Hence the mapping f of S_1 into S_2 defined by

$$fs_1 = \begin{cases} f_1 s_1 & \text{for} \quad s_1 \in U_1 \cup W_1, \\ f_2^{-1} s_1 & \text{for} \quad s_1 \in V_1 \end{cases}$$

is (1-1) and onto.

A new proof of the well-ordering theorem, as suggested by the proof of our main theorem, will appear in Colloquium Mathematicum.

Addendum. The author wants to express his gratitude to the Editors of Fundamenta Mathematicae for calling his attention to the following: Our principal theorem is a generalization of a theorem by A. Tarski (*A lattice-theoretical fix-point theorem and its application*, Pacific J. Math. 5 (1955), pp. 285-309). Some results concerning the same topic are included also in the paper of E. S. Wolk, Canad. J. Math. 9 (1957), pp. 400-405 and in the paper of A. C. Davis, *A characterization of complete lattices*, Pacific J. Math. 5 (1955), pp. 311-319. Concerning the theorem of Cantor-Bernstein, a proof analogous to ours is included in a paper of R. Sikorski, *On a generalization of theorems of Banach and Cantor-Bernstein*, Colloquium Math. 1 (1948), p. 140-144, and also in the book of A. Tarski, *Cardinal Algebras*.

UNIVERSITY OF TOKYO
UNIVERSITY OF ZAGREB

Reçu par la Rédaction le 3. 8. 1962

Mehrfach wohlgeordnete Mengen und eine Verschärfung eines Satzes von Lindenbaum

von

E. Harzheim (Köln)

§ 1. Einleitung. Hat man in einer unendlichen Menge M eine Menge T von Wohlordnungen, so nennen wir eine Teilmenge $K \subset M$ einen *bezüglich T ordnungsgleichen Kern*, wenn in K alle Wohlordnungen aus T übereinstimmen. Nennen wir ferner eine Teilmenge $M' \subset M$, die $\overline{\overline{M'}} = \overline{\overline{M}}$ erfüllt, einen *Vollteil von M*, so besagt der Satz von Lindenbaum aus [2]:

Hat man eine unendliche Menge M und in M endlich viele Wohlordnungen, so gibt es zu diesen einen ordnungsgleichen Kern $K \subset M$ der Mächtigkeit $\overline{\overline{K}} = \overline{\overline{M}}$; K ist also Vollteil von M.

Ziel dieser Arbeit ist es, diesen Satz auch noch auf mehr als endlich viele Wohlordnungen auszudehnen. Es wird sich ergeben:

Ist $\overline{\overline{M}} = \aleph_{\nu+1}$, c die kleinste Kardinalzahl, für die $\aleph_\nu^c > \aleph_\nu$ ist, und T eine Menge von Wohlordnungen von M mit $\overline{\overline{T}} < c$, so gibt es einen ordnungsgleichen Kern bezüglich T, der Vollteil von M ist.

Für Limeskardinalzahlen wird ein analoger Satz hergeleitet werden.

Der Satz von Lindenbaum läßt sich beweisen, indem man ihn für den Fall zweier Wohlordnungen beweist, woraus sofort seine Gültigkeit für den Fall endlich vieler Wohlordnungen durch Schluß von n auf $n+1$ folgt. Für unseren Fall läßt sich diese Methode nicht mehr anwenden. Wichtigstes Hilfsmittel für unseren Beweis wird ein Satz graphentheoretischer Art (Satz 1) sein.

§ 2. Definitionen. Wir brauchen im Folgenden einige Begriffe, die etwas allgemeiner als die analogen Begriffe in [1] definiert sind.

Die zu einer Kardinalzahl k gehörige Anfangszahl bezeichnen wir wieder mit $\omega(k)$, und $W(a)$ bezeichne die Menge aller Ordinalzahlen, die $< a$ sind.

Unter einer *Folge innerhalb $W(\omega_\mu)$* verstehen wir jede (transfinite) Folge f: $a_0, a_1, \ldots, a_\varkappa, \ldots$, $\varkappa < \lambda$, von Ordinalzahlen aus $W(\omega_\mu)$; dabei heiße λ die *Länge der Folge*, sie sei auch mit $l(f)$ bezeichnet. Statt a_ν schreiben wir auch $f(\nu)$. Ist $\varkappa \leqslant \lambda$, so nennen wir die Folge der a_σ, $\sigma < \varkappa$, den

$\varkappa$-Abschnitt von f. Wir nennen sie einen *echten Abschnitt von f*, wenn $\varkappa < \lambda$ ist. Ist $\varkappa \geqslant \lambda$, so sei f selbst der $\varkappa$-Abschnitt von f.

Die *Wechselzahl von f* sei wie folgt erklärt: Man bilde alle maximalen Stücke S des Abschnitts $W(\lambda)$, über denen f konstant ist. Die durch die aus $W(\lambda)$ induzierte Ordnung wohlgeordnete Menge $\boldsymbol{S}$ dieser Stücke S hat dann eine eindeutig bestimmte Ordnungszahl $w(f)$ als Ordnungstyp, die wir als Wechselzahl von f bezeichnen:

$$S = \{S_0, \ldots, S_\varkappa, \ldots | \varkappa < w(f)\}. \tag{1}$$

§ 3. Ein vorbereitender Satz über Folgen. Wir beweisen nun einen Satz, der den in [1] ohne Beweis mitgeteilten Satz 5 umfassen wird. Denn eine Dualfolge ist ja eine Folge aus $W(\omega_0)$, und es ist $\omega_0 < \omega_{\nu+1}$ für jedes ν. Mit Hilfssatz 2 aus [1] ergibt sich dann Satz 5 von [1] aus dem folgenden

SATZ 1. *Es sei eine Kardinalzahl $\aleph_{\nu+1}$ gegeben und c die kleinste Kardinalzahl mit $\aleph_\nu^c > \aleph_\nu$. Es sei ferner eine Kardinalzahl $\aleph_\mu < \aleph_{\nu+1}$ vorgegeben, und F sei eine Menge von (nicht leeren) Folgen innerhalb $W(\omega_\mu)$, die folgende drei Bedingungen erfüllt:*

(i) *Ist $f \in F$ und S ein Stück* (¹) *des Definitionsbereiches $W(l(f))$ von f, über dem f konstant ist, so ist $\overline{\overline{S}} \leqslant \aleph_\nu$.*

(ii) *Ist g irgendeine Folge innerhalb $W(\omega_\mu)$ (die nicht zu F zu gehören braucht), und ihre Länge $l(g)$ eine Limeszahl, und ist jeder echte Abschnitt von g Abschnitt von einer der Folgen aus F, so ist auch g selbst noch Abschnitt von einer der Folgen aus F.*

(iii) *Ist $f \in F$, so gibt es zu jedem $\varkappa < l(f)$ mindestens eine Folge $f' \in F$ (mit einer Länge $l(f') \geqslant \varkappa+1$), die $f'(\varkappa') = f(\varkappa')$ für $\varkappa' < \varkappa$ und $f'(\varkappa) \neq f(\varkappa)$ erfüllt. Dann gilt:*

Ist $w(f) \leqslant \omega(c)+1$ (²) *für jedes $f \in F$, so ist $\Omega = \sup\{l(f) | f \in F\} < \omega_{\nu+1}$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst den folgenden Spezialfall:

Fall (A). *Ist $w(f) \leqslant \omega(c)$ für jedes $f \in F$, so ist $\Omega < \omega_{\nu+1}$.*

Ist $f \in F$ vorgegeben, so ordne man ihm zu die Folge $[\sigma_0, \ldots, \sigma_\varkappa, \ldots | \varkappa < w(f)]$, wo $\sigma_\varkappa$ das erste Element des Stückes $S_\varkappa$ (vgl. (1)!) ist, über dem f konstant ist. Wir nennen sie das *Bild von f* und bezeichnen sie mit $b[f]$. Es ist also $b[f]$ die Folge aller Elemente ξ des Definitionsbereiches $W(l(f))$ von f, die die Eigenschaft haben, daß es für jedes $\eta < \xi$ ein ζ mit $\eta \leqslant \zeta < \xi$ gibt, so daß $f(\zeta) \neq f(\xi)$ ist. Anschaulich formuliert ist $b[f]$ die Folge der

(¹) Unter einem *Stück* einer totalgeordneten Menge verstehen wir eine Teilmenge, die mit zwei Elementen auch alle zwischen ihnen liegenden Elemente der Menge enthält.

(²) Es würde übrigens der spätere Satz 2 auch dann noch aus Satz 1 folgen, wenn man diesen nur unter der stärkeren Voraussetzung $w(f) < \omega(c)$ für $f \in F$ beweisen würde.

