COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XII 1964 FASC. 2

CERTAINES EXTENSIONS DE LA NOTION DE GROUPOÏDE INDUCTIF ET DE CELLE DE PSEUDOGROUPE

PAR

L. DUBIKAJTIS (TORUŃ)

Ehresmann [3] a démontré l'équivalence des théories des deux notions indiquées au titre de ce travail. Toutes les deux sont des théories non-élémentaires, car il y a dans chacune d'elles un axiome contenant une variable qui parcourt une famille d'ensembles. En rejetant les axiomes non-élémentaires, les deux théories cessent d'être équivalentes. Le problème se pose donc d'y remplacer les axiomes non-élémentaires par certains axiomes élémentaires qui suffiseraient pour démontrer l'équivalence des deux théories ainsi formées et dites des *extensions élémentaires* du grupoïde inductif et du pseudogroupe respectivement.

Le travail présent apporte certaines solutions de ce problème. Les résultats partiels ont été publiés dans mon travail [1].

Les signes logiques $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\bigwedge$, $\bigvee$, et ϵ seront employés dans leur sens usuel. Le symbole $\bigvee_{1x}$ exprimera l'existence d'un x unique. Au lieu de $\bigvee_{x\epsilon C}$ et $\bigwedge_{x\epsilon C}$ leurs abréviations $\bigvee_x$ et $\bigwedge_x$ seront employées fréquemment ou même le quantificateur général $\bigwedge_x$ précédant un axiome ou théorème sera supprimé tout à fait.

1. Considérons d'abord les axiomes d'Ehresmann sur le *groupoïde inductif* et certaines conséquences de ces axiomes.

AXIOME I.1. $[(x\cdot y)\cdot z\epsilon C \wedge x\cdot(y\cdot z)\epsilon C] \Rightarrow (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$.

DÉFINITION 1.1. $x\epsilon C_0 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x\epsilon C \wedge \bigwedge_{y\epsilon C}[(x\cdot y\epsilon C \Rightarrow x\cdot y = y)\wedge(y\cdot x\epsilon C \Rightarrow$ $\Rightarrow y\cdot x = y)]$.

AXIOME I.2'. $\bigwedge_{x\epsilon C}\bigvee_{1y\epsilon C_0} x\cdot y\epsilon C$.

AXIOME I.2''. $\bigwedge_{x\epsilon C}\bigvee_{1y\epsilon C_0} y\cdot x\epsilon C$.

DÉFINITION 1.2'. $y = \alpha x \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (y\epsilon C_0 \wedge x\cdot y\epsilon C)$.

DÉFINITION 1.2''. $y = \beta x \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (y\epsilon C_0 \wedge y\cdot x\epsilon C)$.

AXIOME I.3. $x\cdot y\epsilon C \Leftrightarrow \alpha x = \beta y$.

AXIOME I.4'. $x\cdot y\epsilon C \Rightarrow \alpha(x\cdot y) = \alpha y$.

AXIOME I.4''. $x\cdot y\epsilon C \Rightarrow \beta(x\cdot y) = \beta x$.

AXIOME I.5. $\bigwedge_{x\epsilon C}\bigvee_{y\epsilon C}(y\cdot x = \alpha x \wedge x\cdot y = \beta x)$.

AXIOME I.6. $(x' \prec x \wedge y' \prec y \wedge x' \cdot y' \in C \wedge x \cdot y \in C) \Rightarrow x' \cdot y' \prec x \cdot y$.

AXIOME I.7. $z \prec x \cdot y \Rightarrow \bigvee_{x', y'} (x' \prec x \wedge y' \prec y \wedge z = x' \cdot y')$.

AXIOME I.8. $(x \prec y \wedge y \in C_0) \Rightarrow x \in C_0$.

AXIOME I.9. $x \prec \alpha y \Rightarrow \bigvee_{1y'} (y' \prec y \wedge x = \alpha y')$.

AXIOME I.10. $(x \prec y \wedge y \prec z) \Rightarrow x \prec z$.

AXIOME I.11. $\bigwedge_x (x \prec y_1 \Leftrightarrow x \prec y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$.

AXIOME I.12. $\bigwedge_{A \subset C} \{(\bigwedge_{x \in A} x \prec y) \Rightarrow \bigvee_{y' \in C} [y' \prec y \wedge (\bigwedge_{x \in A} x \prec y') \wedge \wedge \bigwedge_{y'' \in C} ((\bigwedge_{x \in A} x \prec y'') \Rightarrow y' \prec y'')]\}$.

Les axiomes I.1 - I.5 avec les définitions 1.1, 1.2′ et 1.2″ déterminent la structure du groupoïde ([2], p. 2 - 3) et les axiomes I.6 - I.12 y on été ajoutés par Ehresmann pour déterminer la structure du groupoïde inductif ([3], p. 307). En particulier, $\varphi(y)$ désignant la classe des tous les éléments x tels que $x \prec y$, les axiomes I.6 - I.8 signifient que $\varphi(y)$ est un foncteur généralisé covariant C en C ([2], p. 7 - 8). Les axiomes I.9 - I.12 coïncident avec les axiomes 1) - 4) de [3], p. 307.

Le système composé d'axiomes I.1 - I.12 et de définitions 1.1, 1.2′ et 1.2″ sera dit le *système* I et chaque formule n'exprimée qu'à l'aide de signes logiques et de notions déterminées par le système I sera qualifiée *formule du système* I. Deux formules du système I s'appeleront *duales* lorsque l'une se transforme en l'autre par substitution simultanée de α à β et β à α et, dans chaque produit, par l'inversion de l'ordre de ses éléments, toutes les autres notions restant intactes. Une formule duale d'elle-même s'appellera *ipso-duale*. De même, un système d'axiomes sera dit *ipso-dual* lorsque leur produit logique est une formule ipso-duale.

REMARQUE 1.1. Il est évident que le système I devient ipso-dual, en y supprimant l'axiome I.9, donc φ' étant un théorème résultant du système I dépourvu de l'axiome I.9, la formule φ'' duale de φ' est aussi un théorème résultant de ce système d'axiomes.

On a les théorèmes suivants sur le système I:

THÉORÈME 1.1. *Les axiomes* I.2′, I.2″, I.5 *et les définitions* 1.1, 1.2′ *impliquent que* $\bigwedge_{x \in C_0} \alpha x = x = \beta x$.

Démonstration. D'après I.5, il existe pour tout $x \in C_0$ un y tel que

(1) $\qquad y \cdot x = \alpha x \qquad$ et $\qquad$ (2) $\qquad x \cdot y = \beta x$,

donc

(3) $\qquad y \cdot x \in C \qquad$ et $\qquad$ (4) $\qquad x \cdot y \in C$.

D'après la définition 1.1, on a $y \cdot x = y$ en vertu de $x \in C_0$ et de (3), d'où $y = \alpha x$ en vertu de (1). Par conséquent, $y \in C_0$ d'après la définition 1.2′.

D'après la définition 1.1, on a $y \cdot x = x$ et $x \cdot y = x$ en vertu de $y \in C_0$, (3) et (4), ce qui entraîne la thèse du théorème en vertu de (1), (2), I.2′ et I.2″.

THEORÈME 1.2. *L'axiome* I.9 *résulte des axiomes* I.1-I.8.

Démonstration. Nous allons démontrer d'abord que $x \prec \alpha y$ entraîne l'existence d'un y' tel que $y' \prec y$ et $x = \alpha y'$, et ensuite que cet y' est unique.

D'après I.8 et la définition 1.2', $x \prec \alpha y$ entraîne $x \in C_0$. D'après I.5, il existe un z tel que

(1) $$y \cdot z = \beta y \quad \text{et} \quad z \cdot y = \alpha y;$$

on a donc $x \prec z \cdot y$ et on en conclut en vertu de I.7 qu'il existe un z' et un y' tels que

(2) $z' \prec z$, (3) $y' \prec y$ et (4) $x = z' \cdot y'$.

D'après I.4', (4) entraîne $\alpha x = \alpha y'$, d'où en vertu du théorème 1.1

(5) $$\alpha y' = x.$$

Les propriétés (3) et (5) de y' sont bien celles qu'il s'agissait de prouver.

Admettons à présent qu'un y'' possède les mêmes propriétés, à savoir que

(6) $y'' \prec y$ et (7) $\alpha y'' = x$.

En vertu de I.3, I.4'' et (4), on a

(8) $$\alpha z' = \beta y'$$

et $\beta x = \beta z'$, d'où

(9) $$\beta z' = x$$

en vertu du théorème 1.1. D'après I.3, on conclut de (7) et (9) que

(10) $$y'' \cdot z' \in C$$

et d'après I.6, on conclut de (6), (2), (10) et (1) que $y'' \cdot z' \prec \beta y$. On a donc $y'' \cdot z' \in C_0$ d'après I.8. Il en résulte en vertu de l'axiome I.4' et le théorème 1.1 que $y'' \cdot z' = \alpha(y'' \cdot z') = \alpha z'$, d'où $y'' \cdot z' = \beta y'$ en vertu de (8). On a donc

(11) $$(y'' \cdot z') \cdot y' = y'.$$

Enfin, on conclut de (7) et (4) que $y'' = y'' \cdot \alpha y'' = y'' \cdot x = y'' \cdot (z' \cdot y')$, ce qui entraîne $y'' = y'$ en vertu de I.1 et (11).

REMARQUE 1.2. D'après le théorème 1.2, le système I équivaut à lui-même dépourvu de l'axiome I.9 et d'après la remarque 1.1, le dernier système est ipso-dual. Nous pouvons donc désormais nous borner à démontrer un seul de tout couple de théorèmes du système I dont l'un est dual de l'autre. Pour cette raison, les théorèmes (et définitions) qui se correspondent par dualité en question porteront les mêmes numéros avec un $'$ ou un $''$ respectivement. Le théorème suivant est évident:

THÉORÈME 1.3. *Les axiomes* I.10 *et* I.11 *entraînent l'implication* $(x \prec y \wedge y \prec x) \Rightarrow (x = y)$.

THÉORÈME 1.4. *Les axiomes du système* I *entraînent* $\bigwedge_y y \prec y$.

