Proof. Assume 3 solutions:

$$x = x_m, \quad y = y_m \quad (1 \leqslant m \leqslant 3).$$

Substituting in (1), and eliminating a, b, c we get

$$\begin{vmatrix} x_1^n & y_1^n & 1 \\ x_2^n & y_2^n & 1 \\ x_3^n & y_3^n & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

which is impossible for $n \geqslant 7$ by Conjecture C, q.e.d.

Reçu par la Rédaction le 7. 2. 1964

ACTA ARITHMETICA
IX (1964)

Über den Klassenkörper zum quadratischen Zahlkörper mit der Diskriminante −47

von

H. Hasse (Hamburg)

Prof. L. J. Mordell
zum 75. Geburtstag gewidmet

Unter den imaginär-quadratischen Zahlkörpern $\mathbf{\Omega} = \mathbf{P}(\sqrt{d})$ mit Primzahldiskriminanten $d = -p$ $(\equiv 1 \bmod 4)$ und dann ungerader Klassenzahl h sind die ersten Fälle mit $h > 1$ bekanntlich:

$$d = -23 \quad \text{mit} \quad h = 3,$$
$$d = -31 \quad \text{mit} \quad h = 3,$$
$$d = -47 \quad \text{mit} \quad h = 5.$$

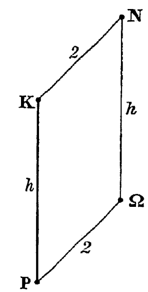

Fig. 1 [1]

Allgemein ist der Klassenkörper $\mathbf{N}$ von $\mathbf{\Omega}$ normal über dem rationalen Zahlkörper $\mathbf{P}$, mit Diedergruppe der Ordnung $2h$. Dem zyklischen Normalteiler der Ordnung h ist der quadratische Teilkörper $\mathbf{\Omega}$ zugeordnet. Für die h konjugierten Untergruppen der Ordnung 2 haben die zugeordneten Teilkörper $\mathbf{K}$ über $\mathbf{P}$ den Grad h, und einer von ihnen ist als der größte reelle Teilkörper von $\mathbf{N}$ gekennzeichnet.

Während es in den beiden Fällen $d = -23$ und $d = -31$ leicht ist, den so definierten Zahlkörper $\mathbf{K}$ vom Grade $h = 3$ explizit in einer arithmetisch-kanonischen Erzeugung anzugeben, ist diese Aufgabe im Falle $d = -47$, wo $\mathbf{K}$ den Grad 5 hat, bisher nur durch aus der Transformationstheorie der Modulfunktionen fließende Gleichungen (sogen. Modulargleichungen) gelöst,

[1] Die fette Linie deutet eine nicht-normale Erweiterung mit h verschiedenen Konjugierten an; die dünnen Linien stellen normale Erweiterungen dar. Entsprechendes gilt auch für die beiden späteren Figuren.

wobei die arithmetische Natur der Wurzeln innerhalb des Klassenkörpers **N** im Dunkeln bleibt (²).

Als mich vor einiger Zeit H. Koch (Berlin) fragte, ob man nicht ebenso einfach wie für $d = -23$ und $d = -31$ auch für $d = -47$ zum Ziele käme, glaubte ich zunächst, das ohne weiteres bejahen zu können. Bei näherem Zusehen zeigte es sich jedoch, daß für $d = -47$ ein erheblich größerer Aufwand erforderlich ist. Ich teile das Ergebnis meiner Bemühungen, in deren Endphase mich Kl. Alber (Hamburg) unterstützt hat, nachstehend mit. Dabei stütze ich mich auf die arithmetische Theorie der zyklischen biquadratischen Zahlkörper, wie ich sie in einer früheren Arbeit entwickelt habe (³), sowie auf gewisse Ergebnisse meiner Monographie über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper (⁴). Zuvor mache ich an den Beispielen $d = -23$ und $d = -31$ klar, welchen Typus von arithmetisch-kanonischer Erzeugung ich im Auge habe.

I. Die Fälle $d = -23$ und $d = -31$

Beide Fälle lassen sich gemeinsam behandeln; sie sind nur durch das Vorzeichen in

$$d = -27 \pm 4 = -3^3 \pm 2^2$$

voneinander geschieden. Im folgenden bezieht sich das obere bzw. untere Vorzeichen jeweils auf den Fall $d = -23$ bzw. -31.

A. Aufstieg zur Erzeugung von $\mathbf{N}^3/\mathbf{\Omega}^3$. Die zyklische Erweiterung 3-ten Grades $\mathbf{N}/\mathbf{\Omega}$ wird nach Adjunktion der 3-ten Einheitswurzeln (oberer Index 3) durch ein Radikal erzeugbar:

$$\mathbf{N}^3 = \mathbf{\Omega}^3(\sqrt[3]{\omega}),$$

(²) Siehe W. Weber, *Algebra III*, 2. Aufl., Braunschweig 1908, § 131, sowie R. Fricke, *Algebra III*, Braunschweig 1928, Kap. 5, § 4 (S. 492). Dort werden die Gleichungen

$$x^5 \qquad - x^3 - 2x^2 - 2x - 1 = 0,$$

bzw.

$$x^5 - x^4 + x^3 + \; x^2 - 2x + 1 = 0$$

als Resolventen der Klassengleichung für die Diskriminante $d = -47$ angegeben.

(³) H. Hasse, *Arithmetische Bestimmung von Grundeinheit und Klassenzahl in zyklischen kubischen und biquadratischen Zahlkörpern*, Abh. Deutsche Akad. Wiss. Berlin 1948, Nr. 2 (1950). Im folgenden zitiert mit GK.