Stellen des Definitionsbereiches von f, wo f „den Funktionswert wechselt". Natürlich können dann verschiedene Folgen aus F dasselbe Bild haben. Unter $\sigma_\varkappa(f)$ verstehen wir nun das Element $\sigma_\varkappa$ aus dem Bilde $b[f] = [\sigma_0, \ldots, \sigma_\varkappa, \ldots | \varkappa < w(f)]$ von f. Wir wollen dann als erstes zeigen, daß das Supremum aller $\sigma_\varkappa(f)$, wo $f \in F$ und $\varkappa < w(f)$ ist, noch $< \omega_{\nu+1}$ ist; wir behaupten also

(I) *Es gibt ein $\tau < \omega_{\nu+1}$, so daß gilt*

$$\sigma_\varkappa(f) < \tau \quad \textit{für alle} \quad f \in F \textit{ und } \varkappa < w(f).$$

Es sei

$$B = \{b[f] | f \in F\}.$$

Für fest vorgegebenes $\varkappa$ sei ferner $B_\varkappa$ die Menge aller $\varkappa$-Abschnitte der Folgen aus B. Wir werden dann zeigen: Für jedes $\varkappa < \omega(c)$ gilt:

$$\overline{\overline{B_\varkappa}} \leqslant \aleph_\nu. \tag{2}$$

Für $\varkappa = 0$ und $\varkappa = 1$ ist (2) trivial, denn B_0 enthält nur die leere Folge, und B_1 enthält nur die Folge, die aus einer Ziffer 0 besteht — es ist ja $\sigma_0(f) = 0$ für jedes $f \in F$.

Es sei dann (2) für alle $\varkappa < \varrho$ erfüllt, wo ϱ eine Zahl mit $1 < \varrho < \omega(c)$ ist.

Ist dann ϱ keine Limeszahl, so gibt es ein λ mit $\varrho = \lambda+1$, und so ist $\overline{\overline{B_\lambda}} \leqslant \aleph_\nu$. Dann sei eine Folge aus B_λ, die nicht schon in einem $B_\varkappa$ mit $\varkappa < \lambda$ liegt, fest vorgegeben. Sie hat dann das Aussehen $[\sigma'_0, \ldots, \sigma'_\varkappa, \ldots | \varkappa < \lambda]$. Es sei nun L die Menge aller Zahlen σ_λ, für die die Folge $[\sigma'_0, \ldots, \sigma'_\varkappa, \ldots, \sigma_\lambda]$, die also aus der vorgegebenen Folge $[\sigma'_0, \ldots, \sigma'_\varkappa, \ldots | \varkappa < \lambda]$ durch Anhängen der Zahl σ_λ entsteht, in B_ϱ liegt. Dann zeigen wir

$$\overline{\overline{L}} \leqslant \aleph_\nu. \tag{3}$$

Es sei indirekt $\overline{\overline{L}} \geqslant \aleph_{\nu+1}$ angenommen. Dann gibt es eine Menge F^* von $\aleph_{\nu+1}$ vielen Folgen $f \in F$, so daß deren Bild $b[f]$ als λ-Abschnitt die gegebene Folge $[\sigma'_0, \ldots, \sigma'_\varkappa, \ldots | \varkappa < \lambda]$ hat, und so daß für jedes $f \in F^*$ das λ-te Element von $b[f]$, also $b[f](\lambda)$, noch existiert (und dann also der Menge L angehört), und so daß die $b[f](\lambda)$ für verschiedene $f \in F^*$ verschieden sind. Man teile dann die Menge F^* in disjunkte Klassen auf, wobei zwei Folgen aus F^* genau dann in dieselbe Klasse kommen, wenn sie an allen Stellen $\sigma'_\varkappa$, $\varkappa < \lambda$, übereinstimmen. Solche Klassen gibt es höchstens $\aleph_\mu^{\overline{\lambda}}$ viele, da ja $f(\sigma'_\varkappa)$ für $f \in F$ nur $\aleph_\mu$ viele Werte annehmen kann. Wegen $\aleph_\mu \leqslant \aleph_\nu$ ist $\aleph_\mu^{\overline{\lambda}} \leqslant \aleph_\nu^{\overline{\lambda}}$, welches wegen $\overline{\lambda} < c$ gleich $\aleph_\nu$ ist. Da aber $\{b[f](\lambda) | f \in F^*\}$ die Mächtigkeit $\aleph_{\nu+1}$ hat, hat dann für mindestens eine Klasse K der Aufteilung von F^* die Menge $\{b[f](\lambda) | f \in K\}$ die Mächtigkeit $\aleph_{\nu+1}$. Definieren wir dann $\sigma^\wedge$ als die kleinste Zahl, die größer ist als alle $\sigma'_\varkappa$, $\varkappa < \lambda$, so ergibt sich also, da $b[f](\lambda) = \sigma_\lambda(f)$ ist:

(II) *Es gibt eine Menge K von $\aleph_{\nu+1}$ vielen Folgen $f \in F$, deren $\sigma^\wedge$-Abschnitte alle gleich sind, und für die die Werte $\sigma_\lambda(f)$, $f \in K$, definiert und zu je zweien verschieden sind.*

Es gibt nun in der Menge $\{\sigma'_\varkappa |\ \varkappa < \lambda\}$ ein letztes Element σ'_m, denn sonst wäre notwendigerweise $\sigma_\lambda(f) = \sup\{\sigma'_\varkappa |\ \varkappa < \lambda\}$ $(= \sigma^\wedge)$ für alle $f \in K$ mit Widerspruch zu (II). Damit folgt:

Alle Werte $f(\sigma'_m)$, $f \in K$, sind gleich.

Da die $\sigma_\lambda(f)$, $f \in K$, zu je zweien verschieden sind, hat ihre Menge einen Ordnungstypus $\geqslant \omega_{\nu+1}$. Man betrachte dann die Folge g, die wie folgt definiert ist: Nach Konstruktion von K ist $f(\beta)$ für alle $f \in K$ und alle $\beta \leqslant \sigma'_m$ derselbe Wert. Es sei dann eine Folge g definiert vermöge der Festsetzung $g(\beta) = f(\beta)$ (für $f \in K$) für $\beta \leqslant \sigma'_m$ und $g(\beta) = f(\sigma'_m)$ für alle β aus $\sigma'_m \leqslant \beta < \sigma'_m + \omega_{\nu+1}$. Dann ist g eine Folge innerhalb $W(\omega_\mu)$, und jeder ihrer echten Abschnitte ist Abschnitt von einer Folge aus F (speziell sogar aus K). Dann wäre wegen Bedingung (ii) für F die Folge g Abschnitt einer Folge h von F, was aber Bedingung (i) für F widerspräche, $-h$ wäre ja konstant über einem Stück $\supset \{\beta |\ \sigma'_m \leqslant \beta < \sigma'_m + \omega_{\nu+1}\}$. Damit ist dann (3) bewiesen. Aus (3) folgt nun $\overline{\overline{B_\varrho}} \leqslant \overline{\overline{B_{\varrho-1}}} + \overline{\overline{B_{\varrho-1}}} \cdot \aleph_\nu \leqslant \aleph_\nu$.

Ist schließlich ϱ eine Limeszahl, so ist offenbar $\overline{\overline{B_\varrho}} \leqslant \prod_{\varkappa<\varrho} \overline{\overline{B_\varkappa}} \leqslant \aleph_\nu^{\overline{\overline{\varrho}}} = \aleph_\nu$, da $\varrho < \omega(c)$ ist. Mittels transfiniter Induktion ist dann (2) für alle $\varkappa < \omega(c)$ bewiesen.

Dann ist auch $\overline{\overline{\bigcup_{\varkappa<\omega(c)} B_\varkappa}} \leqslant \aleph_\nu \cdot c = \aleph_\nu$. In jeder Folge aus $B_\varkappa$, $\varkappa < \omega(c)$, liegen aber höchstens $\overline{\overline{\varkappa}} < c \leqslant \aleph_\nu$ viele Elemente. Dann hat die Menge aller Ordinalzahlen, die Element von mindestens einer der Folgen aus $\bigcup_{\varkappa<\omega(c)} B_\varkappa$ sind, auch noch eine Mächtigkeit $\leqslant \aleph_\nu \cdot \aleph_\nu < \aleph_{\nu+1}$, also ist $\overline{\overline{\{\sigma_\varkappa(f) |\ f \in F \text{ und } \varkappa < w(f)\}}} \leqslant \aleph_\nu$. Aus (i) und der Bedingung $\omega(f) \leqslant \omega(c)$ folgt für jedes $f \in F$ die Beziehung $l(f) < \omega_{\nu+1}$, da dieses regulär ist; also sind alle $\sigma_\varkappa(f) < \omega_{\nu+1}$ für $f \in F$ und $\varkappa < w(f)$, woraus mit der vorigen Abschätzung wegen der Regularität von $\omega_{\nu+1}$ die Gültigkeit von (I) folgt.

