad \psi(P) = \pi^{-1} \sqrt{\det |a^{ij}(P)|} f(P) + \pi^{-1} \int_L \mathfrak{N}(P, Q) \sqrt{\det |a^{ij}(Q)|} f(Q) dQ$$

continue en tout point $P \neq C_j$ où $\mathfrak{N}(P, Q)$ est la somme de plusieurs noyaux itérés et du noyau résolvant. Nous en concluons que la fonction (71) vérifie une inégalité

$$(72) \quad |\psi(P)| < \frac{b(M_F + M'_F \varrho_1)(M_G + b') + b'' M_G(M_F + M'_F \varrho_1 + \varrho_2 + \kappa_\varphi) + M'_G}{\prod_{j=1}^n |PC_j|^\beta}$$

de la même forme que (70); b, b', b'' sont des constantes positives. Cherchons maintenant l'inégalité de Hölder pour la fonction $\psi(P)$. Dans ce but, en s'appuyant sur les théorèmes 3, 5 et sur les inégalités (62), (65), nous aurons pour la fonction (56') une inégalité de Hölder

$$(73) \quad |\bar{u}_s(P) - \bar{u}_s(P_1)| < \frac{[c'_1(M_F + M'_F \varrho_1) + c'_1 \varrho_2 + c'_2 \kappa_\varphi] |PP_1|^{h_\varphi}}{[|PC_s| |P_1 C_{s_1}|]^{\beta + h_\varphi}}$$

où $P, P_1 \in \widehat{C_s C_{s_1}}$, $P_1 \in \widehat{P C_{s_1}}$. En s'appuyant maintenant sur la seconde des équations (63), sur les inégalités (7), (9), (65), (72), (73) et sur les théorèmes 2, 5, nous arriverons à l'inégalité demandée de la forme

$$(74) \quad |\psi(P) - \psi(P_1)| < \{b_1(M_G + k_G + b'_1)[(M'_F \varrho_1 + M_F)(M_G + M_G + k_G + b'_1) + M_G(\varrho + \kappa_\varphi) + M'_G] + b_2 M_G(M_F + M'_F \varrho_1 + \varrho_2 + \kappa_\varphi) + k_G\} \frac{|PP_1|^{h_\varphi}}{[|PC_s| |P_1 C_{s_1}|]^{\beta + h_\varphi}}$$

où b_1, b'_1, b''_1, b_2 sont des constantes positives, indépendantes des fonctions du problème. Les fonctions transformées $\psi(P)$ appartiennent donc à la classe $\mathfrak{H}_\beta^{h_\varphi}$, de même que les fonctions $\varphi(P)$. En comparant les inégalités obtenues (66), (72), (74) aux inégalités (62), nous pouvons dire que l'ensemble E' , transformé de l'ensemble E par les relations (63), fera partie

de cet ensemble si les constantes du problème $M_F, M'_F, M_G, M'_G, k_G, M_g, k_g$ sont suffisamment petites pour que les inégalités suivantes soient vérifiées:

$$(75) \quad \begin{aligned} & a_1 M_F + a_2 M'_F \varrho_1 + c \varrho_2 + c' \kappa_\varphi \leq \varrho_1, \\ & b(M_F + M'_F \varrho_1)(M_g + b') + b'' M_G(M_F + M'_F \varrho_1 + \varrho_2 + \kappa_\varphi) + M'_G \leq \varrho_2, \\ & b_1(M_g + k_g + b'_1)[(M'_F \varrho_1 + M_F)(M_G + M_g + k_g + b'_1) + \\ & + M_G(\varrho_2 + \kappa_\varphi) + M'_G] + b_2 M_G(M_F + M'_F \varrho_1 + \varrho_2 + \kappa_\varphi) + k_G \leq \kappa_\varphi. \end{aligned}$$

Les conditions (75) étant vérifiées, nous démontrerons encore les deux lemmes suivants.