(⁴) H. Hasse, *Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper*, Akad. Verlag, Berlin 1952. Im folgenden zitiert mit KAZ.

und zwar ist der Radikand ω eine singuläre 3-Primärzahl aus $\mathbf{\Omega}^3$, d.h. eine 3-te Divisorpotenzzahl, welche 3-primär (3-ter Potenzrest mod $3\sqrt{-3}$) ist; kurz:

$$\omega \underset{3}{\cong} 1, \qquad \omega \underset{3}{\equiv} 1 \bmod 3\sqrt{-3}.$$

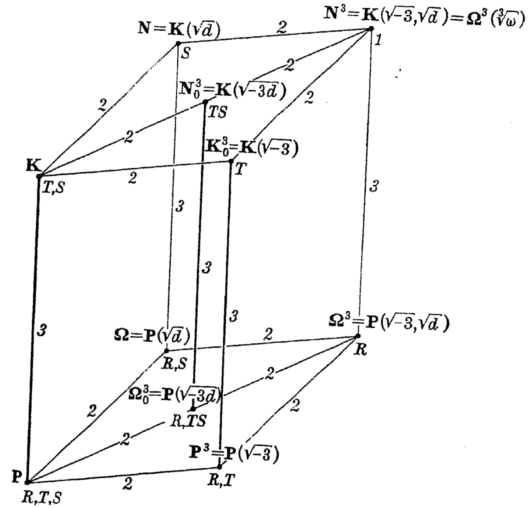

Fig. 2 (⁵)

Galoissche Gruppe erzeugt durch $R^3 = 1$, $T^2 = 1$, $T^{-1}RT = R^{-1}$, $S^2 = 1$, S vertauschbar mit R, T

	$\sqrt{-3}$	$\sqrt{d}$	$\sqrt{-3d}$	$\sqrt[3]{\omega}$
T	$+\sqrt{-3}$	$-\sqrt{d}$	$-\sqrt{-3d}$	$\sqrt[3]{\bar{\omega}'}$
S	$-\sqrt{-3}$	$+\sqrt{d}$	$-\sqrt{-3d}$	$\sqrt[3]{\omega'}$
TS	$-\sqrt{-3}$	$-\sqrt{d}$	$+\sqrt{-3d}$	$\sqrt[3]{\bar{\omega}}$
R	$\sqrt{-3}$	$\sqrt{d}$	$-3d$	$\varrho\sqrt[3]{\omega}$

(ϱ primitive 3-te Einheitswurzel)

(⁵) Die Erzeugenden der Invarianzuntergruppen sind jeweils unter den Bezeichnungen der Teilkörper angegeben. Hinsichtlich der fetten und dünnen Linien siehe Fußnote 1. Die Anwendung des Automorphismus S wird im folgenden zur Abkürzung mit einem Strich bezeichnet, die Anwendung des Automorphismus TS (Übergang zum konjugiert-komplexen) mit einem Querstrich.

Sie liegt, bis auf die Auswahl unter $\omega^{\pm 1}$, im Sinne $\underset{3}{=}$ (d.h. bis auf 3-te Zahlpotenzfaktoren) eindeutig fest.

Zur Ermittlung von ω werden zunächst Grundeinheit ε und Klassenzahl h des bizyklischen biquadratischen Zahlkörpers

$$\mathbf{\Omega}^3 = \mathbf{P}(\sqrt{-3},\ \sqrt{d})$$

bestimmt. Das kann nach KAZ, § 26 folgendermaßen geschehen.

Der reell-quadratische Teilkörper

$$\mathbf{\Omega}_0^3 = \mathbf{P}(\sqrt{-3d})$$

hat die Grundeinheit

$$\varepsilon_0 = \frac{(27 \mp 2) + 3\sqrt{-3d}}{2}$$

mit der Norm

$$N(\varepsilon_0) = 1$$

und die Klassenzahl

$$h_0 = 1.$$

Die beiden imaginär-quadratischen Teilkörper

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{P}(\sqrt{d}), \qquad \mathbf{P}^3 = \mathbf{P}(\sqrt{-3})$$

haben die Klassenzahlen

$$h_1 = 3, \qquad h_2 = 1.$$

Nach KAZ, § 26, (6)-(8) hat man nun allgemein

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_0, & \text{falls} \quad Q = 1, \\ \sqrt{-\varepsilon_0}, & \text{falls} \quad Q = 2, \end{cases}$$

und

$$h_1 = \tfrac{1}{2} Q h_0 h_1 h_2, \qquad h^* = \tfrac{1}{2} Q h_1 h_2,$$

wo Q den Einheitenindex und h die Relativklassenzahl von $\mathbf{\Omega}^3/\mathbf{\Omega}_0^3$ bedeuten. Der Einheitenindex ist definitionsgemäß

$$Q = \begin{Bmatrix} 1, & \text{falls} & -\varepsilon_0 \underset{2}{\neq} 1 \\ 2, & \text{falls} & -\varepsilon_0 \underset{2}{=} 1 \end{Bmatrix} \quad \text{in } \mathbf{\Omega}^3.$$

Schon weil die Relativklassenzahl h^* ganz ist (KAZ, §§ 19, 27), muß in den vorliegenden Fällen, wo ja $h^* = \frac{1}{2} Q \cdot 3$ ist, notwendig $Q = 2$ sein. Dies erkennt man folgendermaßen, ohne sich auf die ziemlich tiefliegende Ganzzahligkeit von h zu berufen, und gewinnt dabei gleichzeitig auch ε.

