Wir wollen noch ein weiteres Beispiel betrachten. Es seien $a_1, \ldots, a_s$ aus einem reellen algebraischen Zahlkörper k vom Grad $s+1$ und es seien $1, a_1, \ldots, a_s$ linear unabhängig, so gilt bekanntlich für alle ganzen $(h_1, \ldots, h_s) \neq (0, \ldots, 0)$, $\|h\| = \operatorname{Max}(|h_1|, \ldots, |h_s|)$

$$\{h_1 a_1 + \ldots + h_s a_s\} \geqslant c(K)\, \|h\|^{-s}, \qquad \{a\} = \inf_h |a-h|.$$

Wir nehmen jetzt wieder das zweite Beispiel und wählen für die g_i, die Zahlen $\{a_i p\}$, dann folgt sofort, daß wir stets haben $M_1' \geqslant cp^{1/(s+1)}$, denn es gilt ja für $\|h\| \neq 0$ mit $h_1 g_1 + \ldots + h_s g_s \equiv 0 \pmod p$

$$c(k)p\,\|h\|^{-s} \leqslant |p(h_1 a_1 + \ldots + h_s a_s) - (h_1 g_1 + \ldots + h_s g_s)|$$
$$\leqslant |h_1| + \ldots + |h_s| \leqslant s\,\|h\|,$$

also

$$\|I - f\| \leqslant c(k)\big(200 s^2 (1 + \log p)\big)^s / p^{1/(s+1)} \tag{35}$$

wenn in (34), (35) f die Bedingung (32) erfüllt.

Literaturverzeichnis

[1] C. L. Siegel, Math. Annalen 87.
[2] L. J. Mordell, Math. Annalen 102.
[3] I. P. Natanson, *Konstruktive Funktionentheorie*, Berlin 1955, S. 389 ff.
[4] E. Hlawka, Monatshefte f. Mathem. 66, S. 140-151.

Reçu par la Rédaction le 2. 1. 1964

ACTA ARITHMETICA
IX (1964)

Zur Gitterpunktlehre von mehrdimensionalen Ellipsoiden

von

V. Jarník (Praha)

Es sei $Q(u) = Q(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ eine positiv definite quadratische Form. Wenn es ein $a > 0$ gibt, so daß $Q(u) = aQ_1(u)$ ist, wo Q_1 ganze Koeffizienten hat, so heiße die Form Q rational, sonst irrational. Für $x > 0$ sei $A(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte im Ellipsoid $Q(u) \leqslant x$; $V(x) = V(1)x^{r/2}$ sei das Volumen dieses Ellipsoids, und man setze $P(x) = A(x) - V(x)$. Für jede Form Q ist

$$P(x) = \Omega(x^{(r-1)/4})$$

(vgl. [1]). Für rationale Q und $r > 4$ ist die definitive Größenordnung von P bekannt:

$$P(x) = O(x^{r/2-1}), \qquad P(x) = \Omega(x^{r/2-1})$$

(vgl. [2], [3]). Weiter betrachten wir nur irrationale Formen der speziellen Gestalt

$$\begin{gathered} Q(u) = a_1(u_{1,1}^2 + u_{1,2}^2 + \ldots + u_{1,r_1}^2) + \ldots + a_\tau(u_{\tau,1}^2 + \ldots + u_{\tau,r_\tau}^2), \\ a_j > 0, \quad r_j > 0, \quad r_1 + \ldots + r_\tau = r > 4, \quad \tau \geqslant 2. \end{gathered} \tag{1}$$

Für diese irrationalen Formen gilt $P(x) = o(x^{r/2-1})$ (vgl. [4], [5], [6]) und diese Abschätzung läßt sich nicht verschärfen, solange man alle irrationalen Formen der Gestalt (1) zuläßt (vgl. [4]). Es gilt aber