Démonstration. Soit A la classe de tous les x tels que $x \prec y$:

(1) $$x \in A \Leftrightarrow x \prec y.$$

On a donc $\bigwedge_{x \in A} x \prec y$, d'où l'existence en vertu de I.12 d'un y' tel que

(2) $$y' \prec y \qquad \text{et} \qquad (3) \qquad \bigwedge_{x \in A} x \prec y'.$$

Or, (1) et (3) entraînent l'implication $x \prec y \Rightarrow x \prec y'$ et (2) entraîne l'implication inverse $x \prec y' \Rightarrow x \prec y$ en vertu de I.10. Ainsi, $x \prec y' \Leftrightarrow x \prec y$, d'où $y' = y$ en vertu de I.11 et par conséquent $y \prec y$ en vertu de (2).

THÉORÈME 1.5. *Les axiomes du système* I *entraînent l'existence d'un* z *le plus petit; en formule:* $\bigvee_z \bigwedge_y z \prec y$.

Démonstration. Soit A la classe vide. Il est évident que

$$\bigwedge_{x \in A} x \prec y \qquad \text{pour tout } y.$$

On en conclut en vertu de I.12 qu'il existe un y' pour lequel

$$\bigwedge_{y''} [(\bigwedge_{x \in A} x \prec y'') \Rightarrow y' \prec y''].$$

A étant vide, on a $\bigwedge_{y''} \bigwedge_{x \in A} x \prec y''$; par conséquent, la formule qui précède prend la forme $\bigwedge_{y''} y' \prec y''$, ce qui montre que $z = y'$ satisfait à la thèse du théorème.

THÉORÈME 1.6. *Les axiomes du système* I *entraînent*

$$\bigwedge_{x,y} \bigvee_z \{z \prec x \wedge z \prec y \wedge \bigwedge_{z'} [(z' \prec x \wedge z' \prec y) \Rightarrow z' \prec z]\}.$$

Démonstration. Soit A la classe déterminée par la condition

(1) $$u \in A \Leftrightarrow (u \prec x \wedge u \prec y).$$

On a donc $\bigwedge_{u \in A} u \prec x$, d'où il résulte en vertu de I.12 l'existence d'un x' tel que

(2) $x' \prec x$, (3) $\bigwedge_{u \in A} u \prec x'$ et (4) $\bigwedge_{x''} [(\bigwedge_{u \in A} u \prec x'') \Rightarrow x' \prec x'']$.

D'une façon analogue, on a $\bigwedge_{u \in A} u \prec y$ d'après (1); il existe donc en vertu de I.12 un y' tel que

(5) $y' \prec y$, (6) $\bigwedge_{u \in A} u \prec y'$ et (7) $\bigwedge_{y''} [(\bigwedge_{u \in A} u \prec y'') \Rightarrow y' \prec y'']$.

On conclut de (7) et (3) que $y' \prec x'$ et de (4) et (6) que $x' \prec y'$. On a par conséquent $x' = y'$ en vertu du théorème 1.3. En posant

(8) $$z = x' = y',$$

on a donc d'une part

(9) $$(z \prec x \wedge z \prec y)$$

d'après (2) et (5) et d'autre part, pour tout u tel que $u \prec x$ et $u \prec y$, on a $u \in A$ d'après (1), d'où $u \prec z$, d'après (3) et (8). Ainsi,

(10) $$\bigwedge_u [(u \prec x \wedge u \prec y) \Rightarrow u \prec z].$$

Les conditions (9) et (10) forment la thèse du théorème.

2. Considérons à présent un nouveau système d'axiomes, qui sera dit le *système* II. Tous les axiomes de ce système étant élémentaires, je propose d'appeler *groupoïde inductif élémentaire* la structure déterminée par ce système d'axiomes.

Les axiomes II.1 - II.5 et les définitions 2.1, 2.2′ et 2.2″ de ce système seront les mêmes que les axiomes I.1 - I.5 et les définitions 1.1, 1.2′, 1.2″ respectivement. En voici les autres:

Axiome II.6. $x \prec x$.
Axiome II.7. $(x \prec y \wedge y \prec x) \Rightarrow x = y$.
Axiome II.8. $(x \prec y \wedge y \prec z) \Rightarrow x \prec z$.
Axiome II.9. $(x \prec y \wedge y \in C_0) \Rightarrow x \in C_0$.
Axiome II.10. $(x' \prec x \wedge y' \prec y \wedge x' \cdot y' \in C \wedge x \cdot y \in C) \Rightarrow x' \cdot y' \prec x \cdot y$.
Axiome II.11. $(z \prec x \cdot y \wedge x \cdot y \in C) \Rightarrow \bigvee_{x',y'} (x' \prec x \wedge y' \prec y \wedge z = x' \cdot y')$.
Axiome II.12. $\bigwedge_{x,y \in C_0} \bigvee_{z \in C} \{z \prec x \wedge z \prec y \wedge \bigwedge_{z' \in C} [(z' \prec x \wedge z' \prec y) \Rightarrow$ $\Rightarrow z' \prec z]\}$.

Il est évident que les axiomes du système II résultent de ceux du système I, car II.8 - II.11 coïncident avec les axiomes I.10, I.8, I.6 et I.7 respectivement et les axiomes II.6, II.7 et II.12 résultent directement des théorèmes 1.4, 1.3 et 1.6. Il est aussi facile à montrer que les axiomes I.1 - I.11 résultent des axiomes du système II. Dans ce but, il suffit de le montrer pour les axiomes I.9 et I.11. En effet, I.9 en résulte en vertu du théorème 1.2, et I.11 est une conséquence directe des axiomes II.6 et II.7.

Remarque 2.1. Il est ainsi établi que le système II est plus général que le système I et que le système I dépourvu de l'axiome I.12 est plus général que le système II.

Remarque 2.2. Le système II étant ipso-dual, tout théorème dual d'un théorème qui résulte de ce système d'axiomes en résulte également. On peut par conséquent en omettre la démonstration.

Nous allons maintenant développer un peu la théorie du groupoïde inductif élémentaire.

D'après la remarque 2.1, l'axiome I.9 résulte des axiomes du système II. Le théorème suivant est donc valable dans ce système:

THÉORÈME 2.1'. $x \prec ay \Rightarrow \bigvee_{1y'}(y' \prec y \wedge x = ay')$.

En vertu de la remarque 2.2, le théorème qui suit, dual de 2.1', peut donc être admis sans démonstration.

THÉORÈME 2.1''. $x \prec \beta y \Rightarrow \bigvee_{1y'}(y' \prec y \wedge x = \beta y')$.

Désormais, la plupart des théorèmes ayant leur dual déjà établi ne seront plus formulés explicitement.

THÉORÈME 2.2'. $x \prec y \Rightarrow ax \prec ay$.

Démonstration. Soit $x \prec y$. En vertu de II.2' et des définitions 2.1 et 2.2', il existe donc un ay tel que

(1) $ay \in C_0$ et (2) $y \cdot ay = y$,

d'où $x \prec y \cdot ay$. Il en résulte d'après II.11 l'existence de z et u tels que

(3) $u \prec ay$ et (4) $x = z \cdot u$,

d'où $u \in C_0$ en vertu de II.9 et (1). On a donc $u = az$ d'après (4) et la définition 2.2', et $x = z$ d'après la définition 2.1. Ainsi, $u = ax$ et il ne reste qu'à appliquer (3).

THÉORÈME 2.3'. $(x_1 \prec y \wedge x_2 \prec y \wedge ax_1 = ax_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

C'est une conséquence directe de 2.1' et 2.2'.

THÉORÈME 2.4'. $(x_1 \prec y \wedge x_2 \prec y \wedge ax_1 \prec ax_2) \Rightarrow x_1 \prec x_2$.

Démonstration. L'hypothèse $x_1 \prec y$ entraîne d'après 2.2'

(1) $$ax_1 \prec ay$$

et l'hypothèse $ax_1 \prec ax_2$ entraîne d'après 2.1' l'existence d'un z tel que

(2) $z \prec x_2$ et (3) $az = ax_1$.

Enfin, l'hypothèse $x_2 \prec y$ entraîne d'après (2) et II.8 $z \prec y$. On a donc d'après (3) et 2.3' $z = x_1$, d'où $x_1 \prec x_2$ d'après (2).

THÉORÈME 2.5. *L'élément z dont l'existence résulte de l'axiome* II.12 *est déterminé par cet axiome d'une manière univoque.*

Démonstration. Si z_1 et z_2 satisfont aux conditions de l'axiome II.12, on a $z_2 \prec x$, $z_2 \prec y$ et $\bigwedge_{z'}[(z' \prec x \wedge z' \prec y) \Rightarrow z' \prec z_1]$. On en conclut immédiatement que $z_2 \prec z_1$. D'une manière analogue, $z_1 \prec z_2$. Reste à appliquer l'axiome II.7.

On est conduit par II.12 et 2.5 à la

DÉFINITION 2.3. $z = x \frown y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \{x, y \in C_0 \wedge z \prec x \wedge z \prec y \wedge \bigwedge_{z'} [(z' \prec x \wedge z' \prec y) \Rightarrow z' \prec z]\}$.

Les théorèmes suivants en sont des conséquences directes:

THÉORÈME 2.6. $\bigwedge_{x,y \in C_0} \bigvee_{1z \in C} z = x \frown y$.

THÉORÈME 2.7′. $\bigwedge_{x,y \in C_0} x \frown y \prec x$.

THÉORÈME 2.8. $(x, y \in C_0 \wedge z \prec x \wedge z \prec y) \Rightarrow z \prec x \frown y$.

THÉORÈME 2.9. $\bigwedge_{x,y \in C_0} x \frown y \in C_0$.

THÉORÈME 2.10. $\bigwedge_{x,y \in C_0} x \frown y = y \frown x$.

Nous allons établir encore quatre théorèmes qui suivent:

THÉORÈME 2.11. $\bigwedge_{x,y \in C_0} (x \frown y) \frown z = x \frown (y \frown z)$.