Das Kriterium (11_{I}) für $Q = 2$ aus KAZ, § 26, (12_{I}) ist hier erfüllt:

$$\mp\sqrt{-3}^{\,2} = \pm 3 = \alpha\alpha'$$

mit

$$\alpha = \frac{9 + \sqrt{-3d}}{2}$$

aus $\mathbf{\Omega}_0^3$. Weil die Primzahl 3 in $\mathbf{\Omega}_0^3$ verzweigt ist, hat man dabei

$$\alpha \cong \alpha', \qquad \text{also} \qquad \alpha \cong \sqrt{-3}.$$

Daher ist

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{\sqrt{-3}} = \frac{-3\sqrt{-3} + \sqrt{d}}{2}$$

eine Einheit aus $\mathbf{\Omega}^3$ mit

$$\varepsilon^2 = \frac{\alpha^2}{-3} = \frac{(-27 + d)/2 - 3\sqrt{-3d}}{2} = \frac{-(27 \mp 2) - 3\sqrt{-3d}}{2} = -\varepsilon_0.$$

Dies besagt aber, daß $Q = 2$ und ε die Grundeinheit von $\mathbf{\Omega}^3$ ist. Damit hat man dann

$$h = h^* = 3.$$

Nach der Klassenkörpertheorie gibt es demzufolge in $\mathbf{\Omega}^3$ überhaupt nur wesentlich **eine** singuläre 3-Primärzahl ω. Die beiden an ω zu stellenden Forderungen sind nun für die Grundeinheit ε erfüllt, die erste trivialerweise, weil sogar $\varepsilon \cong 1$ ist, die zweite im Hinblick auf

$$\varepsilon^{-1} \underset{3}{=} \varepsilon^2 = -\varepsilon_0 \equiv \frac{d \mp 2}{2} \equiv \pm 1 \underset{3}{\equiv} 1 \bmod 3\sqrt{-3}.$$

Demnach kann man

$$\omega = \varepsilon$$

normieren und hat somit für $\mathbf{N}^3/\mathbf{\Omega}^3$ die Erzeugung

$$\mathbf{N}^3 = \mathbf{\Omega}^3(\sqrt[3]{\varepsilon}).$$

Bemerkung. Man beachte, daß in den vorliegenden Fällen $d = -23$ und $d = -31$ die singuläre 3-Primärzahl ω **nicht**, wie man von vornherein vermuten sollte, durch Normierung der bereits in $\mathbf{\Omega}$ vorhandenen 3-ten Divisorpotenzzahl

$$w = \frac{(2 \pm 1) + \sqrt{d}}{2} \underset{3}{\cong} 1 \qquad \text{mit} \qquad N(w) = 2^3$$

mittels einer Einheit aus $\mathbf{\Omega}^3$ gebildet ist. Entsprechendes wird sich auch im nachher zu behandelnden Falle $d=-47$ herausstellen.

B. Abstieg zur Erzeugung von K/P. Für den vorliegenden Zweck ist es entscheidend, daß sich die singuläre 3-Primärzahl ω aus $\mathbf{\Omega}^3$ auch schon als Zahl aus dem größten reellen Teilkörper $\mathbf{\Omega}_0^3$ von $\mathbf{\Omega}^3$ normieren läßt. Das leistet entweder die bereits eben hervorgetretene Normierung

$$\omega^{-1} \underset{3}{\equiv} \varepsilon^2 \underset{3}{\equiv} \varepsilon_0 = \frac{(27\mp 2)+3\sqrt{-3d}}{2}$$

oder hier besser, weil — wie sich herausstellen wird — zu einer niederen Grundgleichung führend, die Normierung

$$\omega \underset{3}{\equiv} \frac{\varepsilon}{\sqrt{-3}^{\,3}} = \frac{\alpha}{9} = \frac{1}{9}\cdot\frac{9+\sqrt{-3d}}{2}.$$

Da das (reell verstandene) Radikal $\sqrt[3]{\alpha/9}$ bereits im größten reellen Teilkörper $\mathbf{N}_0^3$ von $\mathbf{N}^3$ liegt, hat man demnach für $\mathbf{N}_0^3/\mathbf{\Omega}_0^3$ die Erzeugung

$$\mathbf{N}_0^3 = \mathbf{\Omega}_0^3\left(\sqrt[3]{\frac{\alpha}{9}}\right).$$

Beim erzeugenden Automorphismus von $\mathbf{N}_0^3/\mathbf{K}$ geht nun das Radikal $\sqrt[3]{\alpha/9}$ in $\sqrt[3]{\alpha'/9}$ (wieder reell verstanden) über. Demnach liegt die Radikalsumme

$$\mathbf{A} = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{9}} + \sqrt[3]{\frac{\alpha'}{9}}$$

als Spur für $\mathbf{N}_0^3/\mathbf{K}$ im Teilkörper $\mathbf{K}$, und sie erzeugt diesen Teilkörper über $\mathbf{P}$, weil sie von ihren beiden komplexen konjugierten verschieden ist. Für die Erzeugende $\mathbf{A}$ hat man

$$\mathbf{A}^3 = \left(\frac{\alpha}{9}+\frac{\alpha'}{9}\right) + 3\sqrt[3]{\frac{\alpha}{9}}\sqrt[3]{\frac{\alpha'}{9}}\left(\sqrt[3]{\frac{\alpha}{9}}+\sqrt[3]{\frac{\alpha'}{9}}\right).$$

Im Hinblick auf $\alpha+\alpha'=9$ und $\alpha\alpha'=\pm 3$ wird dies

$$\mathbf{A}^3 = 1 \pm \mathbf{A}.$$

Damit ist das gesteckte Ziel erreicht:

Ergebnis. *Der größte reelle Teilkörper* $\mathbf{K}$ *des Klassenkörpers* $\mathbf{N}$ *zum imaginär-quadratischen Zahlkörper* $\mathbf{\Omega} = \mathbf{P}(\sqrt{d})$ *mit* $d=-27\pm 4$ *hat die Erzeugung*

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}(\mathbf{A})$$

mit der Grundgleichung

$$\mathbf{A}^3 \mp \mathbf{A} - 1 = 0.$$

Arithmetisch ist die Erzeugende $\mathbf{A}$ *als die Radikalsumme*

$$\mathbf{A} = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{9}} + \sqrt[3]{\frac{\alpha'}{9}}$$

gekennzeichnet, deren Radikand

$$\frac{\alpha}{9} = \frac{1}{9}\cdot\frac{9+\sqrt{-3d}}{2}$$

mit der Grundeinheit

$$\varepsilon_0 = \frac{(27\mp 2)+3\sqrt{-3d}}{2}$$

des größten reellen Teilkörpers $\mathbf{\Omega}_0^3 = \mathbf{P}(\sqrt{-3d})$ *von* $\mathbf{\Omega}^3 = \mathbf{P}(\sqrt{-3},\sqrt{d})$ *und der Primzahl 3 durch*

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \pm\varepsilon_0, \qquad \alpha\alpha' = \pm 3$$

zusammenhängt.