Hieraus ergibt sich nun die Behauptung (A):

Es sei f eine fest vorgegebene Folge aus F. Hat dann f die Eigenschaft, daß hinter einem jeden Element α von f noch ein von α verschiedenes Element von f folgt, dann ist jedes $\alpha \leqslant$ einem $\sigma_\varkappa(f)$, und dann ist sicher $l(f) \leqslant \tau$ wegen (I).

Im anderen Falle gibt es zu f eine Stelle $\gamma < l(f)$, so daß $f(\xi) = f(\gamma)$ ist für alle $\xi \geqslant \gamma$, für die f noch definiert ist; da es dann auch ein kleinstes solches γ gibt, nehmen wir noch an, daß γ minimal sei. Dann ist $\gamma < \tau$ wegen (I). Wäre nun $l(f) > \tau$, so wäre $f(\xi) = f(\gamma)$ für alle ξ aus $\gamma \leqslant \xi \leqslant \tau$, also $f(\tau) = f(\gamma)$. Nach Bedingung (iii) müßte es dann auch eine Folge $f' \in F$ geben, die $f'(\xi) = f(\xi)$ für $\xi < \tau$ und $f'(\tau) \neq f(\tau)$ erfüllt, so daß also τ eins der $\sigma_\varkappa(f')$ wäre mit Widerspruch zu (I). Also ist $l(f) \leqslant \tau < \omega_{\nu+1}$ für alle $f \in F$, womit Fall (A) bewiesen ist.

Fall (B). *Es seien nun noch Folgen mit der Wechselzahl $\omega(c)+1$ in F enthalten.*

Ist f eine solche, also ihr Bild $b[f]$ von der Form $[\sigma_0, \ldots, \sigma_{\omega(c)}]$, so ordne man f zu seinen $\sigma_{\omega(c)}$-Abschnitt $\tilde{f}$, das ist dann eine Folge mit der Wechselzahl $\omega(c)$. Ist $w(f)$ jedoch $\leqslant \omega(c)$, so sei $\tilde{f} = f$. Dann erfüllt die Menge $\tilde{F} = \{\tilde{f} |\ f \in F\}$ die Bedingungen, die man erhält, indem man in (i), (ii), (iii) F durch $\tilde{F}$ ersetzt, und es ist nach dem bisher bewiesenen $\Omega' = \sup\{l(\tilde{f}) |\ f \in F\} < \omega_{\nu+1}$. Dann ist auch $l(f) < \Omega' + 2 < \omega_{\nu+1}$ für jedes $f \in F$. Denn gäbe es ein $f' \in F$ mit $l(f') \geqslant \Omega' + 2$, so folgte $w(f') = \omega(c)+1$ und $f'(\Omega') = f'(\Omega'+1)$. Wegen (iii) ergäbe sich dann die Existenz eines $f'' \in F$ mit $f''(\xi) = f'(\xi)$ für $\xi \leqslant \Omega'$ und $f''(\Omega'+1) \neq f'(\Omega'+1)$, also wäre $w(f'') = w(f')+1 = \omega(c)+1+1$ mit Widerspruch zur Voraussetzung, womit Satz 1 bewiesen ist.

Eine einfache Folgerung aus Satz 1 ist dann

Satz 1'. *Es seien alle Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt mit Ausnahme der Forderung* (i), *die weggelassen wird. Ist dann* $\sup\{l(f) |\ f \in F\} \geqslant \omega_{\nu+1}$, *so gibt es ein $f \in F$ mit $l(f) \geqslant \omega_{\nu+1}$.* (*Ersetzt man beidemale $\geqslant$ durch $=$, so bleibt die Aussage gültig.*)

§ 4. Mehrfach wohlgeordnete Mengen. Wir beweisen nun den bereits angekündigten Satz über mehrfach wohlgeordnete Mengen:

Satz 2. *Es sei M eine Menge der Mächtigkeit $\overline{\overline{M}} = \aleph_{\nu+1}$ und c die kleinste Kardinalzahl, für die $\aleph_\nu^c > \aleph_\nu$ ist. Es sei dann T eine unendliche Menge von Wohlordnungen von M und $\overline{\overline{T}} < c$. Dann gibt es eine Teilmenge $K \subset M$ mit $\overline{\overline{K}} = \overline{\overline{M}}$, so daß alle Wohlordnungen aus T in K übereinstimmen.*

Also: Es gibt einen bezüglich T ordnungsgleichen Kern, der Vollteil von M ist.

Beweis. Wir beginnen mit einigen vorbereitenden Konstruktionen. Man ordne die Menge T wohl, so daß sie den Ordnungstyp $\omega(\overline{\overline{T}})$ hat:

$$T = \{<_0, <_1, \ldots, <_\tau, \ldots |\ \tau < \omega(\overline{\overline{T}})\}.$$

Unter einem *Quader von M* verstehen wir dann eine nichtleere Teilmenge $Q \subset M$, die sich darstellen läßt in der Form

$$Q = \bigcap_{\tau<\omega(\overline{\overline{T}})} S_\tau,$$

wo S_τ ein Stück bezüglich $<_\tau$ von M ist.

Ist Q ein Quader von M, der mindestens drei Elemente enthält, so nenne man ein Element $t \in Q$ einen *Teilpunkt von Q*, wenn es zwei Elemente a, b in Q und eine Ordnung $<_\tau$ aus T gibt, so daß $a <_\tau t <_\tau b$ gilt.

Ist $Q = \bigcap_{\tau<\omega(\overline{\overline{T}})} S_\tau$ ein mindestens drei Elemente enthaltender Quader von M und t ein Teilpunkt von Q, so definieren wir *die durch t bestimmte Quaderzerlegung von Q* wie folgt:

$$\text{Es sei } A_\tau = \{x \in M \mid x <_\tau t\} \text{ und } B_\tau = \{x \in M \mid t <_\tau x\}.$$

Die Menge aller nichtleeren Durchschnitte $\bigcap_{\tau<\omega(\overline{\overline{T}})} C_\tau$, wo C_τ jeweils entweder gleich A_τ oder gleich B_τ ist, nennen wir die durch t bestimmte Quaderzerlegung von Q.

Die Elemente der durch t bestimmten Quaderzerlegung von Q sind Teilquader von Q; sie sind zu je zwei elementfremd, und ihre Vereinigungsmenge ist $= Q - \{t\}$.

Aus der für t geforderten Eigenschaft folgt unmittelbar:

(III) *Ist Q ein Quader mit $\overline{\overline{Q}} \geqslant 3$, t ein Teilpunkt von Q, so enthält die durch t bestimmte Quaderzerlegung von Q mindestens zwei Quader.*

Die durch t bestimmte Quaderzerlegung von Q hat offenbar höchstens $2^{\overline{\overline{T}}}$ viele Elemente. Es ist nun $2^{\overline{\overline{T}}} \leqslant \aleph_\nu^{\overline{\overline{T}}} = \aleph_\nu$, da ja $\overline{\overline{T}} < c$ vorausgesetzt ist. Setzen wir $2^{\overline{\overline{T}}} = \aleph_\mu$, so ist also $\aleph_\mu < \aleph_{\nu+1}$.

Wir ordnen nun allgemein der Menge der $2^{\overline{\overline{T}}}$ vielen Komplexe $[D_0, D_1, \ldots, D_\tau, \ldots \mid \tau < \omega(\overline{\overline{T}})]$, wo D_τ entweder der Buchstabe A oder B ist, eineindeutig die Menge $W(\omega_\mu)$ aller Ordinalzahlen zu, die $<\omega_\mu$ sind. Diese Zuordnung sei mit Z bezeichnet. Ist $a \in W(\omega_\mu)$, so verstehen wir unter $Q(t, a)$ diejenige Menge $C_0 \cap C_1 \cap \ldots \cap C_\tau \cap \ldots$, $\tau < \omega(\overline{\overline{T}})$, wo C_τ die Menge aller Elemente von Q ist, die in Bezug auf $<_\tau$ vor (bzw. hinter) t liegen, je nachdem ob in dem $[D_0, D_1, \ldots, D_\tau, \ldots \mid \tau < \omega(\overline{\overline{T}})]$, das dem a vermöge Z zugeordnet ist, das D_τ gleich A (bzw. B) ist.

Im nächsten Schritt werden wir in M eine stufenweise feiner werdende Quaderaufteilung konstruieren.

M selbst ist Quader von M. Wegen $\overline{\overline{M}} \geqslant 3$ gibt es dann einen Teilpunkt $t(M)$ von M, und man bilde die durch $t(M)$ bestimmte Quaderzerlegung von M. Es sei $\{t(M)\} = E_1$ gesetzt und die durch $t(M)$ bestimmte Quaderzerlegung von M mit $QZ(E_1)$ bezeichnet. Aus formalen Gründen setzen wir noch $E_0 = \emptyset$ und $QZ(E_0) = \{M\}$.