LEMME 1. *La transformation de l'ensemble E par les relations (63) est continue dans l'espace Λ .*

Démonstration. Soit une suite arbitraire $\{U^{(m)}\}$ de points $U^{(m)} = [u_0^{(m)}, u_1^{(m)}, u_2^{(m)}, \varphi^{(m)}]$ de l'ensemble E convergente vers un point $U = [u_0, u_1, u_2, \varphi]$ du même ensemble au sens de la norme (60). Nous avons donc

$$(76) \quad \begin{aligned} \|U^{(m)} - U\| = \max_{\substack{\cdot \\ X \in S}} \sup_{\substack{\cdot \\ X \in S}} & \left[|XP_X|^r \prod_{j=1}^n |XC_j|^{\beta+h_\varphi} |u_\nu^{(m)}(X) - u(X)| \right] + \\ & + \sup_{\substack{\cdot \\ P \in L}} \left[\prod_{j=1}^n |PC_j|^{\beta+h_\varphi} |\varphi^{(m)}(P) - \varphi(P)| \right] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

si $m \rightarrow \infty$. Conformément à la définition de la continuité d'une transformation, il est nécessaire et suffisant de démontrer que la suite de points $V^{(m)} = [v_0^{(m)}, v_1^{(m)}, v_2^{(m)}, \psi^{(m)}]$ transformés par les relations (63), tend vers le point $V = [v_0, v_1, v_2, \psi]$ de l'ensemble E' , correspondant au point limite $U = [u_0, u_1, u_2, \varphi]$ par les mêmes relations (63), c'est-à-dire que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|V^{(m)} - V\| = 0.$$

Considérons pour cela la différence

$$(77) \quad \begin{aligned} & v_\nu^{(m)}(X) - v_\nu(X) \\ & = \int_S \int \Gamma_\nu(X, Y) \{F_1[Y, u_0^{(m)}(Y), u_1^{(m)}(Y), u_2^{(m)}(Y)] - \\ & - F_1[Y, u_0(Y), u_1(Y), u_2(Y)]\} dY + \int_L \Gamma_\nu(X, Q) [\varphi^{(m)}(Q) - \varphi(Q)] dQ. \end{aligned}$$

La première intégrale Δ_1 de cette somme vérifie, d'après la limitation

$$|\Gamma_\nu(X, Y)| < \frac{\text{const}}{|XY|}$$

et l'hypothèse (5), l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned}
 (78) \quad |\Delta_1(X)| &< \text{const} \int_S \frac{k_F \sum_{r=0}^2 |u_r^{(m)}(Y) - u_r(Y)|^{h'_F}}{|XY|} dY \\
 &< \text{const} k_F \max_r \sup_{Y \in S} \left[|YP_F|^\gamma \prod_{j=1}^n |YC_j|^{\beta+h_\varphi} |u_r^{(m)}(Y) - u_r(Y)| \right]^{h'_F} \times \\
 &\quad \times \int_S \frac{dY}{|XY| |YP_F|^\gamma \prod_{j=1}^n |YC_j|^{h'_F(\beta+h_\varphi)}}.
 \end{aligned}$$

Il en résulte, d'après l'hypothèse (76),

$$(79) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{X \in S} [|XP_X|^\gamma |\Delta_1(X)|] = 0.$$

Pour étudier la seconde intégrale Δ_2 de la somme (77), remarquons que, d'après les inégalités (62) et le théorème 4, cette intégrale vérifie l'inégalité

$$(80) \quad |\Delta_2(X)| < \frac{c_1 \varrho_2 + c_2 \kappa_\varphi}{\prod_{j=1}^n |XC_j|^\beta}$$

où les constantes positives c_1, c_2 ne dépendent pas des fonctions $\varphi^{(m)}, \varphi$.

Considérons maintenant un ensemble de cercles disjoints K_j centrés aux points de discontinuité C_j . D'après l'inégalité (80), à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un rayon $r(\varepsilon)$ de ces cercles suffisamment petit pour que l'inégalité

$$(81) \quad |XP_X|^\gamma \prod_{j=1}^n |XC_j|^{\beta+h_\varphi} |\Delta_2(X)| < \varepsilon$$

soit vraie en tout point X de l'ensemble S situé dans les cercles $K_j(\varepsilon)$.