Bemerkung. Bei der zuvor erwähnten, näher liegenden Normierung $\omega^{-1} \underset{3}{\equiv} \varepsilon_0$ des Radikanden ergibt sich für die Erzeugende

$$\mathbf{B} = \sqrt[3]{\varepsilon_0} + \sqrt[3]{\varepsilon_0'}$$

die höhere Grundgleichung

$$\mathbf{B}^3 - 3\mathbf{B} - (27\mp 2) = 0.$$

II. Der Fall $d=-47$

Der Gleichförmigkeit mit den zuvor behandelten Fällen halber soll auch in diesem Falle, obwohl hier d nur den einen Wert -47 hat, die Schreibweise $\sqrt{d}$ beibehalten (nicht durch $\sqrt{-47}$ ersetzt) werden.

A. Aufstieg zur Erzeugung von $\mathbf{N}^5/\mathbf{\Omega}^5$. Die zyklische Erweiterung 5-ten Grades $\mathbf{N}/\mathbf{\Omega}$ wird nach Adjunktion der 5-ten Einheitswurzeln (oberer Index 5) durch ein Radikal erzeugbar:

$$\mathbf{N}^5 = \mathbf{\Omega}^5(\sqrt[5]{\omega}),$$

und zwar ist der Radikand ω eine singuläre 5-Primärzahl aus $\mathbf{\Omega}^5$, d.h. eine 5-te Divisorpotenzzahl, welche 5-primär (5-ter Potenzrest mod $5\sqrt{-e\sqrt{5}}$) ist; kurz:

$$\omega \underset{5}{\cong} 1, \qquad \omega \underset{5}{\equiv} 1 \bmod 5\sqrt{-e\sqrt{5}}.$$

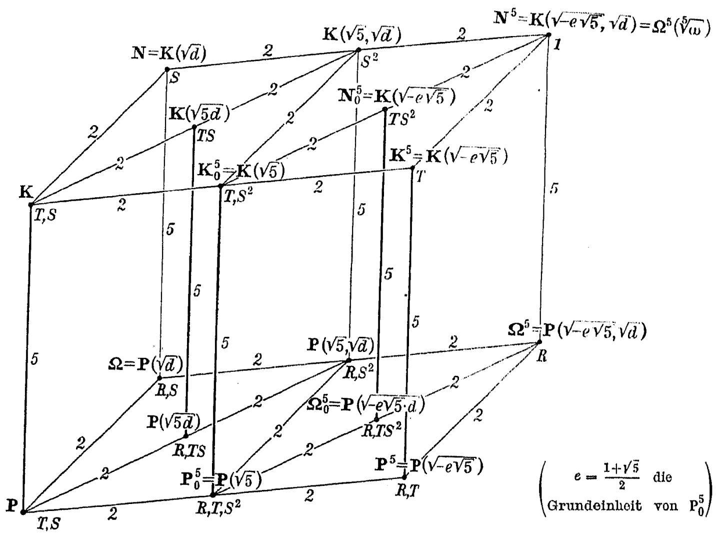

Fig. 3 (6)

Galoissche Gruppe erzeugt durch $R^5 = 1$, $T^2 = 1$, $T^{-1}RT = R^{-1}$, $S^4 = 1$, S vertauschbar mit R, T.

	$\sqrt{5}$	$\sqrt{-e\sqrt{5}}$	$\sqrt{d}$	$\sqrt{-e\sqrt{5}\cdot d}$	$\sqrt[5]{\omega}$
T	$+\sqrt{5}$	$+\sqrt{-e\sqrt{5}}$	$-\sqrt{d}$	$-\sqrt{-e\sqrt{5}\cdot d}$	$\sqrt[5]{\bar{\omega}''}$
S^2	$+\sqrt{5}$	$-\sqrt{-e\sqrt{5}}$	$+\sqrt{d}$	$-\sqrt{-e\sqrt{5}\cdot d}$	$\sqrt[5]{\omega''}$
TS^2	$+\sqrt{5}$	$-\sqrt{-e\sqrt{5}}$	$-\sqrt{d}$	$+\sqrt{-e\sqrt{5}\cdot d}$	$\sqrt[5]{\bar{\omega}}$
S	$-\sqrt{5}$	$-e'\sqrt{-e\sqrt{5}}$	$+\sqrt{d}$	$-e'\sqrt{-e\sqrt{5}\cdot d}$	$\sqrt[5]{\omega'}$
TS	$-\sqrt{5}$	$-e'\sqrt{-e\sqrt{5}}$	$-\sqrt{d}$	$+e'\sqrt{-e\sqrt{5}\cdot d}$	$\sqrt[5]{\bar{\omega}'''}$
R	$\sqrt{5}$	$\sqrt{-e\sqrt{5}}$	$\sqrt{d}$	$\sqrt{-e\sqrt{5}\cdot d}$	$\varrho\sqrt[5]{\omega}$

(ϱ primitive 5-te Einheitswurzel)

(6) Die Erzeugenden der Invarianzuntergruppen sind wieder jeweils unter den Bezeichnungen der Teilkörper angegeben. Hinsichtlich der fetten und dünnen Linien sie wieder Fußnote 1. Die Anwendung des Automorphismus S wird im folgenden zur Abkürzung auch hier mit einem Strich bezeichnet, die Anwendung des Automorphismus TS^2 (Übergang zum konjugiert-komplexen) mit einem Querstrich.

Sie liegt, bis auf die Auswahl unter $\omega^{\pm 1}$, $\omega^{\pm 2}$, im Sinne $\underset{5}{=}$ (d.h. bis auf 5-te Zahlpotenzfaktoren) eindeutig fest.