Démonstration. En posant $u = (x \frown y) \frown z$, on a d'après 2.7 $u \prec z$ et $u \prec x \frown y$, d'où

$$(1) \qquad u \prec x \qquad \text{et} \qquad (2) \qquad u \prec y.$$

On conclut de $u \prec z$, (2) et 2.8 que $u \prec y \frown z$ et, comme $y \frown z \in C_0$ d'après 2.10, on a $u \prec x \frown (y \frown z)$ en vertu de (1) et du théorème 2.8, c'est-à-dire $(x \frown y) \frown z \prec x \frown (y \frown z)$. La démonstration de la relation inverse est analogue. L'égalité à démontrer en résulte d'après l'axiome II.7.

THÉORÈME 2.12. $(x \prec y \wedge y \in C_0) \Leftrightarrow x \frown y = x$.

Démonstration. En admettant que $x \prec y$ et $y \in C_0$, on a $x \in C_0$ d'après II.9. Vu que $x \prec x$ d'après II.6, on vérifie aisément que $z = x$ satisfait aux conditions de la définition 2.3, donc que $x \frown y = x$. L'implication inverse résulte directement de la définition 2.3.

THÉORÈME 2.13. $(y, z \in C_0 \wedge x \prec y) \Rightarrow x \frown z \prec y \frown z$.

Démonstration. Les hypothèses entraînent $x \in C_0$ en vertu de II.9. On en conclut en vertu des théorèmes 2.7′ et 2.7″ que $x \frown z \prec x \prec y$ et $x \frown z \prec z$, d'où la thèse à démontrer d'après II.8, 2.9 et 2.8.

THÉORÈME. 2.14′. $\bigwedge_y \bigwedge_{x \in C_0} \bigvee_{1z} (z \prec y \wedge \alpha z = \alpha y \frown x)$.

Démonstration. L'axiome II.2′ et la définition 2.2′ entraînent l'existence d'un αy tel que $\alpha y \in C_0$. En vertu de 2.6 et 2.7′, il existe donc pour tout $x \in C_0$ un $u = \alpha y \frown x$ tel que $u \prec \alpha y$, ce qui entraîne en vertu de 2.1′ l'existence d'un z tel que $z \prec y$ et $u = \alpha z$.

Reste à démontrer l'unicité d'un tel z. Or si $z_1 \prec y$, $z_2 \prec y$ et $\alpha z_1 = \alpha y \frown x = \alpha z_2$, on a nécessairement $z_1 = z_2$ en vertu du théorème 2.3′.

Le théorème 2.14′ qui vient d'être démontré et son dual conduisent aux définitions suivantes:

DÉFINITION 2.4′. $z = y(x) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x \in C_0 \wedge z \prec y \wedge \alpha z = \alpha y \frown x)$.

DÉFINITION 2.4″. $z = (x)y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x \in C_0 \wedge z \prec y \wedge \beta z = \beta y \frown x)$.

Remarque 2.3. La forme de ces définitions met en évidence la dualité des notions $y(x)$ et $(x)y$. En remplaçant donc $y(x)$ par $(x)y$ et réciproquement dans une formule φ, en même temps que toutes les autres notions qui y figurent par leurs notions duales, on obtient la formule duale de φ.

Voici quatre conséquences directes de la définition 2.4′ et du théorème 2.14′:

Théorème 2.15′. $\bigwedge_y \bigwedge_{x\in C_0} \bigvee_{1z} z = y(x)$.

Théorème 2.16′. $y(x) \prec y$.

Théorème 2.17′. $\alpha[y(x)] = \alpha y \frown x$.

Théorème 2.18′. $y(\alpha y) = y$.

On les verra intervenir dans les démonstrations des théorèmes suivants:

Théorème 2.19′. $(x \prec y \wedge z \in C_0) \Rightarrow x(z) \prec y(z)$.

Démonstration. L'existence de $x(z)$ et de $y(z)$ résulte de l'hypothèse $z\in C_0$ en vertu du théorème 2.15′, et l'hypothèse $x\prec y$ entraîne $\alpha x \frown z \prec \alpha y \frown z$ d'après 2.2 et 2.13. Il en résulte d'après 2.17′ que

$$(1) \qquad \alpha[x(z)] \prec \alpha[y(z)]$$

et on a d'après 2.16′

$$(2) \qquad y(z) \prec y \qquad \text{et} \qquad (3) \qquad x(z) \prec x.$$

Enfin, $x \prec y$ entraîne d'après (3) et II.8 que $x(z) \prec y$. La thèse à démontrer s'ensuit en vertu de (1), (2) et du théorème 2.4.

Théorème 2.20′. $(x_1 \prec x_2 \wedge x_2 \in C_0) \Rightarrow y(x_1) \prec y(x_2)$.

Démonstration. L'existence de $y(x_1)$ et $y(x_2)$ résulte du théorème 2.15′ et de l'axiome II.9. L'hypothèse $x_1 \prec x_2$ entraîne $\alpha y \frown x_1 \prec \alpha y \frown x_2$ en vertu de 2.13 et 2.10, d'où $\alpha[y(x_1)] \prec \alpha[y(x_2)]$ en vertu de 2.17′. On a $y(x_1) \prec y$ et $y(x_2) \prec y$ en vertu de 2.16, d'où $y(x_1) \prec y(x_2)$ en vertu du théorème 2.4′.

Théorème 2.21′. $(x)y = y\big(\alpha[(x)y]\big)$.

Démonstration. En posant $z = (x)y$, on a $z \prec y$ d'après 2.16″, donc $\alpha z \prec \alpha y$ d'après 2.2′ et $\alpha z \frown \alpha y = \alpha z$ d'après 2.12. Vu que $z \prec y$ et $\alpha z \in C_0$, la thèse $z = y(\alpha z)$ en résulte d'après la définition 2.4′.

Théorème 2.22′. $(x\in C_0 \wedge y\cdot z \in C) \Rightarrow (x)[y\cdot z] = (x)y\cdot\big(\alpha[(x)y]\big)z$.

Démonstration. En posant $u = \alpha[(x)y]$, on a

$$(1) \qquad (x)y = y(u)$$

d'après 2.21′. L'hypothèse $y\cdot z\in C$ entraîne en vertu de II.3

$$(2) \qquad \alpha y = \beta z.$$

On a $\alpha[y(u)] = \alpha y \frown u$ et $\beta[(u)z] = \beta z \frown u$ en vertu des théorèmes 2.17′ et 2.17″ respectivement. Par conséquent, $\alpha[y(u)] = \beta[(u)z]$ d'après (2), d'où $\alpha[(x)y] = \beta[(u)z]$ d'après (1). On a donc d'après II.3

(3) $$(x)y\cdot(u)z\in C.$$

Le théorème 2.16″ entraîne

(4) $$(x)[y\cdot z]\prec y\cdot z$$

et $[(x)y\prec y\wedge(u)z\prec z]$, d'où en vertu de l'hypothèse que $y\cdot z\in C$, de (3) et de II.10,

(5) $$(x)y\cdot(u)z\prec y\cdot z.$$

Enfin, on a $\beta\{(x)[y\cdot z]\} = \beta[y\cdot z]\frown x = \beta y\frown x$ et $\beta[(x)y\cdot(u)z] = \beta[(x)y] = \beta y\frown x$ en vertu du théorème 2.17″ et de l'axiome II.4″, donc $\beta\{(x)[y\cdot z]\} = \beta[(x)y\cdot(u)z]$. La thèse à établir en résulte d'après (4), (5) et 2.3″.

THÉORÈME 2.23′. $\wedge_{x,y\in C_0}[z(x)](y) = z(x\frown y)$.

Démonstration. On déduit du théorème 2.16′ par une application itérée que

(1) $$[z(x)](y)\prec z \qquad \text{et} \qquad (2) \qquad z(x\frown y)\prec z.$$

On a d'après 2.17′ $\alpha\{[z(x)](y)\} = \alpha[z(x)]\frown y = (\alpha z\frown x)\frown y$ et $\alpha[z(x\frown y)] = \alpha z\frown(x\frown y)$, d'où $\alpha\{[z(x)](y)\} = \alpha[z(x\frown y)]$ d'après 2.11. La thèse à démontrer en résulte en vertu de (1), (2) et 2.3′.

THÉORÈME 2.24. $\wedge_{x_1,x_2\in C_0}(x_1)[y(x_2)] = [(x_1)y](x_2)$.

Démonstration. Posons

(1) $$y_1 = (x_1)y \qquad \text{et} \qquad (2) \qquad y_2 = y(x_2)$$

où $x_1, x_2\in C_0$. On a $y_2\prec y$ d'après (2) et 2.16′, d'où $(x_1)y_2\prec(x_1)y$ d'après 2.19″, c'est-à-dire $(x_1)y_2\prec y_1$. Il en résulte d'après 2.2′ et 2.13 que

(3) $$\alpha[(x_1)y_2]\frown x_2\prec\alpha y_1\frown x_2.$$

On a $(x_1)y_2 = y_2\big(\alpha[(x_1)y_2]\big) = [y(x_2)]\big(\alpha[(x_1)y_2]\big)$ d'après 2.21; donc

(4) $$(x_1)y_2 = y\big(x_2\frown\alpha[(x_1)y_2]\big)$$

d'après 2.23′. On a aussi $y_1(x_2) = [(x_1)y](x_2) = \big[y\big(\alpha[(x_1)y]\big)\big](x_2) = [y(\alpha y_1)](x_2)$ d'après 2.21′, donc

(5) $$y_1(x_2) = y(\alpha y_1\frown x_2)$$

d'après 2.23′. Enfin, il résulte de (3), (4) et (5) d'après le théorème 2.20′ que $(x_1)y_2\prec y_1(x_2)$.

On établit pareillement, en comparant $\beta[y_1(x_2)]$ et βy_2, la relation réciproque $y_1(x_2)\prec(x_1)y_2$. Reste à faire appel à l'axiome II.7.

THÉORÈME 2.25. $\wedge_{x,y}\vee_{1z} z = x(\beta y)\cdot(\alpha x)y$.