Allgemein habe man jeder Ordinalzahl $\varkappa < \tau$, wo $1 < \tau < \omega_{\nu+1}$ ist, eine Menge $E_\varkappa \subset M$ und eine Menge $QZ(E_\varkappa)$ von Quadern von M zugeordnet, so daß gilt

(4) Jedes Element von $M - E_\varkappa$ liegt in genau einem Quader von $QZ(E_\varkappa)$.

Dann ordne man τ eine Menge $E_\tau \subset M$ und eine Menge $QZ(E_\tau)$ von Quadern wie folgt zu:

(a) τ habe einen unmittelbaren Vorgänger $\tau - 1$.

Dann wähle man in jedem Quader aus $QZ(E_{\tau-1})$, in dem mindestens drei Elemente von M liegen, einen Teilpunkt dieses Quaders. Die Menge aller so gewählten Punkte sei mit $M(\tau-1)$ bezeichnet. Es sei dann $E_\tau = E_{\tau-1} \cup M(\tau-1)$ gesetzt.

$QZ(E_\tau)$ wird im Falle (a) wie folgt definiert: Man bilde von jedem mindestens drei Elemente enthaltenden Quader aus $QZ(E_{\tau-1})$ die durch den in ihm liegenden Teilpunkt aus $M(\tau-1)$ bestimmte Quaderzerlegung. Die Vereinigungsmenge dieser Quaderzerlegungen der mindestens dreielementigen Quader aus $QZ(E_{\tau-1})$ und der Menge derjenigen Quader aus $QZ(E_{\tau-1})$, in denen höchstens zwei Elemente von M liegen, sei dann $QZ(E_\tau)$.

Ist $x \in M - E_\tau$, so gilt auch $x \in M - E_{\tau-1}$; dann liegt x nach (4) in genau einem Quader aus $QZ(E_{\tau-1})$. Wegen $x \notin M(\tau-1)$ liegt x dann auch in genau einem Quader von $QZ(E_\tau)$, so daß (4) für $\varkappa = \tau$ erfüllt ist.

(b) τ sei Limeszahl.

Dann sei $E_\tau = \bigcup_{\varkappa<\tau} E_\varkappa$. In diesem Falle definieren wir $QZ(E_\tau)$ als die Menge aller nicht leeren Durchschnitte $\bigcap_{\varkappa<\tau} Q_\varkappa$, wo $Q_\varkappa$ je einen Quader aus $QZ(E_\varkappa)$ bedeutet. Jeder solche nichtleere Durchschnitt von Quadern ist ja wieder ein Quader.

Ist $x \in M - E_\tau$, so gilt $x \in M - E_\varkappa$ für jedes $\varkappa < \tau$, also wegen der Induktionsvoraussetzung $x \in Q'_\varkappa$ für genau einen Quader $Q'_\varkappa \in QZ(E_\varkappa)$. Dann ist $\bigcap_{\varkappa<\tau} Q'_\varkappa$ ein — und dann auch der einzige — x enthaltende Quader von $QZ(E_\tau)$, so daß auch im Falle (b) (4) erfüllt ist für $\varkappa = \tau$.

Mittels transfiniter Induktion ist damit eine gewisse Menge $\boldsymbol{Q}$ von Quadern definiert. (Die „Schachtelung" von Quadern wird immer dann abgebrochen, wenn man bei einem höchstens zwei Elemente enthaltenden Quader angelangt ist.)

Wir führen nun den Begriff der *Quaderschachtelung* ein. Ist Q ein Quader aus $\boldsymbol{Q}$ mit $\overline{\overline{Q}} \geqslant 3$, so bezeichne man im Folgenden den bei der Konstruktion von $\boldsymbol{Q}$ eindeutig in ihm fixierten Teilpunkt mit $t(Q)$. Wenn eine Menge $M(t(M), a)$ nicht leer ist, sei sie auch mit $Q[a]$ bezeichnet. Hat man allgemein einem $Q \in \boldsymbol{Q}$ eine Bezeichnung $Q[a_0, \ldots, a_\varkappa, \ldots \mid \varkappa < \lambda]$ zugeordnet, wo die $a_\varkappa \in W(\omega_\mu)$ sind, so betrachte man, falls $\overline{\overline{Q}} \geqslant 3$, die Quader $Q(t(Q), a) \in \boldsymbol{Q}$, wo also die a wieder Zahlen aus $W(\omega_\mu)$ sind. Ist Q' ein solcher, also $Q' = Q(t(Q), a_\lambda)$, so bezeichne man Q' auch mit $Q[a_0, \ldots, a_\varkappa, \ldots, a_\lambda]$.

Ist λ Limeszahl und hat man zu einer Folge $a_0, \ldots, a_\varkappa, \ldots, \varkappa < \lambda$, für jeden echten Abschnitt $a_\varkappa$, $\varkappa < \lambda'$ $(<\lambda)$, dieser Folge einen Quader $Q[a_0, \ldots, a_\varkappa, \ldots \mid \varkappa < \lambda']$ definiert, so definiere man $Q[a_0, \ldots, a_\varkappa, \ldots \mid \varkappa < \lambda]$ als $\bigcap_{\lambda'<\lambda} Q[a_0, \ldots, a_\varkappa, \ldots \mid \varkappa < \lambda']$, falls der letztere Durchschnitt nicht leer ist.

Man macht sich klar, daß auf diese Weise mittels transfiniter Induktion jeder Quader aus $\boldsymbol{Q}$ eindeutig dargestellt ist in einer Form $Q[\ldots, a_\varkappa, \ldots|\ \varkappa < \lambda]$ mit $a_\varkappa \in W(\omega_\mu)$. Und es gilt: Sind $Q_1 = Q[\ldots, a_\varkappa, \ldots|\ \varkappa < \lambda_1]$ und $Q_2 = Q[\ldots, a_\varkappa, \ldots|\ \varkappa < \lambda_2]$ mit $\lambda_1 < \lambda_2$ zwei Quader aus $\boldsymbol{Q}$, so ist $Q_1 \supset Q_2$ und $Q_1 \neq Q_2$, $-Q_2$ ist durch „Weiterteilung" aus Q_1 entstanden.

Als *Quaderschachtelung* (*in* $\boldsymbol{Q}$) verstehen wir dann eine jede (absteigende, nichtleere) Folge $Q[a_0], Q[a_0, a_1], \ldots, Q[a_0, \ldots, a_\varkappa, \ldots|\ \varkappa < \varrho], \ldots, \varrho < \lambda$, falls λ Limeszahl, bzw. $\varrho \leqslant \lambda$, falls λ keine Limeszahl, von Quadern aus $\boldsymbol{Q}$, deren Durchschnitt höchstens zwei Elemente enthält. Die Folge $a_\varkappa$, $\varkappa < \lambda$, bezeichnen wir als die zu der Quaderzerlegung gehörige Folge. Die Menge aller solchen Folgen sei F.

Dann erfüllt F die in der Formulierung von Satz 1 erwähnte Bedingung (ii), wie man sich leicht an Hand der Konstruktion der Folgen aus F klarmacht.

Ferner erfüllt F die Bedingung (iii) von Satz 1. Denn ist f: $a_\varkappa$, $\varkappa < \lambda$, eine Folge aus F und $\sigma < \lambda = l(f)$ vorgegeben, so betrachte man die zu f gehörige Quaderschachtelung

$$Q[a_0] \supset Q[a_0, a_1] \supset \ldots \supset Q[a_0, \ldots, a_\varkappa, \ldots|\ \varkappa < \varrho], \ldots, \qquad \varrho < \lambda,$$

falls λ Limeszahl, bzw. $\varrho \leqslant \lambda$, falls λ keine Limeszahl. Für $\sigma = 0$ ist man sofort fertig. Für $\sigma > 0$ ist $Q[a_0, \ldots, a_\varkappa, \ldots|\ \varkappa < \sigma]$ ein Quader dieser Schachtelung, der wegen $\sigma < \lambda$ nochmals unterteilt wird, und zwar wegen (III) in mindestens zwei Quader $Q[a_0, \ldots, a_\varkappa, \ldots, a_\sigma]$ und $Q[a_0, \ldots, a_\varkappa, \ldots, a'_\sigma]$ mit $a_\sigma \neq a'_\sigma$. Dann gibt es natürlich eine Folge $f' \in F$, die $f'(\varkappa) = f(\varkappa)$ für $\varkappa < \sigma$ und $f'(\sigma) = a'_\sigma \neq a_\sigma = f(\sigma)$ erfüllt, womit (iii) erfüllt ist.

Als nächstes wollen wir zeigen:

(IV) *Es gilt* $w(f) < \omega(c)$ *für jedes* $f \in F$.