Ajoutons que le rayon $r(\varepsilon)$ est suffisamment petit pour que toute circonférence du cercle K_j coupe l'arc correspondant $\widehat{C_j C_{j_1}}$ en un seul point. Les cercles $K_j(\varepsilon)$ étant fixés, étudions l'intégrale $\Delta_2(X)$ lorsque le point X de l'ensemble S est extérieur aux cercles K_j :

$$(82) \quad X \in \omega(\varepsilon) = S - \left(\sum_{j=1}^n K_j \right) \times S.$$

Dans ce but écrivons

$$\begin{aligned}
 (83) \quad \Delta_2(X) &= [\varphi^{(m)}(P'_X) - \varphi(P'_X)] \int_L \Gamma_*(X, Q) dQ + \\
 &\quad + \int_L \Gamma_*(X, Q) \{ [\varphi^{(m)}(Q) - \varphi^{(m)}(P'_X)] - [\varphi(Q) - \varphi(P'_X)] \} dQ
 \end{aligned}$$

P'_X étant le point de l'ensemble L , non intérieur aux cercles K_j , qui est le plus rapproché du point $X \in \omega(\varepsilon)$. La première intégrale dans la somme (83) étant bornée, nous en concluons, en vertu de l'hypothèse (76), qu'au nombre arbitraire ε on peut faire correspondre un indice $N(\varepsilon)$ tel qu'on ait

$$(84) \quad |XP_X|^\gamma \prod_{j=1}^n |XC_j|^{\beta+h_\varphi} |\varphi^{(m)}(P'_X) - \varphi(P'_X)| \left| \int_L \Gamma_\nu(X, Q) dQ \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

si $m > N(\varepsilon)$, $X \in \omega(\varepsilon)$. Pour étudier le second terme $\bar{\Delta}_2(X)$ de la somme (83), considérons un arc $\widehat{l'l''}$ sur $\widehat{C_j C_{j_1}}$, contenant le point P'_X , tel que les longueurs des arcs $\widehat{l'P'_X}$, $\widehat{P'_X l''}$ soient égales, si les points l' et l'' sont extérieurs aux cercles K_j ; dans le cas où une extrémité l' est située sur la circonférence du cercle K_j , on admet que la longueur de l'arc $\widehat{l'P'_X}$ est tout au plus égale à la longueur de l'arc $\widehat{P'_X l''}$; on fera une convention analogue si l'autre extrémité l'' se trouve sur la circonférence du cercle K_{j_1} .

Décomposons maintenant la seconde des intégrales (83) en une somme

$$(85) \quad \Delta_2^*(X) = \Delta_2^{*(l'l'')}(X) + \Delta_2^{*(L-l'l'')}(X)$$

d'intégrales étendues à l'arc $\widehat{l'l''}$ et à la partie restante $L - \widehat{l'l''}$. En vertu de la troisième des inégalités (62), l'intégrale étendue à l'arc $\widehat{l'l''}$ vérifie l'inégalité

$$(86) \quad |\Delta_2^{*(l'l'')}(X)| < \text{const } \kappa_\varphi \left[\int_{l'P_X} \int \frac{|P'_X Q|^{h_\varphi-1} dQ}{|C_j Q|^{\beta+h_\varphi} |P_X C_{j_1}|^{\beta+h_\varphi}} + \right. \\ \left. + \int_{P'_X l''} \frac{|P'_X Q|^{h_\varphi-1} dQ}{|C_j P_X|^{\beta+h_\varphi} |Q C_{j_1}|^{\beta+h_\varphi}} \right].$$

Au nombre ε on peut donc faire correspondre une longueur $\eta(\varepsilon)$ de l'arc $\widehat{l'l''}$ suffisamment petite pour qu'on ait

$$(87) \quad |XP_X|^\gamma \prod_{j=1}^n |XC_j|^{\beta+h_\varphi} |\Delta_2^{*(l'l'')}(X)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

quel que soit X dans l'ensemble $\omega(\varepsilon) = S - \sum K_j(\varepsilon) \times S$. La seconde des intégrales (85) reste régulière, si X tend vers P'_X , donc au nombre ε on peut faire correspondre un indice $N'(\varepsilon)$ tel qu'on ait

$$(88) \quad |XP_X|^\gamma \prod_{j=1}^n |XC_j|^{\beta+h_\varphi} |\Delta_2^{*(L-l'l'')}(X)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

si $m > N'(\varepsilon)$, $X \in \omega(\varepsilon)$. En rapprochant les inégalités (81), (84), (87), (88), nous concluons que

$$(89) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sup \left[|XP_X|^\gamma \prod_{j=1}^n |XC_j|^{\beta+h_\varphi} |\Delta_2(X)| \right] = 0$$

donc, en tenant compte du résultat (79), nous aurons

$$(90) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{X \in S} \left[|XP_X|^\gamma \prod_{j=1}^n |XC_j|^{\beta+h_\varphi} |v_r^{(m)}(X) - v_r(X)| \right] = 0.$$