Satz 1. *Für fast alle Systeme* $(a_1, \ldots, a_\tau)$ *von positiven Zahlen (im Sinne des Lebesgueschen Massbegriffes) und für jedes* $\varepsilon > 0$ *gilt* (vgl. [7])

$$P(x) = O(x^{r/2-\lambda+\varepsilon}) \qquad (r > 4, \tau \geqslant 2), \tag{2}$$

wo

$$\lambda = \sum_{j=1}^{\tau} \operatorname{Min}(1, \tfrac{1}{4} r_j). \tag{3}$$

Mann sieht, daß immer $\lambda > 1$ ist. Übrigens läßt sich x^ε durch eine Potenz von $\log x$ ersetzen. Hier sind zwei Fälle besonders interessant: Sind alle $r_j \leqslant 4$, so lautet (2)

$$P(x) = O(x^{r/4+\varepsilon});$$

sind dagegen alle $r_j \geqslant 4$, so lautet (2)

$$P(x) = O(x^{r/2-\tau+\varepsilon}). \tag{4}$$

Diese letzte Formel ist darum interessant, weil stets

$$P(x) = \Omega(x^{r/2-\tau})$$

ist (vgl. [8]). Im Fall

$$\tau = 2, \quad r_1 \geqslant 4, \quad r_2 \geqslant 4 \tag{5}$$

kann man noch genau diejenigen α_1, α_2 angeben, für welche (4) für jedes $\varepsilon > 0$ gilt. Es sei nämlich A die Menge aller Zahlenpaare (α_1, α_2) $(\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0)$, welche folgende Eigenschaft haben: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\Gamma_\varepsilon > 0$, sodaß für alle ganzen p, q mit $q > 0$ die Ungleichung

$$\left| q\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - p \right| > \frac{\Gamma_\varepsilon}{q^{1+\varepsilon}}$$

gilt. Aus $(\alpha_1, \alpha_2) \epsilon A$ folgt offenbar $(\alpha_2, \alpha_1) \epsilon A$ und es ist bekannt (und sehr leicht zu beweisen), daß fast alle positiven Zahlenpaare in A liegen. Und es gilt folgender

Satz 2. *Gilt* (5), *so gilt* (4) *dann und nur dann für jedes* $\varepsilon > 0$, *wenn* $(\alpha_1, \alpha_2) \epsilon A$ (vgl. [9]).

Übrigens kennt man im Fall (5) noch viel mehr: man kann die Größenordnung von $P(x)$ für jedes Paar α_1, α_2 genau bestimmen, wenn man weiss, wie gut sich $\alpha_1\alpha_2^{-1}$ durch rationale Zahlen annähern läßt (vgl. [9], [10]).

Der Fall $\tau > 2$ ist natürlich prinzipiell viel schwieriger zu behandeln (es handelt sich um mindestens zwei Zahlen $\alpha_1\alpha_2^{-1}, \alpha_1\alpha_3^{-1}$). In dieser Note werde ich für $\tau > 2$ folgenden Satz beweisen, der im Spezialfall $r_j \geqslant 4$ als eine Verallgemeinerung der ersten Hälfte („dann") des Satzes 2 angesehen werden kann:

Satz 3. *Es sei* $r_1 + r_2 + \ldots + r_\tau = r > 4$, $\tau > 2$, $r_j > 0$ *ganz. Es sei* $(\alpha_1, \alpha_2) \epsilon A$. *Dann gilt für fast alle Systeme* $(\alpha_3, \ldots, \alpha_\tau)$ *von positiven Zahlen* α_j *und für jedes* $\varepsilon > 0$ *die Formel* (2), *wo* Q *die Form* (1) *bedeutet.*

Da A fast alle Paare positiver Zahlen enthält, so ist Satz 1 eine Folge des Satzes 3. Ich bemerke noch, daß sich die erwähnten Resultate samt Beweisen unmittelbar auf etwas allgemeinere Formen

$$\alpha_1 Q_1(u_{1,1}, \ldots, u_{1,r_1}) + \ldots + \alpha_\tau Q_\tau(u_{\tau,1}, \ldots, u_{\tau,r_\tau})$$

übertragen lassen, wo α_j positive Zahlen und Q_j positiv definite quadratische Formen mit ganzen Koeffizienten sind.

§ 1. Metrische Hilfssätze. Im folgenden seien sieben Zahlen τ, $\alpha_1, \alpha_2, C, D, \varepsilon, a$ gegeben: $\tau \geqslant 3$ ganz, $(\alpha_1, \alpha_2) \epsilon A$, $0 < C < \mathrm{Min}(\alpha_1, \alpha_2)$, $D > \mathrm{Max}(\alpha_1, \alpha_2)$, $\varepsilon > 0$, $a > 0$.