Dazu bezeichnen wir mit $H_\varkappa$ die Menge aller $a \in W(\omega_\mu)$, die denjenigen Komplexen $[\ldots, D_\tau, \ldots|\ \tau < \omega(\overline{\overline{T}})]$ (wo D_τ entweder A oder B ist) vermöge Z zugeordnet sind, in denen $D_\varkappa = A$ ist. Dann gilt:

(V) *Für jedes* $f \in F$ *und jedes* $\varkappa < \omega(\overline{\overline{T}})$ *ist die Menge der* ξ, *für die* $f(\xi) \in H_\varkappa$ *gilt, endlich:* $\overline{\overline{\{\xi|\ f(\xi) \in H_\varkappa\}}} < \aleph_0$.

Denn wäre für ein $g \in F$ und ein $\varkappa < \omega(\overline{\overline{T}})$ der Wert $g(\xi) \in H_\varkappa$ für abzählbar viele Werte $\xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots$ von ξ, so betrachte man die zu g gehörige Quaderschachtelung $Q[g(0)], Q[g(0), g(1)], \ldots$ Insbesondere betrachten wir davon die Quader $Q[\ldots, g(\tau), \ldots|\ \tau < \xi_n]$, $n < \omega_0$. Dann sei $t_n^* = t(Q[\ldots, g(\tau), \ldots|\ \tau < \xi_n])$, $n < \omega_0$. Da $g(\xi_n) \in H_\varkappa$ gilt, folgt dann: t_n^* liegt bezüglich $<_\varkappa$ hinter allen Elementen von $Q[\ldots, g(\tau), \ldots|\ \tau \leqslant \xi_n]$, also auch hinter allen Elementen t_m^* mit $m > n$, denn es gilt $t_m^* \in Q[\ldots, g(\tau), \ldots|\ \tau < \xi_m] \subset Q[\ldots, g(\tau), \ldots|\ \tau \leqslant \xi_n]$ für $m > n$. Also hätte die Menge $\{t_n^*|\ n < \omega_0\}$ bezüglich $<_\varkappa$ den Ordnungstypus ω_0^*, was aber der Tatsache widerspricht, daß $<_\varkappa$ eine Wohlordnung von M ist. Damit ist dann (V) bewiesen.

Hiermit ergibt sich:

(VI) *Ist* $\tilde{\alpha}$ *diejenige Zahl aus* $W(\omega_\mu)$, *die vermöge der Zuordnung* Z *dem Komplex* $[D_0, D_1, \ldots, D_\tau, \ldots|\ \tau < \omega(\overline{\overline{T}})]$, *wo alle* $D_\tau = B$ *sind, entspricht, so hat für festes* $f \in F$ *die Menge der* ξ, *für die* $f(\xi) \neq \tilde{\alpha}$ *ist, eine Mächtigkeit* $< c$.

Denn ist $f(\xi) \neq \tilde{\alpha}$, so ist $f(\xi) \in H_\varkappa$ für mindestens ein $\varkappa < \omega(\overline{\overline{T}})$, also

$$\overline{\overline{\{\xi|\ f(\xi) \neq \tilde{\alpha}\}}} \leqslant \overline{\overline{\bigcup_{\varkappa < \omega(\overline{\overline{T}})} \{\xi|\ f(\xi) \in H_\varkappa\}}} \leqslant \aleph_0 \cdot \overline{\overline{T}} < c,$$

da $\overline{\overline{T}} < c$ und T unendlich war. Dann ist natürlich auch $w(f) < \omega(c)$ für jedes $f \in F$, womit (IV) bewiesen ist.

Als nächstes zeigen wir:

(VII) *Für* $\varkappa < \omega_{\nu+1}$ *folgt aus* $\overline{\overline{E_\varkappa}} \leqslant \aleph_\nu$ *die Beziehung* $\overline{\overline{QZ(E_\varkappa)}} \leqslant \aleph_\nu$.

Während der Ausführungen zu (VII) und (VIII) sei $\varkappa$ eine feste Zahl $< \omega_{\nu+1}$. Wir nennen zwei Elemente x, y von $M - E_\varkappa$, ϱ-äquivalent (für $\varrho < \omega(\overline{\overline{T}})$), wenn im Sinne von $<_\varrho$ kein Element von $M - E_\varkappa$ zwischen x und y liegt. Hierdurch ist, wie man sofort sieht, für jedes solche ϱ eine Äquivalenzrelation R_ϱ in $M - E_\varkappa$ definiert, und $M - E_\varkappa$ wird bezüglich R_ϱ in Äquivalenzklassen zerlegt, deren Menge sei $\boldsymbol{K}_\varrho$. Ordnet man jeder Klasse $K_\varrho \in \boldsymbol{K}_\varrho$, die kein Endstück von M, $<_\varrho$ ist, das bezüglich $<_\varrho$ kleinste Element $m(K_\varrho) \in M$ zu, das bezüglich $<_\varrho$ hinter allen Elementen von K_ϱ kommt, so gilt $m(K_\varrho) \in E_\varkappa$, und es ist wegen der Eineindeutigkeit der Zuordnung $K_\varrho \to m(K_\varrho)$ die Menge der $K_\varrho \in \boldsymbol{K}_\varrho$, die kein Endstück von M, $<_\varrho$ sind, gleichmächtig mit einer Teilmenge von $E_\varkappa$, so daß also für jedes $\varrho < \omega(\overline{\overline{T}})$ gilt

$$\overline{\overline{K_\varrho}} \leqslant \overline{\overline{E_\varkappa}} + 1. \tag{5}$$

(VIII) *Ist* $K_\varrho \in \boldsymbol{K}_\varrho$ *für* $\varrho < \omega(\overline{\overline{T}})$, *so ist der Durchschnitt* $\pi = \bigcap_{\varrho < \omega(\overline{\overline{T}})} K_\varrho$ *Teilmenge eines Quaders aus* $QZ(E_\varkappa)$.

Man sieht dies etwa mit transfiniter Induktion ein. Es sei $\pi \neq \emptyset$ angenommen, um einen trivialen Fall auszuschließen. Es ist $\pi \subset M \in QZ(E_0)$. Ist nun $\varkappa' \leqslant \varkappa$ und $\pi \subset Q_\lambda \in QZ(E_\lambda)$ für jedes $\lambda < \varkappa'$, so ist, falls $\varkappa'$ Limeszahl ist, $QZ(E_{\varkappa'}) \ni \bigcap_{\lambda < \varkappa'} Q_\lambda \supset \pi$. Und ist $\varkappa' = \varkappa'' + 1$, so gibt es ein $Q_{\varkappa''} \in QZ(E_{\varkappa''})$ mit $Q_{\varkappa''} \supset \pi$. Ist dabei $\overline{\overline{Q_{\varkappa''}}} \leqslant 2$, so ist $Q_{\varkappa''} \in QZ(E_{\varkappa'})$; ist jedoch $\overline{\overline{Q_{\varkappa''}}} > 2$, so wird $Q_{\varkappa''}$ unterteilt durch $t(Q_{\varkappa''}) \in E_{\varkappa''+1} = E_{\varkappa'}$, und einer seiner Teilquader muß π umfassen, da ja in K_ϱ kein Element von $E_\varkappa$, also auch keins von $E_{\varkappa'} \subset E_\varkappa$ liegt und insbesondere also $t(Q_{\varkappa''}) \notin K_\varrho$ gilt. Damit ist (VIII) bewiesen.

Da nun die Menge $QZ(E_\varkappa)$ ebenso wie die Menge $\boldsymbol{P}$ der $\pi = \bigcap_{\varrho<\omega(\overline{\overline{T}})} K_\varrho$ eine Aufteilung der Menge $M - E_\varkappa$ in disjunkte Klassen ist, folgt aus (VIII) nun

(6) $$\overline{\overline{\boldsymbol{P}}} \geqslant \overline{\overline{QZ(E_\varkappa)}}.$$

Damit folgt nun (VII). Denn ist $\overline{\overline{E_\varkappa}} \leqslant \aleph_\nu$, so ist wegen (5) $\overline{\overline{\boldsymbol{K}_\varrho}} \leqslant \aleph_\nu$, also hat $\boldsymbol{P} = \{\bigcap_{\varrho<\omega(\overline{\overline{T}})} K_\varrho |\ K_\varrho \in \boldsymbol{K}_\varrho\}$ eine Mächtigkeit $\overline{\overline{\boldsymbol{P}}} \leqslant \aleph_\nu^{\overline{\overline{T}}} = \aleph_\nu$, da $\overline{\overline{T}} < c$ ist. Daraus und aus (6) folgt dann (VII).