Il reste à étudier la différence $\psi^{(m)}(P) - \psi(P)$, où $\psi(P)$ est une solution de l'équation intégrale (63) et $\psi^{(m)}(P)$ de l'équation analogue. On aura donc

$$(91) \quad \begin{aligned} \psi^{(m)}(P) - \psi(P) = & [\mathcal{E}(P, v_0^{(m)}, u_0^{(m)}, u_1^{(m)}, u_2^{(m)}) - \mathcal{E}(P, v_0, u_0, u_1, u_2)] + \\ & + \int_L \mathfrak{N}(P, Q) [\mathcal{E}(Q, v_0^{(m)}, u_0^{(m)}, u_1^{(m)}, u_2^{(m)}) - \mathcal{E}(Q, v_0, u_0, u_1, u_2)] \end{aligned}$$

où $\mathcal{E}$ est le résultat d'une opération fonctionnelle sur les fonctions v_0, u_0, u_1, u_2 , définie par les termes intégrales de la seconde des relations (63). Il suffit d'étudier la différence des derniers termes, contenant des intégrales à singularité forte.

D'après l'hypothèse (9), nous aurons

$$(92) \quad |G(P, v_0^{(m)}, \bar{u}_s^{(m)}) - G(P, v_0, \bar{u}_s)| \leq M_G[|v_0^{(m)} - v_0| + |\bar{u}_s^{(m)} - \bar{u}_s|]$$

où les fonctions $\bar{u}_s(P)$ sont déterminées par les formules (56') et les fonctions $\bar{u}_s^{(m)}(P)$ par des formules analogues. Moyennant des décompositions et des raisonnements analogues à ceux qui ont été faits pour les intégrales (77) et (83), on arrive à la même conclusion

$$(93) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{P \in L} \left[\prod_{r=1}^n |PC_r|^{\beta+h_\varphi} |G(P, v_0^{(m)}, \bar{u}_s^{(m)}) - G(P, v_0, \bar{u}_s)| \right] = 0.$$

Les autres composantes de l'opération $\mathcal{E}$ sont plus faciles à étudier et on aura de même

$$(94) \quad \begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{P \in L} \left[\prod_{r=1}^n |PC_r|^{\beta+h_\varphi} |\mathcal{E}(P, v_0^{(m)}, u_0^{(m)}, u_1^{(m)}, u_2^{(m)}) - \right. \\ \left. - \mathcal{E}(P, v_0, u_0, u_1, u_2)| \right] = 0. \end{aligned}$$

Il en résulte, en vertu de la formule (91), la propriété suivante

$$(95) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{P \in L} \left[\prod_{r=1}^n |PC_r|^{\beta+h_\varphi} |\psi^{(m)}(P) - \psi(P)| \right] = 0.$$

En rapprochant les résultats (90) et (95), on obtient

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|V^{(m)} - V\| = 0$$

et par conséquent le lemme 1 est démontré.

LEMME 2. *L'ensemble E' , transformé de l'ensemble E par les relations (63), est compact.*

Démonstration. Conformément à la définition de la compacité, il est nécessaire et suffisant de démontrer que de la suite arbitraire $\{V^{(m)}\}$ de points $V^{(m)} = [v_0^{(m)}, v_1^{(m)}, v_2^{(m)}, \psi^{(m)}]$ de l'ensemble E' on peut extraire une suite partielle $\{V^{(k_m)}\}$ convergente au sens de la norme (60).

Remarquons pour cela que, d'après les limitations (62), nous pouvons faire correspondre au nombre positif arbitraire ε un rayon $r(\varepsilon)$ des cercles K_j , centrés en C_j , suffisamment petit pour qu'on ait (quel que soit m)

$$(96) \quad \prod_{j=1}^n |PC_j|^{\beta+h_{\varphi}} |\psi^{(m)}(P)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

si le point P est situé dans les cercles K_j . Les cercles $K_j(\varepsilon)$ étant fixés, les fonctions $\psi^{(m)}(P)$ sont bornées dans leur ensemble et également continues dans l'ensemble L' de tous les points de L situés à l'extérieur des cercles K_j . Cette propriété est évidente pour l'ensemble de toutes les fonctions $\psi^{(m)}(P)$, puisqu'elles vérifient la même condition de Hölder (74).