Mit c (meistens ohne Indizes) bezeichnen wir positive Zahlen, die nur von den sieben angegebenen Zahlen abhängen (sodaß z.B. $3c + 2c = c$); mit μ bezeichnen wir komplexe Zahlen, die von beliebigen Parametern abhängen dürfen, dem absoluten Betrage nach aber höchstens gleich 1 sind. Um komplizierte Exponenten zu vermeiden, schreiben wir gelegentlich

$$2^m = \exp(m).$$

Wir betrachten Systeme

$$\{h_1, \ldots, h_\tau;\ k_1, \ldots, k_\tau;\ n_1, \ldots, n_\tau;\ \varrho\} = \{h;\ k;\ n;\ \varrho\} \tag{6}$$

von ganzen Zahlen $h_j > 0$, $n_j \geqslant 0$, $\varrho \geqslant 0$, $0 < k_j < 2^{\varrho+1}$. Für jedes solche System sei

$$M(h;\ k;\ n;\ \varrho) \tag{7}$$

die Menge aller Punkte $\alpha = (\alpha_3, \ldots, \alpha_\tau)$ des Würfels

$$C < \alpha_j < D \quad (j = 3, \ldots, \tau),$$

zu welchen es mindestens ein reelles t gibt, für welches

$$\left| t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\cdot\frac{h_j}{k_j} \right| < \frac{a}{k_j 2^{n_j+\varrho}} \quad (j = 1, \ldots, \tau) \tag{8}$$

gilt. Sind $l, m_1, \ldots, m_\tau$ ganze nichtnegative Zahlen mit $m_j \leqslant \varrho$, so sagen wir, daß das System (6) und ebenso die Menge (7) zur Klasse

$$[l;\ m_1, \ldots, m_\tau;\ n_1, \ldots, n_\tau;\ \varrho] = [l;\ m;\ n;\ \varrho] \tag{9}$$

gehören, wenn $2^l \leqslant h_1 < 2^{l+1}$, $2^{m_j} \leqslant k_j < 2^{m_j+1}$ $(j = 1, 2, \ldots, \tau)$. Es sei

$$N(l;\ m;\ n;\ \varrho;\ \alpha) \tag{10}$$

die Anzahl derjenigen Mengen (7) der Klasse (9), welche den Punkt $\alpha = (\alpha_3, \ldots, \alpha_\tau)$ enthalten. Unser Ziel ist eine Abschätzung von (10) zu finden, die für fast alle $\alpha = (\alpha_3, \ldots, \alpha_\tau)$ unseres Würfels $C < \alpha_j < D$ gilt. Dabei beschränken wir uns auf solche Klassen (9), für welche gilt:

$$2^{m_1+n_1} \geqslant 2^{m_2+n_2}, \tag{11}$$

$$2^{m_3+n_3} \geqslant 2^{m_4+n_4} \geqslant \ldots \geqslant 2^{m_\tau+n_\tau}. \tag{12}$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

I. $2^{m_1+n_1} \geqslant 2^{m_3+n_3}$; II. $2^{m_1+n_1} < 2^{m_3+n_3}$.

Fall I. Soll ein Punkt $\alpha = (\alpha_3, \ldots, \alpha_\tau)$ in der Menge (7) der Klasse (9) im Fall I liegen, so muß

$$\left| \frac{1}{\alpha_1}\cdot\frac{h_1}{k_1} - \frac{1}{\alpha_j}\cdot\frac{h_j}{k_j} \right| < \frac{c}{2^{m_j+n_j+\varrho}} \quad (j = 2, \ldots, \tau) \tag{13}$$

sein. Daraus folgt

$$c2^{l-m_1} < \frac{h_j}{k_j} < c2^{l-m_1} \tag{14}$$

für $\varrho > c_1$; weiter sei stets $\varrho > c_1$. Für $j = 2$ folgt aus (13) (wegen $(\alpha_1, \alpha_2) \epsilon A$)

$$c\exp\left(-(l+m_2)\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) < \left|h_1 k_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} h_2 k_1\right| < c\exp(m_1 - n_2 - \varrho). \tag{15}$$