Nun ergibt sich

(IX) *Es ist für jedes* $\varkappa < \omega_{\nu+1}$

(7) $$\overline{\overline{E_\varkappa}} \leqslant \aleph_\nu \quad \textit{und} \quad \overline{\overline{QZ(E_\varkappa)}} \leqslant \aleph_\nu.$$

Denn (7) gilt für $\varkappa = 0$. Ist ferner (7) für alle $\varkappa < \tau$ erfüllt, wo $0 < \tau < \omega_{\nu+1}$ gilt, so ist im Falle, daß τ Limeszahl ist, $\overline{\overline{E_\tau}} \leqslant \overline{\overline{\bigcup_{\varkappa<\tau} E_\varkappa}} \leqslant \overline{\overline{\tau}} \cdot \aleph_\nu = \aleph_\nu$; dann gilt (7) wegen (VII) auch für $\varkappa = \tau$.

Existiert $\tau-1$, so ist $\overline{\overline{E_{\tau-1}}} \leqslant \aleph_\nu$ und $\overline{\overline{QZ(E_{\tau-1})}} \leqslant \aleph_\nu$, so daß $E_\tau = E_{\tau-1} \cup M(\tau-1)$ wegen $\overline{\overline{M(\tau-1)}} \leqslant \overline{\overline{QZ(E_{\tau-1})}} \leqslant \aleph_\nu$ der Bedingung $\overline{\overline{E_\tau}} \leqslant \aleph_\nu$ genügt, so daß wegen (VII) wiederum (7) für $\varkappa = \tau$ gilt, womit dann (IX) bewiesen ist. Nun ergibt sich leicht:

(X) *Es ist* $\sup\{l(f) |\ f \in F\} \geqslant \omega_{\nu+1}$.

Denn es sei $\varkappa < \omega_{\nu+1}$ fest vorgegeben. Dann gibt es in $QZ(E_\varkappa)$ einen Quader $\tilde{Q}$, der mindestens drei Elemente enthält, denn sonst wäre wegen (4) $\overline{\overline{M}} \leqslant \overline{\overline{E_\varkappa}} + 2 \cdot \overline{\overline{QZ(E_\varkappa)}} \leqslant \aleph_\nu$ wegen (7) mit Widerspruch. Ist dann $\tilde{Q}_\sigma$ für $\sigma \leqslant \varkappa$ der Quader aus $QZ(E_\sigma)$, der $\tilde{Q}$ umfaßt, so ist die Folge der $\tilde{Q}_\sigma$ streng monoton fallend, da keiner ihrer Quader ungeteilt für das nächste $QZ(E_{\sigma+1})$ übernommen wird, weil er ja $\tilde{Q}$ und damit mindestens drei Elemente umfaßt. Also gibt es für jedes $\varkappa < \omega_{\nu+1}$ mindestens eine Quaderschachtelung der Länge $\geqslant \varkappa$. Damit ist dann auch (X) bewiesen.

Aus Satz 1′ folgt dann: Es gibt eine Folge $\tilde{f} \in F$ mit $l(\tilde{f}) \geqslant \omega_{\nu+1}$. An Hand von $\tilde{f}$ wollen wir nun die gesuchte Menge K der Behauptung konstruieren:

Nach (VI) ist $\overline{\overline{\{\xi |\ \tilde{f}(\xi) \neq \tilde{\alpha}\}}} < c < \aleph_{\nu+1}$. Wegen $l(\tilde{f}) \geqslant \omega_{\nu+1}$ ist dann $\tilde{f}(\xi) = \tilde{\alpha}$ für $\aleph_{\nu+1}$ viele Elemente ξ, etwa für $\xi = \xi_\varkappa$, $\varkappa < \omega_{\nu+1}$, wo $\xi_{\varkappa'} < \xi_{\varkappa''}$ sei für $\varkappa' < \varkappa''$. Man betrachte die zu $\tilde{f}$ gehörige Quaderschachtelung $Q[\tilde{f}(0)] \supset Q[\tilde{f}(0), \tilde{f}(1)] \supset \ldots$ und die Folge $t(Q[\tilde{f}(0)]), t(Q[\tilde{f}(0), \tilde{f}(1)]), \ldots$ der zugehörigen Teilungspunkte. Davon betrachte man nun die Teilfolge $t_\varkappa = t(Q[\tilde{f}(0), \ldots, \tilde{f}(\gamma), \ldots |\ \gamma < \xi_\varkappa])$, $\varkappa < \omega_{\nu+1}$. Dann liegt $t_\varkappa$ bezüglich eines jeden $<_\tau$, $\tau < \omega(\overline{\overline{T}})$, vor allen Elementen aus $Q[\tilde{f}(0), \ldots, \tilde{f}(\gamma), \ldots |\ \gamma \leqslant \xi_\varkappa]$, also auch vor allen t_ι mit $\iota > \varkappa$, da diese in dem betreffenden Quader enthalten sind. In der Menge $K = \{t_\varkappa |\ \varkappa < \omega_{\nu+1}\}$ stimmen also alle Wohlordnungen $<_\tau$, $\tau < \omega(\overline{\overline{T}})$ überein, womit wegen $\overline{\overline{K}} = \aleph_{\nu+1}$ unser Satz bewiesen ist.

Wir geben nun noch ein Beispiel dafür, daß sich der Satz 2 nicht mehr auf $\overline{\overline{T}} = c$ verschärfen läßt. Es gilt:

Satz 3. *Es sei* $\aleph_\nu$ *eine beliebige unendliche Kardinalzahl und* c *die kleinste Kardinalzahl, die* $\aleph_\nu^c > \aleph_\nu$ *erfüllt. Dann gibt es eine Menge* M *mit* $\overline{\overline{M}} = \aleph_{\nu+1}$ *und eine Menge* T *von Wohlordnungen von* M *mit* $\overline{\overline{T}} = c$, *so daß es keinen Vollteil* K *von* M *gibt, in dem alle Ordnungen aus* T *übereinstimmen.*

Beweis. Es sei $\omega_\nu\big((\omega(c))\big)$ die Menge aller Folgen der Länge $\omega(c)$ von Ordinalzahlen aus $W(\omega_\nu)$ und M eine Teilmenge der Mächtigkeit $\aleph_{\nu+1}$ von $\omega_\nu\big((\omega(c))\big)$.

Zu jedem $\tau < \omega(c)$ sei nun eine Wohlordnung $<_\tau$ gewählt, die folgendes leistet: Sind $a = [\alpha_0, \ldots, \alpha_\tau, \ldots]$ und $b = [\beta_0, \ldots, \beta_\tau, \ldots]$ zwei Elemente aus M, so ist $a <_\tau b$ dann, wenn $\alpha_\tau < \beta_\tau$ ist (jedoch nicht notwendig nur dann). Eine solche Wohlordnung ist ja unter Verwendung des Auswahlaxioms leicht konstruierbar. Die Menge T der $<_\tau$, $\tau < \omega(c)$, hat dann die Mächtigkeit $\overline{\overline{T}} \leqslant c$.

Es sei nun indirekt angenommen, $K = \{k_0, \ldots, k_\varkappa, \ldots |\ \varkappa < \omega_{\nu+1}\}$ sei eine Teilmenge von M mit der Eigenschaft, daß aus $\varkappa' < \varkappa''$ auch $k_{\varkappa'} <_\tau k_{\varkappa''}$ folgt für jedes $\tau < \omega(c)$. Es sei

$$k_\varkappa = [k_{\varkappa,0}, \ldots, k_{\varkappa,\tau}, \ldots |\ \tau < \omega(c)].$$

Dann folgt aus der Konstruktion der Ordnungen $<_\tau$, daß für jedes $\tau < \omega(c)$ die Folge der τ-ten Komponenten zu K, also die Folge $k_{\varkappa,\tau}$, $\varkappa < \omega_{\nu+1}$, (unstreng) monoton steigt mit $\varkappa$. Da aber die $k_{\varkappa,\tau}$ aus $W(\omega_\nu)$ sind, folgt für jedes $\tau < \omega(c)$ die Existenz eines $\varkappa'(\tau)$, so daß alle $k_{\varkappa,\tau}$ für $\varkappa \geqslant \varkappa'(\tau)$ gleich sind $(= e_\tau)$, da andernfalls eine Zahl, die $\leqslant \omega_\nu$ ist, zu $\omega_{\nu+1}$ konfinal wäre, was dessen Regularität widerspricht. Ist dann $K_\tau = \{k_\varkappa \in K |\ k_{\varkappa,\tau} < e_\tau\}$, so gilt für jedes $\tau < \omega(c)$

(8) $$\overline{\overline{K_\tau}} \leqslant \aleph_\nu.$$

Man betrachte nun das Element $e = [e_0, \ldots, e_\tau, \ldots |\ \tau < \omega(c)]$. Zu jedem Element $k_\varkappa \in K$ mit $k_\varkappa \neq e$ gibt es ein $\tau < \omega(c)$, so daß $k_{\varkappa,\tau} < e_\tau$ ist, so daß also $K \subset \bigcup_{\tau<\omega(c)} K_\tau \cup \{e\}$. Wegen (8) ergäbe sich dann $\overline{\overline{K}} \leqslant c \cdot \aleph_\nu + 1 = \aleph_\nu$ mit Widerspruch.