Démonstration. Les éléments $x(\beta y)$ et $(\alpha x)y$ étant déterminés d'après 2.15′ et 2.15″ d'une manière univoque, il suffit de montrer que $\alpha[x(\beta y)] = \beta[(\alpha x)y]$. Or cette égalité résulte directement des théorèmes 2.17′ et 2.17″.

DÉFINITION 2.5. $x \circ y \overset{\text{def}}{=} x(\beta y)\cdot(\alpha x)y$.

Il est facile de voir que l'opération $y \circ x$ est duale de $x \circ y$.

L'opération $x \circ y$ sera dite *pseudomultiplication* du groupoïde C.

THÉORÈME 2.26. $\bigwedge_{x,y} \bigvee_{1z} z = x \circ y$.

C'est la forme que prend le théorème 2.25 en appliquant la définition 2.5.

THÉORÈME 2.27. $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

Démonstration. Posons $u = (\alpha x)[y(\beta z)]$. On a donc $u \prec y$ d'après 2.16′ et 2.16″, d'où d'après 2.2′ et 2.12

(1) $$\alpha u \frown \alpha y = \alpha u$$

En appliquant successivement la définition 2.5, l'axiome II.4″, le théorème 2.22′, la définition de u, 2.23″, (1), 2.18′ et 2.23′ il vient

$$\begin{aligned} x \circ (y \circ z) &= x\big(\beta[y(\beta z)\cdot(\alpha y)z]\big)\cdot(\alpha x)[y(\beta z)\cdot(\alpha y)z] = \\ &= x\big(\beta[y(\beta z)]\big)\cdot(\alpha x)[y(\beta z)\cdot(\alpha y)z] = \\ &= x\big(\beta[y(\beta z)]\big)\cdot\{(\alpha x)[y(\beta z)]\cdot\big(\alpha[(\alpha x)[y(\beta z)]]\big)[(\alpha y)z]\} = \\ &= x\big(\beta[y(\beta z)]\big)\cdot\{u\cdot(\alpha u)[(\alpha y)z]\} = \\ &= x\big(\beta[y(\beta z)]\big)\cdot[u\cdot(\alpha u \frown \alpha y)z] = x\big(\beta[y(\beta z)]\big)\cdot[u\cdot(\alpha u)z] = \\ &= [x(\alpha x)]\big(\beta[y(\beta z)]\big)\cdot[u\cdot(\alpha u)z] = x\big(\alpha x \frown \beta[y(\beta z)]\big)\cdot[u\cdot(\alpha u)z]. \end{aligned}$$

Il en résulte que

(2) $$x \circ (y \circ z) = x(\beta u)\cdot[u\cdot(\alpha u)z],$$

vu que $\beta u = \alpha x \frown \beta[y(\beta z)]$ d'après la définition de u et en vertu de 2.17″.

Comme on a en même temps $u = [(\alpha x)y](\beta z)$ d'après 2.24, un procédé analogue conduit à l'égalité $(x \circ y) \circ z = [x(\beta u)\cdot u]\cdot(\alpha u)z$ qui entraîne la thèse du théorème en vertu de (2) et de II.1.

THÉORÈME 2.28′. $y \in C_0 \Rightarrow x \circ y = x(y)$.

Démonstration. L'hypothèse entraîne $(\alpha x)y \in C_0$ d'après 2.16″ et II.9, d'où $x \circ y = x(\beta y)\cdot(\alpha x)y = x(\beta y)$ d'après les définitions 2.5 et 2.1. Il en résulte la thèse du théorème, car $\beta y = y$ d'après le théorème 1.1.

THÉORÈME 2.29. $z = x \frown y \Leftrightarrow (x, y \in C_0 \wedge z = x \circ y)$.

Démonstration. Si $z = x \frown y$, on a $x, y \in C_0$ d'après le théorème 2.7′. Il suffit donc de prouver que

(1) $$x \frown y = x \circ y$$

pour tout couple $x, y \in C_0$. En effet, on a d'une part d'après le théorème 2.7′ et d'autre part d'après les théorèmes 2.9 et 1.1

(2) $x \frown y \prec x$ et (3) $\alpha(x \frown y) = x \frown y$

respectivement. De même, 2.16′ et 2.17′ entraînent

(4) $x(y) \prec x$ et (5) $\alpha[x(y)] = \alpha x \frown y = x \frown y$

respectivement. On conclut de (2), (4), (3), (5) et 2.3′ que $x \frown y = x(y)$, ce qui entraîne (1) d'après 2.28′.

THÉORÈME 2.30. $\wedge_{x \in C_0}[x \in C \wedge x \circ x = x]$.

Démonstration. D'après le théorème 1.1, on a $x = \alpha x$ pour tout $x \in C_0$. Il en résulte $x \circ x = x(x) = x(\alpha x) = x$ d'après 2.28′ et 2.18′, et la définition 1.1 entraîne $x \in C$.

THÉORÈME 2.31. $\wedge_{x,y \in C_0} x \circ y \in C_0$.

THÉORÈME 2.32. $\wedge_{x,y \in C_0} x \circ y = y \circ x$.

Les deux théorèmes sont des conséquences immédiates des théorèmes 2.9, 2.10 et 2.29.

THÉORÈME 2.33′. $x \prec y \Leftrightarrow x = y \circ \alpha x$.

Démonstration. On a d'une part $y \circ \alpha x = y(\alpha x)$ d'après 2.28′, d'où

(1) $$y \circ \alpha x \prec y$$

d'après 2.16′. En admettant que $x \prec y$, on a d'autre part $\alpha x \prec \alpha y$ d'après 2.2′, d'où

(2) $$\alpha x \frown \alpha y = \alpha x$$

d'après 2.12. On a en outre

(3) $$\alpha[y \circ \alpha x] = \alpha[y(\alpha x)] = \alpha y \frown \alpha x$$

d'après 2.28′ et 2.17′. On conclut de (2), (3) et 2.10 que $\alpha x = \alpha[y \circ \alpha x]$, d'où $x = y \circ \alpha x$ d'après $x \prec y$, (1) et le théorème 2.3′.

Réciproquement, on a $y \circ \alpha x = y(\alpha x) \prec y$ d'après 2.28′ et 2.16′, donc $x = y \circ \alpha x \Rightarrow x \prec y$.

THÉORÈME 2.34. $x = y \circ \alpha x \Leftrightarrow x = \beta x \circ y$.

C'est une conséquence directe des théorèmes 2.33′ et 2.33″.

THÉORÈME 2.35′. $\wedge_x \vee_y y = \alpha x$.

C'est une conséquence de la définition 2.2′ et de l'axiome II.2′.

THÉORÈME 2.36. $z = x \cdot y \Leftrightarrow (z = x \circ y \wedge \alpha x = \beta y)$.

Démonstration. Si $z = x \cdot y$, on a l'égalité $\alpha x = \beta y$ en vertu de II.3. Il suffit donc de prouver que l'on a $x \cdot y = x \circ y$ pour tout couple x, y satisfaisant à cette égalité. Or on a en effet $x \circ y = x(\beta y) \cdot (\alpha x) y =$

$= x(\alpha x)\cdot(\beta y)y = x\cdot y$ en vertu de la définition 2.5 et des théorèmes 2.18′ et 2.18″.

THÉORÈME 2.37. $\bigwedge_x \bigvee_y (y \circ x = \alpha x \wedge x \circ y = \beta x)$.

Démonstration. Tout y dont l'existence résulte de II.5 satisfait aux deux conditions en vertu de 2.36.

THÉORÈME 2.38′. $y = \alpha x \Leftrightarrow [y \in C_0 \wedge x \circ y = x \wedge \bigwedge_{z \in C_0}(x \circ z = x \Rightarrow \Rightarrow y \circ z = y)]$.

Démonstration. Si $y = \alpha x$, on a d'après la définition 2.2′ et d'après les théorèmes 2.28′ et 2.18′

(1) $\qquad y \in C_0 \qquad$ et $\qquad$ (2) $\qquad x \circ y = x(y) = x$

respectivement. Si à présent $z \in C_0$ et $x \circ z = x$, on a $x = x(z)$ d'après 2.28′, d'où $\alpha x = \alpha x \frown z$, c'est-à-dire $y = y \frown z$ d'après 2.17′ et par conséquent $y \circ z = y$ d'après 2.29. Ainsi, $y = \alpha x$ entraîne également

(3) $$\bigwedge_{z \in C_0}(x \circ z = x \Rightarrow y \circ z = y).$$

On a donc

(4) $$y = \alpha x \Rightarrow [y \in C_0 \wedge x \circ y = x \wedge \bigwedge_{z \in C_0}(x \circ z = x \Rightarrow y \circ z = y)]$$

d'où

(5) $\alpha x \in C_0$, (6) $x \circ \alpha x = x$, (7) $\bigwedge_{z \in C_0}(x \circ z = x \Rightarrow \alpha x \circ z = \alpha x)$.

Réciproquement, si y satisfait à (1), (2) et (3), on a $\alpha x \circ y = \alpha x$ d'après (1), (2) et (7), en même temps que $y \circ \alpha x = y$ d'après (5), (6) et (3). Les deux égalités entraînent $y = \alpha x$ d'après 2.32. L'implication inverse à (4) est ainsi établie.

3. Appelons *pseudogroupe élémentaire* la structure satisfaisant au système suivant d'axiomes et de définitions, qui sera dit *système* III:

AXIOME III.1. $\bigwedge_{x,y \in C} \bigvee_{1 z \in C} z = x \circ y$.

AXIOME III.2. $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

AXIOME III.3. $x, y \in C_0 \Rightarrow x \circ y \in C_0$.

AXIOME III.4. $x, y \in C_0 \Rightarrow x \circ y = y \circ x$.

AXIOME III.5. $x \in C_0 \Rightarrow (x \in C \wedge x \circ x = x)$.

DÉFINITION 3.1′. $y = \alpha x \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} [y \in C_0 \wedge x \circ y = x \wedge \bigwedge_{z \in C_0}(x \circ z = x \Rightarrow \Rightarrow y \circ z = y)]$.

DÉFINITION 3.1″. $y = \beta x \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} [y \in C_0 \wedge y \circ x = x \wedge \bigwedge_{z \in C_0}(z \circ x = x \Rightarrow \Rightarrow z \circ y = y)]$.