Bei vorgegebenem $h_2 k_1$ hat man also höchstens c Möglichkeiten für $h_1 k_2$. Sind a, b, a', b' ganz und positiv, $b' \neq b$, $\mathrm{Max}(b, b') < c\exp(l+m_2)$, so ist

$$\left|a' - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} b' - \left(a - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} b\right)\right| > c\exp\left(-(l+m_2)\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right),$$

da $(\alpha_1, \alpha_2) \epsilon A$. Aus (15) folgt also, daß es für die Zahl $h_2 k_1$ höchstens

$$c\left(1+\exp\left(m_1 - n_2 - \varrho + l + m_2 + \tfrac{1}{2}\varepsilon(l+m_2)\right)\right)$$

Möglichkeiten gibt, und hier darf man noch wegen (15) den Summanden 1 weglassen. Da die Anzahl der Teiler einer natürlicher Zahl m gleich $O(m^\eta)$ für jedes $\eta > 0$ ist, so hat (15)

$$\mu c \exp(m_1 - n_2 - \varrho + l + m_2 + \varepsilon l + \varepsilon m_2) \tag{16}$$

Lösungen in zulässigen h_1, k_1, h_2, k_2. Für jedes solche Quadrupel und für beliebig vorgegebene $h_3, k_3, \ldots, h_\tau, k_\tau$ mit $2^{m_j} \leqslant k_j < 2^{m_j+1}$ hat die Menge der Punkte $\alpha = (\alpha_3, \ldots, \alpha_\tau)$ des Würfels $C < \alpha_j < D$, welche den Ungleichungen (13) für $j = 3, \ldots, \tau$ genügen, das Maß

$$\mu c \prod_{j=3}^{\tau} \exp(m_1 - m_j - n_j - \varrho - l). \tag{17}$$

Dabei ist nach (14) $h_j < c\exp(l + m_j - m_1)$. Die Summe der Masse aller nichtleeren Mengen (7) der Klasse (9) ist also gleich dem Produkt von (16), (17) und von

$$\mu c \prod_{j=3}^{\tau} \exp(l + 2m_j - m_1),$$

d.h. gleich $\mu c F(l;\ m;\ n;\ \varrho)$, wo

$$F(l;\ m;\ n;\ \varrho) = \exp\left(-(\tau-1)\varrho + \varepsilon(l+m_2) + l + m_1\right) \prod_{j=2}^{\tau} \exp(m_j - n_j). \tag{18}$$

Das Maß der Menge derjenigen $\alpha = (\alpha_3, \ldots, \alpha_\tau)$, für welche

$$\begin{aligned} &N(l;\ m;\ n;\ \varrho;\ \alpha) \\ &\quad > F(l;\ m;\ n;\ \varrho)\exp\left(\varepsilon(l + m_1 + \ldots + m_\tau + n_1 + \ldots + n_\tau + \varrho)\right) \end{aligned} \tag{19}$$

ist, ist also gleich

$$\mu c \exp\left(-\varepsilon(l + m_1 + \ldots + m_\tau + n_1 + \ldots + n_\tau + \varrho)\right).$$

Summiert man diesen Ausdruck über $l, m_1, \ldots, m_\tau, n_1, \ldots, n_\tau, \varrho$, so bekommt man eine konvergente Reihe. Also gilt: Die Menge derjenigen Punkte α, für welche die Ungleichung (19) für unendlichviele Klassen $[l;\ m;\ n;\ \varrho]$ gilt, hat das Maß Null. Daraus folgt insbesondere

Hilfssatz 1. *Fast alle* $\alpha = (\alpha_3, \ldots, \alpha_\tau)$ *des Würfels* $C < \alpha_j < D$ *haben folgende Eigenschaft: Es gibt eine (von* $\alpha_3, \ldots, \alpha_\tau$ *abhängige) Zahl* $\varrho_0 > 0$, *sodaß für alle Klassen* $[l;\ m;\ n;\ \varrho]$ *des Falles I mit* $\varrho > \varrho_0$ *folgende Ungleichung gilt:*

$$\begin{aligned} &N(l;\ m;\ n;\ \varrho;\ \alpha) \\ &\quad \leqslant F(l;\ m;\ n;\ \varrho)\exp\left(\varepsilon(l + m_1 + \ldots + m_\tau + n_1 + \ldots + n_\tau + \varrho)\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Fall II. Soll ein Punkt $\alpha = (\alpha_3, \ldots, \alpha_\tau)$ in der Menge (7) der Klasse (9) liegen, so muß wegen (8), (11) wieder (15) gelten; die Anzahl der zugehörigen Quadrupel h_1, k_1, h_2, k_2 ist wieder gleich (16). Für jedes solche Quadrupel muß weiter