Zur Ermittlung von ω werden zunächst nach dem in GK ausführlich dargelegten Verfahren Relativgrundeinheit ε_0, Einheitenindex Q_0 und Klassenzahl h_0 des zyklischen biquadratischen größten reellen Teilkörpers

$$\boldsymbol{\Omega}_0^5 = \mathbf{P}\left(\sqrt{-e\sqrt{5}\cdot d}\right)$$

von $\boldsymbol{\Omega}^5$ und daraus dann Einheitenindex Q, weitere Grundeinheit ε und Klassenzahl h des imaginären abelschen Zahlkörpers

$$\boldsymbol{\Omega}^5 = \mathbf{P}\left(\sqrt{-e\sqrt{5}},\sqrt{d}\right)$$

vom Typus (4, 2) bestimmt.

1. Relativgrundeinheit ε_0, Einheitenindex Q_0 und Klassenzahl h_0 von $\boldsymbol{\Omega}_0^5$. Die Bestimmung beruht auf der Darstellung der ganzen Zahlen aus $\boldsymbol{\Omega}_0^5$ in der kanonischen Form

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x_0+x_1\tau(\psi)}{2}+y_0\frac{\tau(\chi)+\tau(\bar{\chi})}{2}+y_1\frac{i\tau(\chi)-i\tau(\bar{\chi})}{2}\right)$$

mit Kongruenzbedingungen mod 4 für die ganzrationalen Koordinaten x_0, x_1, y_0, y_1 (GK, § 8, (2), (3) und Satz 14). Dabei bedeuten χ, $\bar{\chi}$ die beiden konjugierten biquadratischen Charaktere mod $5\cdot 47$, $\psi=\chi^2$ den quadratischen Charakter mod 5, und $\tau(\chi)$, $\tau(\bar{\chi})$, $\tau(\psi)$ die zugehörigen Gaußschen Summen. Die in dieser Darstellung auftretenden Bildungen aus ihnen berechnen sich nach GK, § 8, (21) zu

$$\tau(\psi)=\sqrt{5},\qquad \frac{\tau(\chi)+\tau(\bar{\chi})}{2}=e'\sqrt{-e\sqrt{5}\cdot d},\qquad \frac{i\tau(\chi)-i\tau(\bar{\chi})}{2}=\sqrt{-e\sqrt{5}\cdot d}.$$

Die Relativeinheiten von $\boldsymbol{\Omega}_0^5/\mathbf{P}_0^5$ (Einheiten mit Relativnorm ± 1) sind in dieser kanonischen Darstellung nach GK, § 12, (2) gekennzeichnet durch die Koordinatengleichungen

$$\frac{(x_0^2\mp 16)/5+x_1^2}{2\cdot 47}=y_0^2+y_1^2,\qquad x_0x_1=-(y_0^2-y_1^2)-4y_0y_1,$$

und die Relativeinheit ε_0 entspricht der wesentlich eindeutig bestimmten Lösung mit minimalem $y_0^2+y_1^2$. Als Minimallösung findet man hier nach dem systematischen Probierverfahren aus GK, § 12, A 1 schnell

$$x_0=47,\quad x_1=-5,\quad y_0=-1,\quad y_1=-2,$$

und zwar mit positivem Vorzeichen in der ersten Gleichung linkerhand, was Relativnorm -1 bedeutet; y_0, y_1 wurden dabei aus hier nicht zu erörternden, ganz unwesentlichen Gründen negativ normiert. Demnach hat $\mathbf{\Omega}_0^5/\mathbf{P}_0^5$ die Relativgrundeinheit

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{47-5\sqrt{5}}{2} - e'\sqrt{-e\sqrt{5}\cdot d} - 2\sqrt{-e\sqrt{5}\cdot d}\right)$$

oder also

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{47-5\sqrt{5}}{2} + \frac{-5+\sqrt{5}}{2}\sqrt{-e\sqrt{5}\cdot d}\right)$$

mit der Relativnorm

$$n(\varepsilon_0) = \varepsilon_0\varepsilon_0'' = -1.$$

Da sich hierbei $x_1 = -5$ als nicht durch 47 teilbar erweist, ergibt sich ferner nach GK, § 12, A 2 der Einheitenindex von $\mathbf{\Omega}_0^5/\mathbf{P}_0^5$ zu

$$Q_0 = 1.$$

Dementsprechend wird die Einheitengruppe von $\mathbf{\Omega}_0^5$ erzeugt durch die Einheiten

$$e,\quad \varepsilon_0,\quad \varepsilon_0' \quad \text{mit} \quad N(e) = -1,\quad n(\varepsilon_0) = -1.$$

Um schließlich die Klassenzahl h_0 von $\mathbf{\Omega}_0^5$ zu bestimmen, hat man die reduzierte Relativkreiseinheit

$$\eta_0 = \vartheta\vartheta'$$

zu berechnen (GK, § 19, (11)). Das kann nach der Bergströmschen Produktformel für das 23-gliedrige Produkt

$$\vartheta = \prod_a \left((-\zeta)^a - (-\zeta)^{-a}\right)$$

geschehen (GK, § 14), wo ζ eine primitive $5\cdot 47$-te Einheitswurzel bedeutet und a ein ungerade normiertes Halbsystem aus der $\mathbf{\Omega}_0^5$ zugeordneten rationalen Kongruenzgruppe mod $5\cdot 47$ durchläuft (KAZ, § 10), etwa das kleinste positive

1, 19, 21, 29, 39, 51, 61, 69, 71, 81, 99, 101, 109,
111, 121, 129, 131, 139, 179, 191, 199, 219, 229.