AXIOME III.6′. $\bigwedge_{x \in C} \bigvee_{y \in C} y = \alpha x$.

AXIOME III.6″. $\bigwedge_{x \in C} \bigvee_{y \in C} y = \beta x$.

AXIOME III.7. $\bigwedge_{x \in C} \bigvee_{y \in C} (y \circ x = \alpha x \wedge x \circ y = \beta x)$.

AXIOME III.8. $x = y \circ \alpha x \Leftrightarrow x = \beta x \circ y$.

Les définitions 3.1′ et 3.1″ exigent la démonstration préalable de l'unicité des notions (duales) αx et βx. La voici

THÉORÈME 3.1′. *Les conditions*

$$(1_i)\quad y_i \epsilon C_0,\qquad (2_i)\quad x\circ y_i = x,\qquad (3_i)\quad \bigwedge_{z\epsilon C_0}(x\circ z = x \Rightarrow y_i\circ z = y_i),$$

où $i=1$ *et* 2, *entraînent* $y_1 = y_2$.

Démonstration. (1_1), (2_1) et (3_2) entraînent

$$(4)\qquad y_2\circ y_1 = y_2;$$

de même, (1_2), (2_2) et (3_1) entraînent

$$(5)\qquad y_1\circ y_2 = y_1.$$

Enfin, (1_1), (1_2), (4) et (5) entraînent $y_1 = y_2$ d'après l'axiome III.4.

Le théorème dual est vrai en vertu de la remarque suivante:

REMARQUE 3.1. Il est évident que le système III est ipso-dual par rapport aux couples de notions duales αx, βx et $x\circ y$, $y\circ x$ les mêmes que dans le système II). On peut donc en particulier omettre la démonstration, même sans le signaler, de tout théorème dual d'un autre qui a été déduit des axiomes du système III.

REMARQUE 3.2. Il est facile de vérifier que tous les axiomes et définitions du système III se laissent déduire des axiomes du système II et des définitions 2.1-2.5, à savoir par l'application successive des théorèmes 2.26, 2.27, 2.31, 2.32, 2.30, 2.38, 2.35, 2.37 et 2.34.

REMARQUE 3.3. On verra (p. 183) que le système III d'axiomes du pseudogroupe élémentaire est plus général que celui du pseudogroupe dû à Ehresmann (voir [3], p. 308-310), où d'ailleurs seul l'axiome III.8 est différent:

$$\text{IV.8.}\quad \bigwedge_{A\subset C}\bigvee_{y\epsilon C_0}\Big\{(\bigwedge_{x\epsilon A} y \prec x)\wedge\big[\emptyset\neq A\subset C_0\Rightarrow \bigwedge_{z\epsilon C}\big((\bigwedge_{x\epsilon A} z\prec x)\Rightarrow z\prec y\big)\big]\Big\}$$

et précédé par la

DÉFINITION 4.1. $x\prec y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \bigvee_{z\epsilon C_0}(x = y\circ z)$.

C'est donc un axiome non-élémentaire [1].

La plupart des théorèmes sur le pseudogroupe élémentaire qui seront déduits ici des axiomes et définitions du système III serviront à prouver l'équivalence entré la notion de pseudogroupe élémentaire et celle de groupoïde inductif élémentaire.

---

[1] Dans le travail précité d'Ehresmann, cet axiome est de la forme

$$\bigwedge_{A\subset C_0}\bigvee_{y\epsilon C_0}\{(\bigwedge_{x\epsilon A} y\prec x)\wedge \bigwedge_{z\epsilon C}[(\bigwedge_{x\epsilon A} z\prec x)\Rightarrow z\prec y]\}.$$

Or il est évident que A désigne ici un ensemble non-vide. En outre, certaines considérations ultérieures y sont basées sur l'existence du plus petit élément dans l'ensemble C, tandis que l'axiome en question n'en entraîne l'existencę que dans l'ensemble C_0.

THÉORÈME 3.2'. $\bigwedge_x \alpha x \in C_0$.

THÉORÈME 3.3'. $(y \in C_0 \wedge x \circ y = x) \Rightarrow \alpha x \circ y = \alpha x$.

Les deux théorèmes résultent directement de la définition 3.1'.

THÉORÈME 3.4'. $x \in C_0 \Leftrightarrow \alpha x = x$.

Démonstration. L'implication $\alpha x = x \Rightarrow x \in C_0$ résulte immédiatement du théorème 3.2'. Pour en établir l'inverse, admettons que $x \in C_0$; on a donc $x \circ x = x$ d'après l'axiome III.5. Il en résulte $x = \alpha x$ en vertu de la formule évidente $\bigwedge_{z \in C_0}(x \circ z = x \Rightarrow x \circ z = x)$ et de la définition 3.1'.

THÉORÈME 3.5'. $\alpha\alpha x = \alpha x$.

THÉORÈME 3.5''. $\beta\beta x = \beta x$.

THÉORÈME 3.6'. $\beta\alpha x = \alpha x$.

THÉORÈME 3.6''. $\alpha\beta x = \beta x$.

Ce sont des conséquences immédiates des théorèmes 3.2 et 3.4.

DÉFINITION 3.2. $x \prec y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x = y \circ \alpha x$.

THÉORÈME 3.7. $x \prec y \Leftrightarrow x = \beta x \circ y$.

C'est une conséquence immédiate de la définition 3.2 et de l'axiome III.8.

REMARQUE 3.4. En comparant le théorème 3.7 à la définition 3.2, on voit que, tout comme dans les systèmes I et II (voir p. 164), la notion $\prec$ est duale d'elle même aussi dans le système III.

THÉORÈME 3.8'. $y \in C_0 \Rightarrow x \circ y \prec x$.

Démonstration. Posons $z = x \circ y$. L'hypothèse $y \in C_0$ entraîne alors $z \circ y = (x \circ y) \circ y = x \circ (y \circ y) = x \circ y$, d'après III.2 et III.5; on a donc $z \circ y = z$. Il en résulte d'après 3.3' que $\alpha z \circ y = \alpha z$, d'où $x \circ \alpha z = x \circ (y \circ \alpha z) = (x \circ y) \circ \alpha z = z \circ \alpha z = z$ d'après III.2 et III.4, donc $z \prec x$ d'après la définition 3.2.

THÉORÈME 3.9'. $x \prec y \Leftrightarrow \bigvee_{z \in C_0} x = y \circ z$.

Démonstration. En posant $z = \alpha x$, on a $z \in C_0$ et l'hypothèse $x \prec y$ entraîne que $x = y \circ z$ d'après la définition 3.2. Réciproquement, les hypothèses $x = y \circ z$ et $z \in C_0$ entraînent $x = y \circ z \prec y$ d'après 3.8'.

THÉORÈME 3.10'. $x \in C_0 \Rightarrow (x \prec y \Leftrightarrow x = y \circ x)$.

C'est une conséquence immédiate de la définition 3.2 et du théorème 3.4'.

THÉORÈME 3.11'. $x, y \in C_0 \Rightarrow (x \prec y \Leftrightarrow \bigvee_{z \in C} x = y \circ z)$.

Démonstration. L'implication $x \prec y \Rightarrow \bigvee_z x = y \circ z$ résulte directement de la définition 3.2, même pour x et y n'appartenant pas à C_0.

Réciproquement, si $x, y \in C_0$ et $x = y \circ z$, on a $y \circ x = y \circ (y \circ z) = (y \circ y) \circ z = y \circ z = x$ d'après les axiomes III.2 et III.5, donc $x \prec y$ d'après le théorème 3.10'.

THÉORÈME 3.12'. $\alpha(x \circ y) \prec\!\!\!\sim \alpha y$.

Démonstration. En posant $x \circ y = z$, on a $z \circ \alpha y = (x \circ y) \circ \alpha y = x \circ (y \circ \alpha y) = x \circ y = z$, d'où $\alpha z \circ \alpha y = \alpha z$ d'après 3.2' et 3.3', donc $\alpha z \prec\!\!\!\sim \alpha y$ d'après le théorème 3.10''.

THÉORÈME 3.13'. $x \prec\!\!\!\sim y \Rightarrow \alpha x \prec\!\!\!\sim \alpha y$.

Démonstration. Si $x \prec\!\!\!\sim y$, on a $x = \beta x \circ y$ d'après 3.7, donc $\alpha x \prec\!\!\!\sim \alpha y$ d'après 3.12'.

THÉORÈME 3.14'. $x \prec\!\!\!\sim y \Rightarrow z \circ x \prec\!\!\!\sim z \circ y$.

Démonstration. Si $x \prec\!\!\!\sim y$, on a $x = y \circ \alpha x$ d'après la définition 3.2, donc $z \circ x = z \circ (y \circ \alpha x) = (z \circ y) \circ \alpha x$ d'après III.2. La thèse qu'il fallait établir en résulte d'après 3.2' et 3.9'.

THÉORÈME 3.15. $x \prec\!\!\!\sim x$.

C'est une conséquence directe des définitions 3.1' et 3.2.

THÉORÈME 3.16. $(x \prec\!\!\!\sim y \wedge y \prec\!\!\!\sim x) \Rightarrow x = y$.

Démonstration. L'hypothèse entraîne $x = y \circ \alpha x$ et $y = x \circ \alpha y$ d'après la définition 3.2. Par conséquent, $x = y \circ \alpha x = (x \circ \alpha y) \circ \alpha x = x \circ (\alpha y \circ \alpha x) = x \circ (\alpha x \circ \alpha y) = (x \circ \alpha x) \circ \alpha y = x \circ \alpha y = y$ d'après III.2, III.4, 3.2' et la définition 3.1'.

THÉORÈME 3.17. $(x \prec\!\!\!\sim y \wedge y \prec\!\!\!\sim z) \Rightarrow x \prec\!\!\!\sim z$.