$$\left|\frac{1}{\alpha_3}\cdot\frac{h_3}{k_3} - \frac{1}{\alpha_1}\cdot\frac{h_1}{k_1}\right| < c\exp(-m_1 - n_1 - \varrho)$$

sein, was bei gegebenen h_3, k_3 ein Intervall der Länge $\mu c\exp(-l - n_1 - \varrho)$ für α_3 liefert. Bei festem α_3 und festen $h_3, k_3, h_4, k_4, \ldots, h_\tau, k_\tau$ muß (wenn $\tau > 3$) weiter gelten:

$$\left|\frac{1}{\alpha_j}\cdot\frac{h_j}{k_j} - \frac{1}{\alpha_3}\cdot\frac{h_3}{k_3}\right| < c\exp(-m_j - n_j - \varrho) \quad (j = 4, \ldots, \tau),$$

was ein $(\tau-3)$-dimensionales Intervall vom Inhalt

$$\mu c \prod_{j=4}^{\tau} \exp(m_1 - m_j - n_j - \varrho - l)$$

gibt (vgl. (14)). Da die Anzahl der zulässigen Systeme $h_3, k_3, \ldots, h_\tau, k_\tau$ gleich

$$\mu c \prod_{j=3}^{\tau} \exp(2m_j + l - m_1)$$

ist, so ist die Summe der Masse aller nichtleeren Mengen (7) der Klasse (9) gleich $\mu c G(l;\ m;\ n;\ \varrho)$, wo

$$\begin{aligned} &G(l;\ m;\ n;\ \varrho) \\ &\quad = \exp\left(-\varrho(\tau-1) + l + m_2 + \varepsilon(l+m_2) - n_1 - n_2 + 2m_3\right) \prod_{j=4}^{\tau} \exp(m_j - n_j). \end{aligned} \tag{21}$$

Daraus folgt wie im Fall I der

Hilfssatz 2. *Fast alle $\alpha=(\alpha_3,\ldots,\alpha_\tau)$ des Würfels $C<\alpha_j<D$ haben folgende Eigenschaft: Es gibt eine (von $\alpha_3,\ldots,\alpha_\tau$ abhängige) Zahl $\varrho_0>0$, sodaß für alle Klassen $[l;\,m;\,n;\,\varrho]$ des Falles II mit $\varrho>\varrho_0$ die Ungleichung gilt:*

$$(22)\qquad N(l;m;n;\varrho;\alpha) \leqslant G(l;m;n;\varrho)\exp\big(\varepsilon(l+m_1+\ldots+m_\tau+n_1+\ldots+n_\tau+\varrho)\big).$$

Bemerkung. Man beachte, daß

$$G(l;\,m;\,n;\,\varrho)\exp(-m_3-n_3)=F(l;m;n;\varrho)\exp(-m_1-n_1).$$

§ 2. Beweis des Satzes 3. In [11] wurde für die Form (1) folgende Formel bewiesen (S. 228 oben):

Es sei

$$B=\operatorname*{Max}_{1\leqslant j\leqslant\tau}\frac{2\pi}{\alpha_j},\qquad \theta(s)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{-m^2s}\quad\text{für}\quad \operatorname{Re}s>0;$$

$z=z(x)$ sei eine für $x>1$ definierte Funktion, $0<z(x)\leqslant 1$. Dann ist

$$P(x)=O\Bigg(x^{r/4}+x^{r/2-1}z+\frac{1}{z}\Bigg|\int\limits_{\frac{1}{x}+i\frac{B}{\sqrt{x}}}^{1/x+i\infty}\prod_{j=1}^{\tau}\theta^{r_j}(\alpha_js)e^{xs}(e^{zs}-1)\frac{ds}{s^2}\Bigg|+ \frac{1}{z}\Bigg|\int\limits_{\frac{1}{x}+i\frac{B}{\sqrt{x}}}^{1/x+i\infty}\prod_{j=1}^{\tau}\theta^{r_j}(\alpha_js)e^{xs}(e^{-zs}-1)\frac{ds}{s^2}\Bigg|\Bigg).$$