En vertu de l'inégalité (66), nous pouvons maintenant faire correspondre à tout nombre positif ε un ensemble fini de $q + q'$ lignes fermées

$$(97) \quad L_1^s, L_2^s, \dots, L_{q+q'}^s$$

situées à l'intérieur de l'ensemble S d'un côté des lignes fermées $L_0, \dots, L_q$ et entourant chacun des arcs $l_1, l_2, \dots, l_{q'}$, assez voisines de ces lignes pour que les fonctions $v^{(m)}(X)$ vérifient l'inégalité

$$(98) \quad |XP_X|^{\gamma} \prod_{j=1}^n |XC_j|^{\beta+h_{\varphi}} |v^{(m)}(X)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

en tout point X de la partie S_s de l'ensemble S limitée par les lignes (97). L'ensemble $S - S_s$ ne contient pas dans son intérieur les lignes $l_1, l_2, \dots, l_{q'}$ et dans cet ensemble les fonctions $|XP_X|$ et $|XC_j|$ ont des bornes inférieures positives. Donc les fonctions $v^{(m)}(X)$ sont continues dans la fermeture $\overline{S - S_s}$ de l'ensemble $S - S_s$ et, en vertu du théorème 5, elles sont bornées dans leur ensemble et vérifient dans cet ensemble une même condition de Hölder (quel que soit m)

$$(99) \quad |v^{(m)}(X) - v^{(m)}(X_1)| \leq H_s |XX_1|^{\theta}.$$

En tenant compte des propriétés citées des fonctions $\psi^{(m)}(P)$ dans l'ensemble L' et des fonctions $v^{(m)}(X)$ dans l'ensemble $S - S_s$, nous con-

cluons, d'après le théorème connu d'Arzelà, qu'il existe une suite $\{k_m\}$ d'indices telle que les séries partielles

$$\{\psi^{(k_m)}(P)\}, \quad \{v^{(k_m)}(X)\}$$

soient uniformément convergentes, au sens habituel, pour $P \in L'$, resp. $X \in S - S_\varepsilon$. Nous pouvons donc faire correspondre à tout nombre positif ε un indice N_ε , tel qu'on ait

$$(100) \quad \sup_{P \in L} \left[\prod_{j=1}^n |PC_j|^{\beta+h_\varphi} |\psi^{(k_m)}(P) - \psi^{(k_s)}(P)| \right] < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\max_{\cdot} \sup_{X \in S - S_\varepsilon} \left[|XP_X|^\gamma \prod_{j=1}^n |XC_j|^{\beta+h_\varphi} |v^{(k_m)}(X) - v^{(k_s)}(X)| \right] < \frac{\varepsilon}{2}$$

si $m, s > N_\varepsilon$. En rapprochant les inégalités (96), (98) (100), nous concluons que

$$\|V^{(k_m)} - V^{(k_s)}\| < \varepsilon$$

si $m, s > N_\varepsilon$. Or, l'espace A étant complet, cette condition de Cauchy est à la fois nécessaire et suffisante pour la convergence de la suite partielle $\{V^{(k_m)}\}$ au sens de la norme (60). Le lemme 2 est donc démontré.

En s'appuyant sur les deux lemmes démontrés, nous concluons, d'après le théorème cité de Schauder, qu'il existe dans l'ensemble E au moins un point $U^* = [u_0^*, u_1^*, u_2^*, \varphi^*]$ invariant relativement à la transformation (63), donc donnant une solution du système (56) d'équations intégrales. En vertu des propriétés des potentiels généralisés (17) et (24), nous avons les relations

$$u_1^*(X) = \frac{\partial u_0^*}{\partial x_1}, \quad u_2^*(X) = \frac{\partial u_0^*}{\partial x_2}$$

en tout point $X(x_1, x_2)$ de l'ensemble S , donc les fonctions $u_0^*(X)$, $\varphi^*(P)$ vérifient le système d'équations intégrales-différentielles (53), (55).