Démonstration. L'hypothèse entraîne $x = y \circ \alpha x$ et $y = z \circ \alpha y$ d'après la définition 3.2. Il vient donc $x = y \circ \alpha x = (z \circ \alpha y) \circ \alpha x = z \circ (\alpha y \circ \alpha x)$. Or $\alpha y \circ \alpha x \in C_0$ d'après 3.2' et III.3, d'où $x \prec\!\!\!\sim z$ d'après le théorème 3.9'.

THÉORÈME 3.18'. $(x_1, x_2 \prec\!\!\!\sim y \wedge \alpha x_1 = \alpha x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Démonstration. L'hypothèse $x_1, x_2 \prec\!\!\!\sim y$ entraîne $x_1 = y \circ \alpha x_1$ et $x_2 = y \circ \alpha x_2$ en vertu de la définition 3.2. Par conséquent, l'hypothèse $\alpha x_1 = \alpha x_2$ entraîne la thèse $x_1 = x_2$.

THÉORÈME 3.19. $(x \prec\!\!\!\sim y \wedge y \in C_0) \Rightarrow x \in C_0$.

Démonstration. L'hypothèse $y \in C_0$ entraîne $y = \alpha y$ d'après 3.4'. Par conséquent, l'hypothèse $x \prec\!\!\!\sim y$, c'est-à-dire $x = y \circ \alpha x$, prend la forme $x = \alpha y \circ \alpha x$, d'où la thèse $x \in C_0$ d'après 3.2' et III.3.

THÉORÈME 3.20'. $y \in C_0 \Rightarrow [\alpha(x \circ y) = \alpha x \circ y]$.

Démonstration. Si $y \in C_0$, on a d'après 3.2', III.3 et 3.4'

$$\alpha(\alpha x \circ y) = \alpha x \circ y. \tag{1}$$

On a aussi $x \circ y = x \circ \alpha x \circ y$ d'après la définition 3.1', donc en vertu de 3.12'

$$\alpha(x \circ y) \prec\!\!\!\sim \alpha(\alpha x \circ y). \tag{2}$$

En vertu de III.7, il existe un z tel que $z \circ x = \alpha x$, d'où $\alpha x \circ y = z \circ x \circ y$. On en conclut d'après 3.12′ que

(3) $$\alpha(\alpha x \circ y) \prec \alpha(x \circ y).$$

La thèse à établir résulte de (1), (2) et (3) en vertu de 3.16.

THÉORÈME 3.21′. $\bigwedge_x \bigvee_y (y \circ x = \alpha x \wedge x \circ y = \beta x \wedge \alpha x = \beta y)$.

Démonstration. Il existe d'après III.7 pour tout x un z tel que

(1) $z \circ x = \alpha x$ et (2) $x \circ z = \beta x$.

Il suffit de montrer que les conditions du théorème sont satisfaites pour y défini par l'égalité

(3) $$y = z \circ x \circ z.$$

Or (1) et (3) entraînent $y \circ x = z \circ x \circ z \circ x = \alpha x \circ \alpha x = \alpha x$ en vertu de III.2, III.5 et 3.2′. Pareillement, (2) et (3) entraînent $x \circ y = x \circ z \circ x \circ z = \beta x \circ \beta x = \beta x$. Enfin, (1) et (3) entraînent $\beta y = \beta(z \circ x \circ z) = \beta(\alpha x \circ z) = \alpha x \circ \beta z = \beta z \circ \alpha x = \beta z \circ (z \circ x) = (\beta z \circ z) \circ x = z \circ x = \alpha x$ en vertu des axiomes III.2 et III.4, des théorèmes 3.2′ et 3.20″ et de la définition 3.1″.

THÉORÈME 3.22′. *Si* $y_i \circ x = \alpha x$, $x \circ y_i = \beta x$ *et* $\beta y_i = \alpha x$ *pour* $i = 1$ *et* 2, *on a* $y_1 = y_2$.

Démonstration. Les hypothèses entraînent $y_1 = \beta y_1 \circ y_1 = \alpha x \circ y_1 = y_2 \circ x \circ y_1 = y_2 \circ \beta x = y_2 \circ x \circ y_2 = \alpha x \circ y_2 = \beta y_2 \circ y_2 = y_2$ en vertu de la définition 3.1″ et de l'axiome III.2.

Les deux théorèmes 3.21′ et 3.22′ permettent d'introduire la définition suivante:

DÉFINITION 3.3. $y = \bar{x} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (y \circ x = \alpha x \wedge x \circ y = \beta x \wedge \beta y = \alpha x)$.

THÉORÈME 3.23. $\bigwedge_x \bigvee_{1y} y = \bar{x}$.

C'est une conséquence immédiate de la définition 3.3 et des théorèmes 3.21′ et 3.22′.

La notion $\bar{x}$ est ipso-duale. Pour le démontrer, il suffit de prouver que $y = \bar{x} \Leftrightarrow (x \circ y = \beta x \wedge y \circ x = \alpha x \wedge \alpha y = \beta x)$ et il suffit pour cela de montrer que $(x \circ y = \beta x \wedge y \circ x = \alpha x) \Rightarrow (\beta y = \alpha x \Leftrightarrow \alpha y = \beta x)$ ou même seulement que $(x \circ y = \beta x \wedge y \circ x = \alpha x) \Rightarrow (\beta y = \alpha x \Rightarrow \alpha y = \beta x)$, car l'implication inverse $\alpha y = \beta x \Rightarrow \beta y = \alpha x$ a lieu par dualité. La démonstration se réduit ainsi au théorème suivant:

THÉORÈME 3.24. $y = \bar{x} \Rightarrow \alpha y = \beta x$.

Démonstration. On a $y \circ x = \alpha x$, $x \circ y = \beta x$ et $\beta y = \alpha x$ par définition de $\bar{x}$. Il en résulte que $\alpha y = \alpha(\beta y \circ y) = \alpha(\alpha x \circ y) = \alpha(y \circ x \circ y) = \alpha(y \circ \beta x) = \alpha y \circ \beta x = \beta x \circ \alpha y = x \circ y \circ \alpha y = x \circ y = \beta x$

d'après les théorèmes 3.2′, 3.2″, 3.20′, les axiomes III.2, III.4 et les définitions 3.1′ et 3.1″.

L'ipso-dualité de la notion $\bar{x}$ est ainsi établie.

Le théorème 3.24 implique aussitôt en vertu de la définition 3.3 deux théorèmes suivants:

THÉORÈME 3.25. $\bigwedge_x(\alpha\bar{x} = \beta x \wedge \beta\bar{x} = \alpha x)$.

THÉORÈME 3.26. $\bigwedge_x \bar{\bar{x}} = x$.

THÉORÈME 3.27. $x \in C_0 \Rightarrow \bar{x} = x$.

Démonstration. Si $x \in C_0$, on a $\alpha x = x = \beta x$ et $x \circ x = x$ d'après 3.4 et III.5, donc $x \circ x = \alpha x$, $x \circ x = \beta x$ et $\beta x = \alpha x$. Reste à appliquer la définition 3.3.

THÉORÈME 3.28. $\bigwedge_x \bigvee_y x \circ y \circ x = x$.

Démonstration. Il suffit de poser $y = \bar{x}$.

THÉORÈME 3.29′. $x \circ y = x \Leftrightarrow \alpha x \circ y = \alpha x \Leftrightarrow \alpha x \precsim y$.

Démonstration. On a d'une part $x \circ y = x \Leftrightarrow \bar{x} \circ x \circ y = \bar{x} \circ x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \alpha x \circ y = \alpha x$ d'après 3.23 et la définition 3.3, et d'autre part $\alpha x \circ y = \alpha x \Leftrightarrow \alpha x \precsim y$ d'après les théorèmes 3.2′ et 3.10″.

THÉORÈME 3.30′. $\alpha x \precsim \alpha y \Leftrightarrow \bigvee_{z \in C} x = z \circ y$.

Démonstration. Si $x = z \circ y$, on a $\alpha x \precsim \alpha y$ d'après 3.12′. Réciproquement, si $\alpha x \precsim \alpha y$, on a $x \circ \alpha y = x$ en vertu de 3.29′. Reste à poser $z = x \circ \bar{y}$ pour avoir $x = x \circ \alpha y = x \circ \bar{y} \circ y = z \circ y$ d'après la définition 3.3.

THÉORÈME 3.31′. $\alpha x = \beta y \Rightarrow \alpha(x \circ y) = \alpha y$.

Démonstration. En posant $u = x \circ y$, l'hypothèse $\alpha x = \beta y$ entraîne $\bar{x} \circ u = \bar{x} \circ x \circ y = \alpha x \circ y = \beta y \circ y = y$. On a donc $\alpha u \precsim \alpha y$ et $\alpha y \precsim \alpha u$ d'après 3.12′ et par conséquent $\alpha u = \alpha y$ d'après 3.16.

DÉFINITION 3.4. Lorsque $\alpha x = \beta y$, et seulement alors, on écrira

$$x \cdot y \overset{\text{def}}{=} x \circ y$$

et l'on dira que $x \cdot y \in C$. L'opération $x \cdot y$ ainsi définie sera appelée *multiplication.*

Elle n'est donc pas définie pour tous les couples x,y. L'axiome III.1 implique que si $x \cdot y \in C$, le produit $x \cdot y$ est déterminé d'une manière univoque. Il est évident que la notion duale de $x \cdot y$ est $y \cdot x$.

THÉORÈME 3.32′. $\bigwedge_{x \in C} x = x \cdot \alpha x \in C$.

C'est une conséquence immédiate de la définition 3.4 et du théorème 3.6′.

THÉORÈME 3.33′. $\bigwedge_{x \in C} \alpha x = \bar{x} \cdot x \in C$.

C'est une conséquence immédiate des définitions 3.4 et 3.3.

THÉORÈME 3.34′. $x \in C_0 \Leftrightarrow \bigwedge_{y \in C}(x \cdot y \in C \Rightarrow x \cdot y = y)$.

Démonstration. Si $x \in C_0$, on a $ax = x$ d'après le théorème 3.4′. D'après la définition 3.4, $x \cdot y \in C$ entraîne donc $\beta y = ax = x$ quel que soit y. Il en résulte d'après 3.32″ que $x \cdot y = \beta y \cdot y = y$.