Wird $s=1/x+it$ gesetzt ($x>1$), so ist auf unserem Integrationsintervall

$$|e^{\pm zs}-1|\leqslant K\operatorname{Min}(1,zt),$$

sobald $x^{-1}<Bx^{-1/2}$ ist; dabei ist K eine absolute Konstante (vgl. die Rechnungen in [11], S. 230, Mitte). Es ist also

$$(23)\qquad P(x)=O\big(x^{r/4}+x^{r/2-1}z+R(x)\big),$$

wo

$$(24)\qquad R(x)=\int\limits_{\frac{B}{\sqrt{x}}}^{+\infty}\prod_{j=1}^{\tau}\big|\theta^{r_j}(\alpha_js)\big|\operatorname{Min}\Big(\frac{1}{z},t\Big)\frac{dt}{t^2}.$$

Im folgenden seien α_1,α_2 mit $(\alpha_1,\alpha_2)\in A$ und drei Zahlen C,D,ε mit $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, $0<C<\operatorname{Min}(\alpha_1,\alpha_2)$, $D>\operatorname{Max}(\alpha_1,\alpha_2)$ fest gegeben. Man setze noch $z(x)=x^{-r/2}$ für $x>1$. Wir werden zeigen: Für fast alle Punkte $\alpha=(\alpha_3,\ldots,\alpha_\tau)$ des Würfels $C<\alpha_j<D$ ist

$$(25)\qquad R_\alpha(x)=O\big(x^{r/2-\lambda+(r+2\tau+2)\varepsilon}\big)$$

(wir schreiben R_α statt R). Indem man ε, C, D drei Folgen $\varepsilon_n\to 0$, $C_n\to 0$, $D_n\to+\infty$ durchlaufen lässt, bekommt man aus (25) den Satz 3.

Bei gegebenem $\alpha=(\alpha_3,\ldots,\alpha_\tau)$ teilen wir das Intervall $(Bx^{-\frac{1}{2}},+\infty)$, wo $x>1$, in folgender Weise.

Ist $x>1$, so bilde man alle Fareybrüche h/k (h,k ganz und teilerfremd, $1\leqslant k\leqslant\sqrt{x}$). Zwei Fareybrüche (und ebenso zwei Medianten) heißen benachbart, wenn zwischen ihnen kein Fareypunkt (bzw. keine Mediante) liegt. Dabei bezeichne ich als Medianten alle Brüche $(h+h')/(k+k')$, wo h/k, h'/k' zwei benachbarte Fareybrüche sind. Mit $F_x(h,k)$ bezeichne ich das abgeschlossene Intervall, welches den Fareypunkt h/k enthält und zu Endpunkten zwei benachbarte Medianten hat. Bekanntlich ist

$$(26)\qquad F_x(h,k)=\Big[\frac{h}{k}-\frac{\vartheta'}{k\sqrt{x}},\ \frac{h}{k}+\frac{\vartheta''}{k\sqrt{x}}\Big],$$

wo $\frac{1}{2}\leqslant\vartheta'\leqslant 1$, $\frac{1}{2}\leqslant\vartheta''\leqslant 1$. Ist M eine Menge von Zahlen, δ eine Zahl, so bedeute δM die Menge aller Zahlen δm mit $m\in M$. Bei jedem j ($j=1,2,\ldots,\tau$) überdecken die Intervalle $\dfrac{2\pi}{\alpha_j}F_x(h,k)$ mit $h>0$ wegen (26) das ganze Integrationsintervall $(Bx^{-\frac{1}{2}},+\infty)$, da $F_x(0,1)\subset[-x^{-\frac{1}{2}},x^{-\frac{1}{2}}]$. Bei gegebenem $x>1$ definiere man die ganze Zahl $\varrho\geqslant 0$ durch $2^\varrho\leqslant x<2^{\varrho+1}$. Für ein gegebenes System von ganzen Zahlen