Man hat für diese Berechnung nach dem Schema aus GK, § 19, B 3, a 2, Typus 3 (S. 86) vorzugehen. Die Durchführung wäre mir ohne mechanische oder elektronische Rechenhilfsmittel wohl nicht gelungen. Mittels des Hamburger elektronischen Rechenautomaten TR 4 ergab sich die Übereinstimmung

$$\eta_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{47-5\sqrt{5}}{2} + \frac{-5+\sqrt{5}}{2}\sqrt{-e\sqrt{5}\cdot d}\right) = \varepsilon_0$$

mit der zuvor bestimmten Relativgrundeinheit ε_0. Nach GK, § 19, Satz 37 bedeutet dies im Hinblick auf $Q_0 = 1$, daß $\mathbf{\Omega}_5^0/\mathbf{P}_0^5$ die Relativklassenzahl

$$h_0^* = 1$$

hat. Da $\mathbf{P}_0^5 = \mathbf{P}(\sqrt{5})$ die Klassenzahl 1 hat, hat demnach auch $\mathbf{\Omega}_0^5$ die Klassenzahl

$$h_0 = 1.$$

2. Einheitenindex Q, weitere Grundeinheit ε und Klassenzahl h von $\mathbf{\Omega}^5$. Nach KAZ, § 33 (S. 98) hat $\mathbf{\Omega}^5/\mathbf{\Omega}_0^5$ den Einheitenindex

$$Q = 2.$$

Eine daher nach KAZ, § 20, Satz 14 und ($4\mathrm{a}_0$) vorhandene Einheit ε aus $\mathbf{\Omega}^5$ mit dem Verhalten

$$\bar{\varepsilon} = -\varepsilon$$

beim erzeugenden Automorphismus von $\mathbf{\Omega}^5/\mathbf{\Omega}_0^5$ (Übergang zum konjugiert-komplexen) wird geliefert durch die der reduzierten Relativkreiseinheit $\eta_0 = \vartheta\vartheta'$ — und überhaupt den Kreiseinheiten — zugrunde liegende Zahl ϑ, die ja im vorliegenden Falle (eines zusammengesetzten Führers $f = 5\cdot 47$) eine Einheit aus $\mathbf{\Omega}^5$ ist, und als Produkt aus ungeradvielen rein-imaginären Faktoren die Eigenschaft

$$\bar{\vartheta} = -\vartheta$$

hat:

$$\varepsilon = \vartheta.$$

Für diese Zahl ϑ ergab sich bei der zuvor besprochenen elektronischen Berechnung von η_0 der Wert

$$\vartheta = \frac{1}{2}\left((2-\sqrt{5})\sqrt{d} + \frac{25-11\sqrt{5}}{2}\sqrt{-e\sqrt{5}}\right).$$

Wie man weiter leicht ausrechnet, bestimmt sich die Relativnorm dieser Einheit nach $\mathbf{P}(\sqrt{5}, \sqrt{d})$ zu

$$n(\vartheta) = \vartheta\vartheta'' = e' = -e^{-1}$$

und daher ihre volle Norm zu

$$N(\vartheta) = \vartheta\vartheta'\vartheta''\vartheta''' = N(e) = -1.$$

Nach dem vorstehend Gezeigten wird die Einheitengruppe von $\mathbf{\Omega}^5$ erzeugt durch eine primitive $5\cdot 47$-te Einheitswurzel ζ, die reellen Einheiten e, ε_0, ε_0' und die imaginäre Einheit ϑ. Auf Grund der eben angegebenen Normrelationen und der früheren Relation

$$\varepsilon_0 = \eta_0 = \vartheta\vartheta'$$

kann man stattdessen als Erzeugende auch einfach

$$\zeta \text{ und die Konjugierten } \vartheta,\ \vartheta',\ \vartheta''$$

nehmen.

Nach KAZ, § 33, Satz 34 berechnet sich schließlich im Hinblick auf $Q = 2$ die Relativklassenzahl von $\mathbf{\Omega}^5/\mathbf{\Omega}_0^5$ zu

$$h^* = 2\cdot 10\cdot N_\chi(\theta(\chi))\, N_\psi(\theta(\psi))\, N_{\hat\psi}(\theta(\hat\psi)),$$

wo wie schon früher χ einen biquadratischen Charakter mod $5\cdot 47$, $\psi = \chi^2$ den quadratischen Charakter mod 5, ferner $\hat\psi$ den quadratischen Charakter mod 47 bedeuten, und $\theta(\chi)$, $\theta(\psi)$, $\theta(\hat\psi)$ die gemäß KAZ, § 27, (2) gebildeten Charaktersummen sind, von denen die Normen N_χ, N_ψ, $N_{\hat\psi}$ im Körper des jeweiligen Charakters zu nehmen sind. Die Berechnung dieser Charaktersummen und ihrer Normen kann ohne große Mühe von Hand durchgeführt werden. Sie ergibt als Relativklassenzahl

$$h^* = 2\cdot 5.$$

Im Hinblick auf $h_0 = 1$ hat demnach auch $\mathbf{\Omega}^5$ die Klassenzahl

$$h = 2\cdot 5.$$

Nach der Klassenkörpertheorie gibt es demzufolge in $\mathbf{\Omega}^5$ überhaupt nur wesentlich eine singuläre 5-Primärzahl ω.