Réciproquement, $\bigwedge_{y \in C}(x \cdot y \in C \Rightarrow x \cdot y = y)$ entraîne en particulier $(x \cdot ax \in C \Rightarrow x \cdot ax = ax)$ pour $y = ax$. On a donc $x \cdot ax = ax$ en vertu de 3.32′, d'où $x = ax$ et $x \in C_0$ d'après 3.4′.

THÉORÈME 3.35. $x \in C_0 \Leftrightarrow \{x \in C \wedge \bigwedge_{y \in C}[(x \cdot y \in C \Rightarrow x \cdot y = y) \wedge (y \cdot x \in C \Rightarrow y \cdot x = y)]\}$.

C'est une conséquence directe de l'axiome III.5 et des théorèmes 3.34′ et 3.34″.

THÉORÈME 3.36. $[(x \cdot y) \cdot z \in C \wedge x \cdot (y \cdot z) \in C] \Rightarrow (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

C'est une conséquence directe de l'axiome III.2 et de la définition 3.4.

THÉORÈME 3.37′. $\bigwedge_{x \in C} \bigvee_{y \in C_0} x \cdot y \in C$.

C'est une conséquence immédiate de l'axiome III.6′ et du théorème 3.32′.

THÉORÈME 3.38′. $(y_1, y_2 \in C_0 \wedge x, x \cdot y_1, x \cdot y_2 \in C) \Rightarrow y_1 = y_2$.

Démonstration. Si $x \cdot y_1 \in C$ et $x \cdot y_2 \in C$, on a $\beta y_1 = ax = \beta y_2$ en vertu de la définition 3.4, et si $y_1 \in C_0$ et $y_2 \in C_0$, on a $\beta y_1 = y_1$ et $\beta y_2 = y_2$ d'après le théorème 3.4″. On a donc finalement $y_1 = y_2$.

THÉORÈME 3.39′. $\bigwedge_{x \in C} \bigvee_{1 y \in C_0} x \cdot y \in C$.

C'est une conséquence immédiate des théorèmes 3.37′ et 3.38′.

THÉORÈME 3.40′. $y = ax \Leftrightarrow (y \in C_0 \wedge x \cdot y \in C)$.

Démonstration. L'implication $y = ax \Rightarrow (y \in C_0 \wedge x \cdot y \in C)$ résulte directement des théorèmes 3.2′ et 3.32′. Quant à l'implication inverse, $y \in C_0$ et $x \cdot y \in C$ entraînent $\beta y = y$ et $ax = \beta y$ en vertu du théorème 3.4″ et de la définition 3.4.

THÉORÈME 3.41′. $x \cdot y \in C \Rightarrow \alpha(x \cdot y) = \alpha y$.

C'est une conséquence immédiate de la définition 3.4 et du théorème 3.31′.

THÉORÈME 3.42. $\bigwedge_x \bigvee_{1 y}(y \cdot x = ax \wedge x \cdot y = \beta x)$.

Démonstration. D'après la définition 3.4, on a les égalités $y \cdot x = ax$, $x \cdot y = \beta x$, $\beta y = ax$ et $\beta x = \alpha y$ pour tout y satisfaisant aux conditions du théorème. D'après la définition 3.3 et le théorème 3.23, il existe un et un seul $y = \bar{x}$ satisfaisant aux trois premières égalités. Enfin, d'après le théorème 3.24, la quatrième est satisfaite par $y = \bar{x}$.

THÉORÈME 3.43. $(x' \prec x \wedge y' \prec y \wedge x' \cdot y', x \cdot y \in C) \Rightarrow x' \cdot y' \prec x \cdot y$.

Démonstration. Les hypothèses entraînent que $x' = x \circ ax'$, $y' = y \circ ay'$, $ax' = \beta y'$, $x' \cdot y' = x' \circ y'$ et $x \cdot y = x \circ y$ d'après les définitions 3.2 et 3.4. Par conséquent, $x' \cdot y' = x' \circ y' = (x \circ ax') \circ y' =$

$= (x \circ \beta y') \circ y' = x \circ y' = x \circ (y \circ \alpha y') = (x \circ y) \circ \alpha y' = (x \cdot y) \circ \alpha y'$ d'après l'axiome III.2, donc $x' \cdot y' \precsim x \cdot y$ d'après les théorèmes 3.2' et 3.9'.

THÉORÈME 3.44. $(z \precsim x \cdot y \wedge x \cdot y \in C) \Rightarrow \bigvee_{x',y'}(x' \precsim x \wedge y' \precsim y \wedge z = x' \cdot y')$.

Démonstration. Les hypothèses entraînent

(1) $\alpha x = \beta y$, (2) $x \circ y = x \cdot y$ et (3) $z = (x \cdot y) \circ \alpha z$.

En posant

(4) $y' = y \circ \alpha z$ et (5) $x' = x \circ \beta y'$,

on a d'après 3.2 et 3.9'

(6) $x' \precsim x$ et (7) $y' \precsim y$,

d'où $y' = \beta y' \circ y$ en vertu de 3.7. Il en résulte d'après (5), 3.2 et 3.20 que $\alpha x' = \alpha x \circ \beta y'$ et $\beta y' = \beta y' \circ \beta y$, d'où $\alpha x' = \beta y'$ en vertu de (1) et de l'axiome III.4. D'après la définition 3.4, on a donc $x' \cdot y' \in C$ et $x' \circ y' = x' \cdot y'$, d'où $x' \cdot y' = x' \circ y' = (x \circ \beta y') \circ y' = x \circ y' = x \circ (y \circ \alpha z) = (x \circ y) \circ \alpha z = (x \cdot y) \circ \alpha z = z$ en vertu de (5), (4), (2) et (3). Les relations (6), (7) et l'égalité qui vient d'être établie constituent les trois thèses qu'il s'agissait d'établir.

THÉORÈME 3.45. $(x, y \in C_0 \wedge z = x \circ y) \Rightarrow \{z \precsim x \wedge z \precsim y \wedge \bigwedge_{z' \in C}[(z' \precsim x \wedge z' \precsim y) \Rightarrow z' \precsim z]\}$.

Démonstration. L'hypothèse entraîne $(z \precsim x \wedge z \precsim y)$ d'après 3.9. En admettant que $(z' \precsim x \wedge z' \precsim y)$, on a $z' \in C_0$ d'après 3.19 et par conséquent $z' = x \circ z'$ et $z' = y \circ z'$ d'après 3.10'. Il en résulte que $z' = x \circ (y \circ z') = (x \circ y) \circ z' = z \circ z'$, d'où $z' \precsim z$ en vertu de 3.9', ce qui achève la démonstration.

THÉORÈME 3.46. $\{x, y \in C_0 \wedge z \precsim x \wedge z \precsim y \wedge \bigwedge_{z' \in C}[(z' \precsim x \wedge z' \precsim y) \Rightarrow z' \precsim z]\} \Rightarrow z = x \circ y$.

Démonstration. En admettant que

(1) $x, y \in C_0$, (2) $(z \precsim x \wedge z \precsim y)$,

(3) $\bigwedge_{z'}[(z' \precsim x \wedge z' \precsim y) \Rightarrow z' \precsim z]$,

le pseudoproduit $x \circ y$ satisfait en vertu de (1) et de 3.45 aux conditions

(4) $(x \circ y \precsim x \wedge x \circ y \precsim y)$ et (5) $\bigwedge_u[(u \precsim x \wedge u \precsim y) \Rightarrow u \precsim x \circ y]$.

Il résulte de (4) et (3) que $x \circ y \precsim z$ et de (2) et (5) que $z \precsim x \circ y$. On a donc $z = x \circ y$ d'après 3.16.

THÉORÈME 3.47. $\bigwedge_{x,y \in C_0} \bigvee_{1 z \in C}\{z \precsim x \wedge z \precsim y \wedge \bigwedge_{z'}[(z' \precsim x \wedge z' \precsim y) \Rightarrow z' \precsim z]\}$.

C'est une conséquence des théorèmes 3.45, 3.46 et de l'axiome III.1.

Le théorème 3.47 permet d'introduire une nouvelle définition, à savoir

DÉFINITION 3.5. $z = x \frown y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \{x,\ y \epsilon C_0 \wedge z \prec x \wedge z \prec y \wedge \bigwedge_{z'} [(z' \prec x \wedge \wedge z' \prec y) \Rightarrow z' \prec z]\}$.

La notion $x \frown y$ ainsi définie est évidemment ipso-duale.

THÉORÈME 3.48. $z = x \frown y \Leftrightarrow (x, y \epsilon C_0 \wedge z = x \circ y)$.

THÉORÈME 3.49. $\bigwedge_{x,y \epsilon C_0} \bigvee_{1z \epsilon C} z = x \frown y$.

Les deux théorèmes sont des conséquences des théorèmes 3.45-3.47 et de la définition 3.5.

THÉORÈME 3.50′. $x \epsilon C_0 \Rightarrow [z = y \circ x \Leftrightarrow (z \prec y \wedge az = ay \frown x)]$.

Démonstration. Si $x \epsilon C_0$ et $z = y \circ x$, on a $z \prec y$ et $az = ay \frown x$ en vertu des théorèmes 3.9′, 3.20′, 3.2′ et 3.48. Réciproquement, si $x \epsilon C_0$,

(1) $z \prec y$ et (2) $az = ay \frown x$,

alors on a en vertu des théorèmes 3.8′, 3.20′, 3.2′ et 3.48

(3) $y \circ x \prec y$ et (4) $a(y \circ x) = ay \frown x$.

On a donc $az = a(y \circ x)$ d'après (2) et (4) et par conséquent $z = y \circ x$ d'après (1), (3) et 3.18′.

L'axiome III.1 et le théorème 3.50′ assurent pour tout couple x, y où $x \epsilon C_0$ et $y \epsilon C$ l'existence et l'unicité d'un z tel que $z \prec y$ et $az = ay \frown x$. On peut donc admettre deux définitions suivantes, duales l'une de l'autre:

DÉFINITION 3.6′. $z = y(x) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x \epsilon C_0 \wedge z \prec y \wedge az = ay \frown x)$.