Wir untersuchen nun den Fall, wo $\overline{\overline{M}}$ eine Limeskardinalzahl ist. Für reguläre Limeskardinalzahlen gilt der zu Satz 1 analoge

Satz 4. *Es sei* $\aleph_\nu$ *eine reguläre Limeskardinalzahl und* c *die kleinste Kardinalzahl, so daß es ein Produkt von* c *vielen Kardinalzahlen gibt, die*

alle $<\aleph_\nu$ *sind, welches* $\geqslant \aleph_\nu$ *ist* (3). (*Bei Gültigkeit der Kontinuumhypothese ist* $c = \aleph_\nu$.) *Dann sei* $\aleph_\mu < \aleph_\nu$ *und* F *eine Menge von Folgen innerhalb* $W(\omega_\mu)$, *die die Bedingungen* (ii) *und* (iii) *von Satz* 1 *sowie folgende Bedingung* (i) *erfüllt*:

(i) *Ist* $f \in F$ *und* S *ein Stück des Definitionsbereichs von* f, *über dem* f *konstant ist, so ist* $\overline{\overline{S}} < \aleph_\nu$.

Dann gilt:

Ist $\alpha < \omega(c)$ *und* $w(f) \leqslant \alpha$ *für jedes* $f \in F$, *so ist* $\sup\{l(f) \mid f \in F\} < \omega_\nu$.

Beweis. Durch eine Modifikation des Beweises von Satz 2 aus [1] folgert man, daß gilt

$$\overline{\overline{F}} < \aleph_\nu . \tag{9}$$

Nun ist der Definitionsbereich von jedem $f \in F$ wegen (i) und $w(f) \leqslant \alpha$ eine Vereinigungsmenge von höchstens $\overline{\alpha} < c \leqslant \aleph_\nu$ vielen Mengen mit Mächtigkeiten $<\aleph_\nu$, woraus man wegen der Regularität von $\aleph_\nu$ leicht folgert

$$l(f) < \omega_\nu \quad \textit{für jedes} \quad f \in F . \tag{10}$$

Mit (9) und (10) folgt dann wegen der Regularität von ω_ν die Behauptung.

Analog zu Satz 2 erhält man dann

Satz 5. *Es sei* $\overline{\overline{M}} = \aleph_\nu$ *eine reguläre Limeskardinalzahl und* c *wie bei Satz* 4 *definiert. Weiter sei* c^- *die nächstkleinere Kardinalzahl zu* c, *falls eine solche existiert, andernfalls sei* $c^- = c$. (*Bei Gültigkeit der Kontinuumhypothese ist* $\aleph_\nu = c = c^-$.) *Ist dann* T *eine Menge von Wohlordnungen von* M *und* $\overline{\overline{T}} < c^-$, *so gibt es einen Vollteil* V *von* M, *in dem alle Ordnungen aus* T *übereinstimmen.*

Beweis. Setzt man $2^{\overline{\overline{T}}} = \aleph_\mu$ (T sei hier als unendlich angenommen), so ist $\aleph_\mu < \aleph_\nu$ wegen $\overline{\overline{T}} < c$, und wir können analog wie beim Beweise von Satz 2 F, $E_\varkappa$ und $QZ(E_\varkappa)$ für $\varkappa < \omega_\nu$ definieren, und es ergibt sich $\overline{\overline{Q\omega(E_\varkappa)}} < \aleph_\nu$ für jedes $\varkappa < \omega_\nu$ (vgl. (VII)!), woraus $\sup\{l(f) \mid f \in F\} \geqslant \omega_\nu$ folgt. Für die Folgen $f \in F$ erhalten wir weiter $w(f) \leqslant \aleph_0 \cdot \overline{\overline{T}} = \overline{\overline{T}}$, also $w(f) < \omega(\overline{\overline{T}}^+)$, wo $\overline{\overline{T}}^+$ die nächstgrößere Kardinalzahl zu $\overline{\overline{T}}$ bedeutet. Da $\overline{\overline{T}} < c^-$ gilt, ist $\overline{\overline{T}}^+ < c$ und infolgedessen, $\alpha = \omega(\overline{\overline{T}}^+) < \omega(c)$. Mit Satz 4 zusammen ergibt sich dann die Behauptung ganz analog zu dem Beweise von Satz 2.

In dem Falle, daß $\overline{\overline{M}}$ eine singuläre Kardinalzahl ist, werden wir uns vor allem auf Satz 2 stützen. Wir können dann Satz 5 in den folgenden allgemeinen Satz einordnen:

(3) Aus der Voraussetzung über c folgt dann, daß auch jede Summe von weniger als c vielen Kardinalzahlen, die je $<\aleph_\nu$ sind, noch $<\aleph_\nu$ ist.

Satz 6. *Es sei* $\overline{\overline{M}} = \aleph_\nu$ *eine Limeskardinalzahl und* c *wie bei Satz* 4 *definiert. Dann sei* c' *die kleinste Kardinalzahl, so daß es ein Produkt von* c' *vielen Kardinalzahlen* $<c$ *gibt, das* $\geqslant c$ *ist. Weiter sei* T *eine Menge von Wohlordnungen von* M *mit* $\overline{\overline{T}} < c'$. *Dann gibt es bei Annahme der Kontinuumhypothese einen Vollteil* V *von* M, *in dem alle Ordnungen aus* T *übereinstimmen.*

Beweis. Ist $\aleph_\nu$ eine reguläre Kardinalzahl, so folgt diese Aussage aus Satz 5, da bei Gültigkeit der Kontinuumhypothese $c' = c = \aleph_\nu$ ist. Es sei also $\aleph_\nu$ als singuläre Limeskardinalzahl vorausgesetzt. Dann folgt aus der Kontinuumhypothese, daß c die kleinste Kardinalzahl ist, so daß sich $\aleph_\nu$ darstellen läßt in der Form

$$\aleph_\nu = \sum_{\mu<\omega(c)} \aleph_{a_\mu} , \tag{11}$$

wo $\aleph_{a_\mu} < \aleph_\nu$ ist für $\mu < \omega(c)$. Da dann $\omega(c)$ die kleinste zu ω_ν konfinale Zahl ist, ist c regulär und $c < \aleph_\nu$ wegen der Singularität von $\aleph_\nu$. Man kann dann auch eine solche Darstellung (11) von $\aleph_\nu$ geben, daß außer (11) noch folgende Bedingungen (12) und (13) erfüllt sind:

(12) Die $\aleph_{a_\mu}$ wachsen streng monoton mit μ.

(13) $\aleph_{a_\mu}$ ist regulär und $>c$ für jedes $\mu < \omega(c)$.

Nun gilt

(XI) *Ist* $M' \subset M$ *und* $\overline{\overline{M'}} = \aleph_{\nu+2} > c$, *so gibt es eine Menge* $K' \subset M'$ *mit* $\overline{\overline{K'}} = \overline{\overline{M'}}$, *die ordnungsgleicher Kern bezüglich* T *ist.*

Denn ist m die kleinste Kardinalzahl, für die $\aleph_{\nu+1}^m \geqslant \aleph_{\nu+1}$ ist, so ist $m = \aleph_{\nu+1}$ wegen der Kontinuumhypothese. Da ferner $\overline{\overline{T}} < c \leqslant \aleph_{\nu+1}$ ist, ist also $\overline{\overline{T}} < m$, und nach Satz 2 existiert dann eine Menge K' mit den angegebenen Eigenschaften.

Man kann dann wegen (XI) leicht Mengen $M_0, M_1, \ldots, M_\mu, \ldots$, $\mu < \omega(c)$ konstruieren, so daß gilt:

(14) Die Mengen M_μ sind zu je zweien disjunkt.

(15) M_μ ist ordnungsgleicher Kern bezüglich T und hat in Bezug auf jede Ordnung aus T den Typ ω_{a_μ}.