3. Ermittlung der singulären 5-Primärzahl ω. Die gesuchte singuläre 5-Primärzahl ω muß sich aus Einheiten von $\mathbf{\Omega}^5$ und der wesentlich einzigen, bereits in $\mathbf{\Omega}$ vorhandenen 5-ten Divisorpotenzzahl

$$w = \frac{9+\sqrt{d}}{2} \underset{5}{\cong} 1 \quad \text{mit} \quad N(w) = 2^5$$

zusammensetzen. Um das durch ein geeignetes Potenzprodukt aus w und den Grundeinheiten ζ, ϑ, ϑ', ϑ'' von $\mathbf{\Omega}^5$ zu erreichen, bestimme man die Exponenten mod 5 in der Darstellung dieser Zahlen durch eine

Basis der π-adischen Einseinheitengruppe von $\mathbf{\Omega}^5$, nur mod π^5 betrachtet, wo zur Abkürzung

$$\pi = \sqrt{-e\sqrt{5}} \quad \text{mit} \quad \pi^4 \cong 5,\ \pi^5 \cong 5\pi$$

den Primdivisor von 5 in $\mathbf{\Omega}^5$ bezeichnet. Diese Bestimmung kann durch schrittweises Vorgehen nach steigenden Potenzen π, π^2, π^3, π^4, π^5 als Modul ohne große Schwierigkeit geschehen. Das Ergebnis ist in der folgenden Tabelle zusammengestellt, in deren Kopf die zugrunde gelegte Basis angegeben ist; leere Plätze sollen dabei Exponenten 0 mod 5 bedeuten:

	$1+\pi$	$1+\pi\sqrt{d}$	$1+\sqrt{5}$	$1+\sqrt{5}\sqrt{d}$	$1+\pi\sqrt{5}$	$1+\pi\sqrt{5}\sqrt{d}$	$1+5$	$1+5\sqrt{d}$	
w								3	
ζ	3		3		4		4		
ϑ			2			2	1		2
ϑ'			3			1	4		3
ϑ''			2			3	1		1

Zwischen den fünf Exponentenzeilen besteht, wie es sein muß, genau eine lineare Abhängigkeit mod 5, nämlich mit den in der Spalte ganz rechts angegebenen Koeffizienten. Daher ist die Einheit

$$\omega = \vartheta^2\vartheta'^3\vartheta'' \underset{5}{\equiv} 1 \bmod 5\pi,$$

also 5-primär. Durch Ausführung der Konjugiertenbildung und Multiplikation, am einfachsten in der Assoziation

$$\omega = (\vartheta\vartheta')^2(\vartheta'\vartheta'') = \eta_0^2\eta_0' = \varepsilon_0^2\varepsilon_0',$$

erhält man für ω den Wert

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{9353+4225\sqrt{5}}{2} - \frac{715+325\sqrt{5}}{2}\sqrt{-e\sqrt{5}\cdot d}\right).$$

Für später sei auch noch der Wert

$$\varepsilon_0\varepsilon_0' = \frac{1}{2}\left(\frac{521+235\sqrt{5}}{2} - (20+9\sqrt{5})\sqrt{-e\sqrt{5}\cdot d}\right)$$

angegeben. Mit dem so bestimmten Radikanden ω hat man dann für $\mathbf{N}^5/\mathbf{\Omega}^5$ die Erzeugung

$$\mathbf{N}^5 = \mathbf{\Omega}^5(\sqrt[5]{\omega}) = \mathbf{\Omega}^5(\sqrt[5]{\varepsilon_0^2\varepsilon_0'}).$$

Bemerkung. Man beachte, daß auch im vorliegenden Falle $d = -47$ die 5-te Divisorpotenzzahl w aus $\mathbf{\Omega}$ beim Aufbau der singulären 5-Potenzzahl ω aus $\mathbf{\Omega}^5$ nicht eingeht, ganz analog wie in den zuvor behandelten Fällen $d = -23$ und $d = -31$.

B. Abstieg zur Erzeugung von K/P. Die vorstehend bestimmte singuläre 5-Primärzahl $\omega = \varepsilon_0^2\varepsilon_0'$ aus $\mathbf{\Omega}^5$ ist hier bereits so normiert, daß sie im größten reellen Teilkörper $\mathbf{\Omega}_0^5$ von $\mathbf{\Omega}^5$ liegt. Da das (reell verstandene) Radikal $\sqrt[5]{\omega} = \sqrt[5]{\varepsilon_0^2\varepsilon_0'}$ im größten reellen Teilkörper $\mathbf{N}_0^5$ von $\mathbf{N}^5$ liegt, hat man demnach für $\mathbf{N}_0^5/\mathbf{\Omega}_0^5$ die Erzeugung

$$\mathbf{N}_0^5 = \mathbf{\Omega}_0^5(\sqrt[5]{\omega}) = \mathbf{\Omega}_0^5(\sqrt[5]{\varepsilon_0^2\varepsilon_0'}).$$

1. Abstieg von $\mathbf{N}_0^5/\mathbf{\Omega}_0^5$ zu $\mathbf{K}_0^5/\mathbf{P}_0^5$. Beim erzeugenden Automorphismus von $\mathbf{N}_0^5/\mathbf{K}_0^5$ geht das Radikal $\sqrt[5]{\omega}$ in $\sqrt[5]{\omega''}$ (wieder reell verstanden) über. Im Hinblick auf

$$\omega\omega'' = n(\varepsilon_0)^3 = -1$$

hat man auch

$$\sqrt[5]{\omega}\sqrt[5]{\omega''} = -1.$$

Es liegt dann die Radikalsumme

$$\mathbf{B} = \sqrt[5]{\omega} + \sqrt[5]{\omega''} = \sqrt[5]{\omega} - \frac{1}{\sqrt[5]{\omega}}$$

als Spur für $\mathbf{N}_0^5/\mathbf{K}_0^5$ im Teilkörper $\mathbf{K}_0^5$, und sie erzeugt diesen Teilkörper über $\mathbf{P}_0^5$, weil sie von ihren vier komplexen Konjugierten verschieden ist:

$$\mathbf{K}_0^5 = \mathbf{P}_0^5(\mathbf{B}).$$

Um die Gleichung zu finden, der $\mathbf{B}$ bei dieser Erzeugung genügt, gehe man aus von den Identitäten

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^5 = \left(x^5 - \frac{1}{x^5}\right) - \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) + 10\left(x - \frac{1}{x}\right),$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) - 3\left(x - \frac{1}{x}\right),$$

also

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^5 + 5\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 5\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^5 - \frac{1}{x^5},$$

und setze darin $x = \sqrt[5]{\omega}$. Das ergibt:

$$\mathbf{B}^5 + 5\mathbf{B}^3 + 5\mathbf{B} = \omega - \frac{1}{\omega} = \omega + \omega'' = \frac{9353 + 4225\sqrt{5}}{2}.$$

Die Norm des absoluten Gliedes dieser Gleichung ist die Primzahl 443629.