$$h_1,\ldots,h_\tau;\ k_1,\ldots,k_\tau;\ n_1,\ldots,n_\tau$$

mit

$$h_j>0,\qquad 0<k_j\leqslant\sqrt{x},\qquad (h_j,k_j)=1,\qquad n_j\geqslant 0$$

sei

$$(27)\qquad T\{h;\,k;\,n;\,x;\,\alpha\}$$

die Menge derjenigen $t>Bx^{-\frac{1}{2}}$, für welche

$$t\in\frac{2\pi}{\alpha_j}F_x(h_j,k_j),\qquad \frac{2\pi}{\alpha_j}\cdot\frac{1}{k_j2^{n_j+1}\sqrt{x}}<\Big|t-\frac{2\pi}{\alpha_j}\cdot\frac{h_j}{k_j}\Big|\leqslant\frac{2\pi}{\alpha_j}\cdot\frac{1}{k_j2^{n_j}\sqrt{x}}$$

für $j=1,2,\ldots,\tau$ gilt. Wegen (26) überdecken die Mengen (27) vollständig das Intervall $(Bx^{-\frac{1}{2}},+\infty)$, mit Ausnahme von abzählbarvielen Punkten $2\pi\alpha_j^{-1}h_jk_j^{-1}$. Um also $R_\alpha(x)$ abzuschätzen, genügt es, die Beiträge der einzelnen Mengen (27) zum Integral (24) abzuschätzen.

Aus Symmetriegründen genügt es diejenigen Mengen (27) zu betrachten, für welche

$$2^{n_1}k_1 \geqslant 2^{n_2}k_2, \tag{28}$$

$$2^{n_3}k_3 \geqslant 2^{n_4}k_4 \geqslant \ldots \geqslant 2^{n_\tau}k_\tau \tag{29}$$

ist. Wir wollen sagen, daß die Menge (27) zur Klasse $[l; m; n; \varrho]$ (siehe (9)) gehört, wenn $2^l \leqslant h_1 < 2^{l+1}$, $2^{m_j} \leqslant k_j < 2^{m_j+1} (j = 1, 2, \ldots, \tau)$. Aus (28), (29) folgt (11), (12). Auf der Menge (27) der Klasse (9) ist

$$c2^{l-m_1} < t < c2^{l-m_1}, \tag{30}$$

$$\theta\left(a_j\left(\frac{1}{x} + it\right)\right) = \mu c \operatorname{Min}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}m_j}}, x^{\frac{1}{4}}2^{\frac{1}{2}n_j}\right) \tag{31}$$

(vgl. [11], S. 245, Punkt II).

Das Maß der Menge (27) ist

$$\mu c \exp(-m_1 - n_1 - \varrho) \quad \text{im Fall I aus § 1,} \tag{32}$$

$$\mu c \exp(-m_3 - n_3 - \varrho) \quad \text{im Fall II.} \tag{33}$$

Ist nun die Menge (27) nicht leer, so gibt es ein reelles t, für welches (8) mit $a = 2\pi C^{-1}$ gilt, d.h. bei dieser Wahl von a ist $a \epsilon M(h; k; n; \varrho)$ (vgl. § 1), sodaß die Anzahl der nichtleeren Mengen (27) der Klasse (9) höchstens gleich $N(l; m; n; \varrho; a)$ (vgl. (10)) ist. Nach den Hilfsätzen 1, 2 ist für fast alle Punkte $a = (a_3, \ldots, a_\tau)$ des Würfels $C < a_j < D$ die Ungleichung (20) bzw. (22) erfüllt, sobald ϱ, also x, hinreichend groß ist. Man wähle ein solches a; dann ist also der Beitrag aller Mengen (27) der Klasse (9) zum Integral (24) im Falle I gleich (um größere Symmetrie zu erreichen, vergrößere ich an einigen Stellen ε zu 2ε und benutze gleich die Beziehung $c2^\varrho < \sqrt{x} < c2^{\varrho+1}$)

$$\mu c \operatorname{Min}\left(\frac{1}{z}, 2^{l-m_1}\right) 2^{2m_1-2l} \prod_{j=1}^{\tau} \operatorname{Min}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}r_j}}{2^{\frac{1}{2}m_j r_j}}, x^{\frac{1}{4}r_j} 2^{\frac{1}{2}n_j r_j}\right) \times \tag{34}$$
$$\times 2^{-m_1-n_1} x^{-\frac{1}{2}} F(l; m; n; \varrho) \exp\big(\varepsilon(l + m_1 + \ldots + m_\tau + n_1 + \ldots + n_\tau + \varrho)\big).$$