Observons maintenant, en vertu des hypothèses (2), (5) et le théorème 5, que la fonction

$$\Phi(Y) = F_1[Y, u_0^*(Y), u_1^*(Y), u_2^*(Y)]$$

vérifie une condition de Hölder dans tout domaine fermé S^* situé à l'intérieur de l'ensemble S , donc, d'après le théorème 6, la fonction trouvée $u_0^*(Y)$ vérifie l'équation différentielle donnée (1) en tout point X de l'ensemble S . D'après l'équation (55) et le théorème 1, cette fonction et ses dérivées ont des valeurs limites qui vérifient la condition demandée (10) en tout point P sur L différent des points de discontinuité C_ν . En outre, en vertu du théorème 4, la fonction u_0^* vérifie la condition (13). Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant.

THÉOREME 7. *Si les conditions I-VII, précisées précédemment, sont vérifiées, si les constantes $M_F, M'_F, M_G, M'_G, M_g, k_G, k_g$ du problème sont suffisamment petites pour que les inégalités (75) soient vérifiées, il existe au moins une fonction $u(X)$ qui: 1) vérifie l'équation elliptique (1) en tout point X de l'ensemble S , 2) vérifie la condition limite aux dérivées tangentielles (10) en tout point $P \in L$, différent des points C_* , 3) vérifie la condition (13).*

Travaux cités

- [1] H. Poincaré, *Mécanique céleste, III*, Paris 1910.
- [2] B. Hvéddélidzé, *Sur le problème aux limites de Poincaré* (en russe), C. R. Acad. SSSR. 30 (1941), p. 195-198.
- [3] J. N. Vécoua, *Problèmes aux limites dans la théorie des équations elliptiques* (en russe), C. R. Ac. SSSR. 1940.
- [4] N. J. Muskhelishvili, *Singular integral equations*, Groningen, Holland, 1953, p. 210-234.
- [5] W. Pogorzelski, *Problème aux limites de Poincaré généralisé*, Ann. Pol. Mathem. 2 (1955), p. 257-270.
- [6] — *Problème aux limites aux dérivées tangentielles pour l'équation elliptique*, Bull. Acad. Pol. Sc., Sér. des sci. math., astr. et phys. 7 (1959), p. 205-212.
- [7] — *Problème aux limites aux dérivées tangentielles pour l'équation parabolique*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., Paris 1958, p. 19-35.
- [8] — *Sur la résolution du problème aux dérivées tangentielles pour l'équation parabolique par la méthode des approximations successives*, Ann. Pol. Mathem. 7 (1959), p. 93-112.
- [9] — *Problèmes aux limites discontinus dans la théorie des fonctions analytiques*, Bull. Ac. Pol. Sc., Sér. des sci. math., astr. et phys. 7 (1959), p. 311-317.
- [10] M. Gevrey, *Détermination et emploi des fonctions de Green*, Journal de Mathématiques, Paris 1930.
- [11] G. Giraud, *Sur le problème de Dirichlet généralisé*, Ann. Ec. Norm. Sup., Paris, 46 (1929), p. 131-245.
- [12] W. Pogorzelski, *Étude de la solution fondamentale de l'équation elliptique et des problèmes aux limites*, Ann. Pol. Mathem. 3 (1957), p. 247-284.
- [13] — *Propriétés des dérivées tangentielles d'une intégrale de l'équation elliptique*, Ann. Pol. Mathem. 7 (1960), p. 321-339.
- [14] — *Sur l'équation intégrale singulière et sur les propriétés d'une intégrale singulière*, Journal of Mathem. and Mechanics, Indiana Univ. 1958, p. 515-532.
- [15] — *Problèmes aux limites discontinus dans la théorie des fonctions analytiques*, Bull. Acad. Pol. Sc., Sér. des sci. math., astr. et phys., 7 (1959), p. 711-714.
- [16] — *Sur une propriété principale d'une classe $\mathcal{S}$ de fonctions discontinues pour le système d'arcs*, Bull. Acad. Pol. Sc., Sér. des sci. math., astr. et phys. 8 (1960), p. 359-364.
- [17] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Mathematica 2 (1930), p. 171-180.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 18. 5. 1960