2. Abstieg von $\mathbf{K}_0^5/\mathbf{P}_0^5$ zu K/P. Beim erzeugenden Automorphismus von $\mathbf{K}_0^5/\mathbf{K}$ geht das Radikal $\sqrt[5]{\omega}$ in $\sqrt[5]{\omega''}$ (wieder reell verstanden) über. Im Hinblick auf

$$\omega' = \varepsilon_0'^2\varepsilon_0'' = \frac{\varepsilon_0^5\varepsilon_0'^2\varepsilon_0''}{\varepsilon_0^5} = -\frac{\varepsilon_0^4\varepsilon_0'^2}{\varepsilon_0^5} = -\frac{\omega^2}{\varepsilon_0^5}$$

hat man auch

$$\sqrt[5]{\omega'} = -\frac{\sqrt[5]{\omega}^2}{\varepsilon_0}.$$

Es liegt dann die Radikalsumme

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{B}' = \sqrt[5]{\omega} + \sqrt[5]{\omega'} + \sqrt[5]{\omega''} + \sqrt[5]{\omega'''} = \left(\sqrt[5]{\omega} - \frac{1}{\sqrt[5]{\omega}}\right) - \left(\frac{\sqrt[5]{\omega}^2}{\varepsilon_0} - \frac{\varepsilon_0}{\sqrt[5]{\omega}^2}\right)$$

als Spur für $\mathbf{K}_0^5/\mathbf{K}$ im Teilkörper $\mathbf{K}$, und sie erzeugt diesen Teilkörper über $\mathbf{P}$, weil sie von ihren vier komplexen Konjugierten verschieden ist:

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}(\mathbf{A}).$$

Um schließlich die Gleichung zu finden, der $\mathbf{A}$ bei dieser Erzeugung genügt, fasse man die zuletzt angegebene Darstellung von $\mathbf{A}$ als Darstellung durch die Basis $\sqrt[5]{\omega}^{-2}$, $\sqrt[5]{\omega}^{-1}$, 1, $\sqrt[5]{\omega}$, $\sqrt[5]{\omega}^{2}$ von $\mathbf{N}_0^5/\mathbf{\Omega}^5$ auf und berechne daraus die entsprechenden Basisdarstellungen von $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$, $\mathbf{A}^4$, $\mathbf{A}^5$. Die Durchführung dieser zwar etwas mühevollen, aber durchaus von Hand zu erledigenden Rechnung verdanke ich Kl. Alber (Hamburg). Es ergab sich das Bestehen der Gleichung

$$\mathbf{A}^5 + 10\mathbf{A}^3 - 5\,\mathrm{Sp}(\varepsilon_0)\,\mathbf{A}^2 + 5\left(1 + \mathrm{Sp}\left(\frac{\omega}{\varepsilon_0}\right)\right)\mathbf{A} - \mathrm{Sp}(\omega) = 0.$$

Die darin auftretenden Spuren entnimmt man aus den zuvor angegebenen numerischen Werten von ε_0, $\omega/\varepsilon_0 = \varepsilon_0\varepsilon_0'$, $\omega = \varepsilon_0^2\varepsilon_0'$ zu

$$\mathrm{Sp}(\varepsilon_0) = 47, \quad \mathrm{Sp}\left(\frac{\omega}{\varepsilon_0}\right) = 521, \quad \mathrm{Sp}(\omega) = 9353.$$

Damit ist das gesteckte Ziel erreicht:

Ergebnis. *Der größte reelle Teilkörper* $\mathbf{K}$ *des Klassenkörpers* $\mathbf{N}$ *zum imaginär-quadratischen Zahlkörper* $\Omega = \mathbf{P}(\sqrt{-47})$ *hat die Erzeugung*

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}(\mathbf{A})$$

mit der Grundgleichung

$$\mathbf{A}^5 + 10\mathbf{A}^3 - 235\mathbf{A}^2 + 2610\mathbf{A} - 9353 = 0.$$

Arithmetisch ist die Erzeugende $\mathbf{A}$ *als die Radikalsumme*

$$\mathbf{A} = \sqrt[5]{\omega} + \sqrt[5]{\omega'} + \sqrt[5]{\omega''} + \sqrt[5]{\omega'''}$$

gekennzeichnet, deren Radikand gemäß

$$\omega = \varepsilon_0^2 \varepsilon_0'$$

aus der Relativgrundeinheit ε_0 *des zyklischen biquadratischen größten reellen Teilkörpers* $\Omega_0^5 = \mathbf{P}\left(\sqrt{-e\sqrt{5}\cdot d}\right)$ *von* $\Omega^5 = \mathbf{P}\left(\sqrt{-e\sqrt{5}}, \sqrt{d}\right)$ *gebildet ist, wo* $e = (1+\sqrt{5})/2$ *die Grundeinheit von* $\mathbf{P}_0^5 = \mathbf{P}(\sqrt{5})$ *ist.*

Schlußbemerkung. Ob sich auch im vorliegenden Falle $d = -47$ durch Wegdivision einer geeigneten 5-ten Potenz aus dem Radikanden $\omega = \varepsilon_0^2 \varepsilon_0'$ die hier unverhältnismäßig hohe Grundgleichung auf eine niedere zurückführen läßt, wie das in den Fällen $d = -23$ und $d = -31$ durch Wegdivision von $\sqrt{-3}^3$ aus dem Radikanden ε gelang, und ob man etwa auf diese Weise die hier gefundene Grundgleichung auf die aus der Transformationstheorie der Modulfunktionen fließenden (siehe Fußnote 2) zurückführen kann, bleibt einer weiteren Untersuchung vorbehalten.

Reçu par la Rédaction le 25. 3. 1964