DÉFINITION 3.6″. $z = (x)y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x \epsilon C_0 \wedge z \prec y \wedge \beta z = \beta y \frown x)$.

En vertu de ces définitions, les théorèmes 3.50′ et 3.50″ prennent la forme du couple de théorèmes qui suit:

THÉORÈME 3.51′. $x \epsilon C_0 \Rightarrow y(x) = y \circ x$.

THÉORÈME 3.51″. $x \epsilon C_0 \Rightarrow (x)y = x \circ y$.

THÉORÈME 3.52. $x \circ y = x(\beta y) \cdot (ax)y$.

Démonstration. On a $x(\beta y) = x \circ \beta y$ et $(ax)y = ax \circ y$ d'après le théorème 3.51, donc $a[x(\beta y)] = ax \circ \beta y = \beta[(ax)y]$ d'après les théorèmes 3.2 et 3.20. Il s'ensuit que $x(\beta y) \circ (ax)y = x(\beta y) \cdot (ax)y$ d'après la définition 3.4. Vu le théorème 3.2 et les axiomes III.2 et III.4, on a donc $x(\beta y) \cdot (ax)y = x(\beta y) \circ (ax)y = (x \circ \beta y) \circ (ax \circ y) = x \circ (\beta y \circ ax) \circ y = x \circ (ax \circ \beta y) \circ y = (x \circ ax) \circ (\beta y \circ y) = x \circ y$.

Les axiomes adoptés et les théorèmes établis jusqu'à présent permettent de conclure par le théorème fondamental suivant sur les systèmes II et III:

THÉORÈME 3.53. *Le système* II *pourvu des définitions* 2.1-2.5 *équivaut au système* III *pourvu des définitions* 3.1, 3.2 *et* 3.4-3.6.

Démonstration. Les définitions des notions auxiliaires $x \frown y$, $y(x)$ et $(x)y$ étant les mêmes dans les deux systèmes, il suffit de montrer que les axiomes II.1 - II.12 et les définitions 2.1, 2.2 et 2.5 sont vérifiés dans le système III et, réciproquement, que les axiomes III.1 - III.8 et les définitions 3.1, 3.2 et 3.4 sont vérifiés dans le système II. Or en effet, les axiomes II.1 - II.12 et les définitions 2.1, 2.2 et 2.5 résultent des théorèmes 3.36, 3.39, de la définition 3.4 et des théorèmes 3.41, 3.42, 3.15 - 3.17, 3.19, 3.43, 3.44, 3.47, 3.35, 3.40 et 3.52 respectivement. Il a été déjà démontré (voir la remarque 3.2) que, réciproquement, tous les axiomes du système III et la définition 3.1 sont vérifiés dans le système II et il est facile de constater la conformité des définitions 3.2 et 3.4 aux théorèmes 2.33′ et 2.36 respectivement.

Remarque 3.5. Le théorème 3.53 a été établi dans [1] sous une forme un peu différente par suite de certaines différences dans les définitions. En particulier, la définition 3.2 y est remplacée par la définition 4.1, due à Ehresmann [3] (p. 309). L'équivalence de cette définition et des autres définitions de [1] à celles du travail présent résulte immédiatement des théorèmes établis ici.

Remarque 3.6. Ehresmann a démontré dans [3] (p. 310 - 312) que le système I équivaut au système IV composé d'axiomes III.1 - III.7 et IV.8 et de définitions 3.1 et 4.1. Pour établir cette équivalence, il introduit, naturellement, les définitions convenables dans les deux systèmes. Or on peut vérifier aisément que toutes ces définitions sont équivalentes à celles admises dans le travail présent.

Remarque 3.7. Le système II étant, en vertu de la remarque 2.1, plus général que le système I, qui équivaut à IV, tous les théorèmes résultant du système II résultent du système IV. En particulier, tous les axiomes du système III en résultent donc aussi.

Le problème posé au début de ce travail se trouve donc résolu.

4. Ajoutons pour terminer que le problème posé au début de ce travail peut être résolu également par une autre voie. Admettons, en effet, l'axiome suivant:

Axiome II*.12. $\bigwedge_{x,y \in C} \bigvee_{z \in C} \{z \precsim x \wedge z \precsim y \wedge \bigwedge_{z' \in C} [(z' \precsim x \wedge z' \precsim y) \Rightarrow$ $\Rightarrow z' \precsim z]\}$.

En remplaçant II.12 par II*.12 dans le système II, on est en présence d'un nouveau système; désignons le par II*. En ajoutant le même axiome II*.12 au système III, on aura aussi un nouveau système; désignons le par III*. L'axiome II*.12 étant plus fort que l'axiome II.12, il est évident que les systèmes II* et III* sont équivalents, tandis que le système II* est moins fort que le système I d'après le théorème 1.6 et de la remarque 2.1. Il en résulte immédiatement que les systèmes II* et III* constituent, eux aussi, une solution du problème en question.

Cependant l'axiome II*.12, vu qu'il concerne la notion d'ordre $\prec$, n'est pas commode pour définir la notion de pseudogroupe. Il est mieux de le remplacer par l'axiome suivant:

AXIOME III*.9. $\bigwedge_{x,y\in C}\bigvee_{u\in C_0}\{x\circ u = y\circ u \wedge u \prec ax \wedge \bigwedge_{u'\in C_0}[(x\circ u' = y\circ u' \wedge u' \prec ax) \Rightarrow u' \prec u]\}$, où la notion $\prec$ peut n'être déterminée que dans C_0.

Le théorème qui suit justifie la légitimité de cette modification.

THÉORÈME 4.1. *En remplaçant dans le système* III* *l'axiome* II*.12 *par l'axiome* III*.9, *on a un système équivalent au système* III*.

Démonstration. Admettons l'axiome II*.12. Il existe donc pour tout couple x,y un z tel que

(1) $z \prec x$, (2) $z \prec y$ et (3) $\bigwedge_{z'}[(z' \prec x \wedge z' \prec y) \Rightarrow z' \prec z]$.

En posant $u = az$, on a $z = x\circ az$ et $z = y\circ az$ en vertu de (1), (2) et de la définition 3.2. Par conséquent, $x\circ u = y\circ u$ et (1) entraîne d'après le théorème 3.13′ que $az \prec ax$, c'est-à-dire que $u \prec ax$. Admettons ensuite que l'on a pour un u'

(4) $x\circ u' = y\circ u'$ et (5) $u' \prec ax$.

En posant $z' = x\circ u'$, on a par conséquent $z' \prec x$ et $z' \prec y$ d'après 3.9′, donc $z' \prec z$ d'après (3), c'est-à-dire $x\circ u' \prec x\circ u$. Il en résulte que $\bar{x}\circ x\circ u' \prec \bar{x}\circ x\circ u$ d'après 3.14′, c'est-à-dire

(6) $$ax\circ u' \prec ax\circ u.$$

Vu que $u, u'\in C_0$ d'après 3.19, il vient $u = ax\circ u$ et $u' = ax\circ u'$ d'après 3.10′. Par cet effet (6) prend la forme $u' \prec u$.

Il est ainsi établi que $x\circ y = y\circ u$, que $u \prec ax$ et que (4) et (5) entraînent $u' \prec u$ pour tout $u'\in C_0$. Or c'est bien la thèse de l'axiome III*.9.

Réciproquement, admettons que l'axiome III*.9 soit vérifié. Il existe donc pour tout couple x, y un $u\in C_0$ tel que

(7) $x\circ u = y\circ u$, (8) $u \prec ax$,

(9) $$\bigwedge_{u'}[(x\circ u' = y\circ u' \wedge u' \prec ax) \Rightarrow u' \prec u].$$

En posant $z = x\circ u$, on a $z \prec x$ et $z \prec y$ d'après 3.9′.

Admettons ensuite que l'on a pour un $z'\in C$

(10) $z' \prec x$ et (11) $z' \prec y$,

d'où

(12) $z' = x\circ az' = y\circ az'$ et $az' \prec ax$.

En posant $az' = u'$, on a par conséquent $x\circ u' = y\circ u'$ et $u' \prec ax$, ce qui entraîne $u' \prec u$ d'après (9), c'est-à-dire $az' \prec u$. Il en résulte que $x\circ az' \prec x\circ u$ d'après 3.14′ et on a $z' \prec z$ d'après $z = x\circ u$ et (12).

Il est ainsi établi que $z \prec x$, que $z \prec y$ et que (10) et (11) entraînent $z' \prec z$ pour tout $z' \in C$. Or c'est bien la thèse de l'axiome II*.12.

5. Dans les parties 2 et 3 de ce travail, deux systèmes d'axiomes, à savoir II et III ont été formés et envisagés, qui peuvent servir des définitions pour les notions de groupoïde inductif élémentaire et de pseudogroupe élémentaire respectivement. Leur variantes II* de II et III* de III viennent d'être étudiées dans la partie 4. Les relations logiques entre ces systèmes peuvent être résumées par la simple table que voici:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{I} & \Rightarrow & \mathrm{II}^* & \Rightarrow & \mathrm{II} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \mathrm{IV} & \Rightarrow & \mathrm{III}^* & \Rightarrow & \mathrm{III} \end{array}$$

Nous ne savons pourtant pas si les systèmes II* et II, de même que les systèmes III* et III sont distincts. Pour prouver qu'il en est ainsi, il faudrait

P 467. Démontrer que l'axiome II*.12 est indépendant des axiomes II.1 - II.12.

Un autre problème ouvert est celui de l'indépendance entre les axiomes II.1 - II.12 et entre les axiomes III.1 - III.8 (**P 468**).

TRAVAUX CITÉS

[1] L. Dubikajtis, *Groupoïde inductif élémentaire et pseudogroupe élémentaire*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences mathématiques, astronomiques et physiques, 11 (1963), p. 469 - 471.

[2] C. Ehresmann, *Catégories différentiables et géométrie différentielle*, Société Mathématique du Canada, Séminaire 1961, Montréal.

[3] — *Catégories inductives et pseudogroupes*, Annales de l'Institut Fourier à Grenoble, 10 (1959), p. 307 - 336.

Reçu par la Rédaction le 20. 3. 1963