Handelt es sich um die Mengen (27) einer Klasse (9) des Falles II, so bekommt man dieselbe Abschätzung. Das sieht man sofort, wenn man (32) mit (33) vergleicht und die Bemerkung am Schluß des § 1 berücksichtigt. Diesen Ausdruck soll man nun über $2^l \geqslant 1$, $2^{n_j} \geqslant 1$, $1 \leqslant 2^{m_j} \leqslant \sqrt{x}$ summieren. Man bekommt zunächst

$$\sum_l \operatorname{Min}\left(\frac{1}{z}, 2^{l-m_1}\right) 2^{-l(1-2\varepsilon)+m_1} = \mu c 2^{2\varepsilon m_1} z^{-2\varepsilon} = \mu c x^{\varepsilon(r+1)}.$$

Die Summation über m_j, n_j teilen wir in zwei Schritte:

$$\sum_{2^{m_j+n_j} \leqslant \sqrt{x}} x^{\frac{1}{4}r_j} \exp\big(m_j(1+2\varepsilon) + n_j(\tfrac{1}{2}r_j - 1 + 2\varepsilon)\big) = \mu c \sum_{2^{n_j} \leqslant \sqrt{x}} x^{\frac{1}{4}r_j + \frac{1}{2} + \varepsilon} \exp\big(n_j(\tfrac{1}{2}r_j - 2)\big),$$

$$\sum_{\substack{2^{m_j+n_j} > \sqrt{x} \\ 2^{m_j} \leqslant \sqrt{x}}} x^{\frac{1}{2}r_j} \exp\big(m_j(1 - \tfrac{1}{2}r_j + 2\varepsilon) - n_j(1 - 2\varepsilon)\big) = \mu c \sum_{2^{m_j} \leqslant \sqrt{x}} x^{\frac{1}{2}r_j - \frac{1}{2} + \varepsilon} \exp\big(m_j(2 - \tfrac{1}{2}r_j)\big).$$

Beides gibt $\mu c x^{\frac{1}{4}r_j + \frac{1}{2} + \varepsilon}$ für $r_j < 4$ und $\mu c x^{\frac{1}{2}r_j - \frac{1}{2} + 2\varepsilon}$ für $r_j \geqslant 4$. Dazu kommt in (34) noch der Faktor $x^{-\frac{1}{2}\tau + \varepsilon}$. Im ganzen bekommt man also für (34) die Abschätzung

$$O(x^{\frac{1}{2}r - \lambda + (r + 2\tau + 2)\varepsilon}), \quad \text{w.z.b.w.}$$

Literaturverzeichnis

[1] E. Landau, *Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen*, vierte Abhandlung, Göttinger Nachrichten 1924, S. 137-150.

[2] A. Walfisz, *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*, Math. Zeitschr. 19 (1924), S. 300-307.

[3] E. Landau, *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*, I. u. II. Abhandlung, Math. Zeitschr. 21 (1924), S. 126-132 und 24 (1926), S. 299-310.

[4] A. Walfisz, *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*, III. Abhandlung, Math. Zeitschr. 27 (1928), S. 245-268.

[5] V. Jarník, *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*, II. Abhandlung, Math. Ann. 101 (1929), S. 136-146.

[6] V. Jarník und A. Walfisz, *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*, Math. Zeitschr. 32 (1930), S. 152-160.

[7] V. Jarník, *Sur les points à coordonnées entières dans les ellipsoides à plusieurs dimensions*, Bull. internat. de l'Académie des Sciences de Bohême, 1928, 10 Seiten.

[8] — *Über Gitterpunkte im mehrdimensionalen Ellipsoiden*, Math. Ann. 100 (1928), S. 699-721.

[9] — *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*, Tôhoku Math. Journ. 30 (1929), S. 354-371.

[10] — *Zur Gitterpunktlehre der Ellipsoide* $a_1(u_1^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + a_2(u_{r_1+1}^2 + \ldots + u_r^2) \leqslant x$, I. Abh. Věstník král. české spol. nauk 1940, S. 1-63; II. Abh. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 70 (1940), S. 1-33.

[11] — *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden; eine Anwendung des Hausdorffschen Massbegriffes*, Math. Zeitschr. 38 (1934), S. 217-256.

Reçu par la Rédaction le 4. 1. 1964