Wenn wir nun zeigen, daß die Menge $U = \bigcup_{\mu<\omega(c)} M_\mu \subset M$ eine Menge V der Mächtigkeit $\aleph_\nu$ umfaßt, die ordnungsgleicher Kern bezüglich T ist, so ist der Satz bewiesen. Es sei

$$T = \{<_0, \ldots, <_\tau, \ldots \mid \tau < \omega(\overline{\overline{T}})\} .$$

Dann betrachten wir das cartesische Produkt

$$C = W_0 \times W_1 \times \ldots \times W_\tau \times \ldots \mid \tau < \omega(\overline{\overline{T}}) ,$$

worin jedes $W_\tau = W(\omega_{\nu+1})$ ist. Sind dann $x = [x_0, \ldots, x_\tau, \ldots |\ \tau < \omega(\overline{\overline{T}})]$ und $y = [y_0, \ldots, y_\tau, \ldots |\ \tau < \omega(\overline{\overline{T}})]$ zwei Punkte aus C und $x_\tau \neq y_\tau$, so setzen wir

$$x \prec_\tau y \leftrightarrow x_\tau < y_\tau .$$

Man sieht dann leicht: Die Menge U läßt sich so in C eineindeutig abbilden, daß gilt: Sind $x \neq y$ zwei Elemente aus U, so gilt für deren Bilder $x' = [\ldots, x'_\tau, \ldots]$ und $[\ldots, y'_\tau, \ldots]$ in C, daß aus $x <_\tau y$ folgt $x'_\tau < y'_\tau$, so daß also gilt

$$x <_\tau y \leftrightarrow x' \prec_\tau y' .$$

Wir können deshalb überhaupt so tun, als ob U eine Teilmenge von C ist, bei der je zwei Punkte in allen Komponenten verschieden sind, und bei der die Ordnung $\prec_\tau$ nach der τ-ten Komponente genau die Ordnung $<_\tau$ ist. Dies sei also im Folgenden vorausgesetzt.

Unter M_μ^τ verstehen wir die Menge der τ-ten Komponenten der Elemente aus M_μ. Dann setzen wir $s_\mu^\tau = \sup(M_\mu^\tau)$ und weiter

$$S_\mu = [s_\mu^0, s_\mu^1, \ldots, s_\mu^\tau, \ldots |\ \tau < \omega(\overline{\overline{T}})] ,$$

— wir nennen S_μ den *Supremumspunkt zu* M_μ. Dann gilt:

(XII) *Sind $\mu \neq \mu'$ zwei Zahlen aus $W(\omega(c))$, so sind die zugehörigen Supremumspunkte S_μ und $S_{\mu'}$ in jeder Komponente verschieden.*

Denn die Komponenten von S_μ sind Ordinalzahlen, die wegen (15) jeweils die obere Grenze einer streng monoton wachsenden Folge der Länge ω_{a_μ} von Ordinalzahlen sind. Sie sind also mit ω_{a_μ} konfinal. Da dieses wegen (13) eine reguläre Anfangszahl ist, sind die Komponenten von S_μ mit keinem $\omega_{a_{\mu'}}$ mit $\mu' \neq \mu$ auch noch konfinal, woraus (XII) folgt.

Es sind dann in der Menge der Supremumspunkte S_μ, $\mu < \omega(c)$, die die Mächtigkeit c hat, die Wohlordnungen $\prec_\tau$, $\tau < \omega(\overline{\overline{T}})$, definiert. Betrachten wir auch noch die Wohlordnung $\leqslant$, die bestimmt ist durch

$$S_{\mu_1} \leqslant S_{\mu_2} \leftrightarrow \mu_1 < \mu_2 ,$$

so folgt aus Satz 2 bzw. Satz 5, da die um $\leqslant$ vermehrte Menge der Wohlordnungen $\prec_\tau$, $\tau < \omega(\overline{\overline{T}})$, eine Mächtigkeit $\leqslant \overline{\overline{T}}+1 = \overline{\overline{T}}$ hat:

(XIII) *Es gibt einen Vollteil S von $\{S_\mu |\ \mu < \omega(c)\}$, so daß für $\mu_1 < \mu_2$ und $S_{\mu_1}, S_{\mu_2} \in S$ gilt:*

$$s_{\mu_1}^\tau < s_{\mu_2}^\tau \quad \textit{für jedes} \quad \tau < \omega(\overline{\overline{T}}) .$$

Es besagt also (XIII), daß in S alle Komponentenordnungen $\prec_\tau$ mit der Ordnung nach dem Index μ übereinstimmen. Es sei nun $N = \{\mu |\ S_\mu \in S\}$, und es sei N' die Menge derjenigen Ordinalzahlen aus N, zu denen es in N eine nächstkleinere Ordinalzahl gibt. Dann ist $\overline{\overline{N'}} = \overline{\overline{N}} = c$, und es folgt aus (11)

$$\sum_{\mu \in N'} \aleph_{a_\mu} = \aleph_\nu , \tag{16}$$

da N' in $W(\omega(c))$ konfinal ist und die $\aleph_{a_\mu}$ nach (12) streng monoton wachsen.

Ist dann ein S_μ mit $\mu \in N'$ vorgegeben, so existiert wegen (XIII) ein Element $S \in S$, das in Bezug auf jede Komponentenordnung $\prec_\tau$ unmittelbarer Vorgänger von S_μ ist. Aus $S_\mu = [s_\mu^0, \ldots, s_\mu^\tau, \ldots]$ und $S = [s^0, \ldots, s^\tau, \ldots]$ folgt also $s_\mu^\tau > s^\tau$ für jedes $\tau < \omega(\overline{\overline{T}})$, und da $s_\mu^\tau = \sup(M_\mu^\tau)$ ist und M_μ nach (15) in Bezug auf jedes $\prec_\tau$ den Typ ω_{a_μ} hat, liegen für festes $\prec_\tau$ alle Elemente von M_μ mit Ausnahme von weniger als $\aleph_{a_\mu}$ vielen zwischen s^τ und s_μ^τ. Dann liegen aber auch alle Elemente von M_μ mit Ausnahme von weniger als $\aleph_{a_\mu}$ vielen in Bezug auf jedes $\prec_\tau$, $\tau < \omega(\overline{\overline{T}})$, zwischen s^τ und s_μ^τ. Denn ist A_μ die Menge der Ausnahmewerte, so ist A_μ Vereinigungsmenge von $\overline{\overline{T}}$ vielen Mengen, die alle eine Mächtigkeit $< \aleph_{a_\mu}$ haben; und da nach (13) $\overline{\overline{T}} < c < \aleph_{a_\mu}$ ist, ist dann auch $\overline{\overline{A_\mu}} < \aleph_{a_\mu}$, da dieses regulär ist. Es gibt also mit $V_\mu = M_\mu - A_\mu$ einen Vollteil von M_μ, der

$$s^\tau \prec_\tau V_\mu \prec_\tau s_\mu^\tau$$

für alle $\tau < \omega(\overline{\overline{T}})$ erfüllt. Dann ist $V = \bigcup_{\mu \in N'} V_\mu$ eine Teilmenge von M, die nach (14), (15) und (16) die Mächtigkeit $\aleph_\nu$ hat, und in der alle Ordnungen aus T übereinstimmen, da dies in den einzelnen V_μ, $\mu \in N'$, zutrifft, und da nach Konstruktion $V_\mu \prec_\tau V_{\mu'}$ gilt für $\mu < \mu'$ und alle $\tau < \omega(\overline{\overline{T}})$. Damit genügt also V der Behauptung unseres Satzes.

Wir geben nun noch zwei Sätze an, die zeigen werden, daß man die Aussage von Satz 6 nicht mehr auf $\overline{\overline{T}} = c'$ ausdehnen kann, wenn man die Kontinuumhypothese annimmt.

Satz 7. *Ist $\aleph_\nu$ Limeskardinalzahl und c die kleinste Kardinalzahl, so daß sich $\aleph_\nu$ als Summe von c vielen Kardinalzahlen darstellen läßt, die alle $< \aleph_\nu$ sind, so gibt es eine Menge M der Mächtigkeit $\overline{\overline{M}} = \aleph_\nu$ und c viele Wohlordnungen in M, so daß es keinen Vollteil von M gibt, in dem diese Wohlordnungen übereinstimmen.*

Beweis. Es ist ω_ν darstellbar in der Form $\omega_\nu = \sum_{\varkappa < \omega(c)} \omega_{a_\varkappa}$, wo $\omega_{a_\varkappa} < \omega_\nu$ für alle $\varkappa < \omega(c)$. Es seien dann $M_{a_\varkappa}$, $\varkappa < \omega(c)$, zu je zweien disjunkte geordnete Mengen, wobei $M_{a_\varkappa}$ den Ordnungstypus $\omega_{a_\varkappa}$ habe. Es sei $V = \bigcup_{\varkappa < \omega(c)} M_{a_\varkappa}$. Weiter sei für $\varkappa < \omega(c)$ eine Ordnung $<_\varkappa$ definiert als die durch die geordnete Summe

$$\sum_{\lambda \geqslant \varkappa} M_{a_\lambda} + \sum_{\lambda < \varkappa} M_{a_\lambda}$$

bestimmte Wohlordnung von V. Die Menge T der Wohlordnungen $<_\varkappa$, $\varkappa < \omega(c)$, hat dann die Mächtigkeit c und erfüllt die Behauptung unseres Satzes, wie man leicht nachprüft.

SATZ 8. *Ist $\aleph_\nu$ Limeskardinalzahl und c und c' definiert wie in Satz 6, so folgt aus der Kontinuumhypothese: Es gibt eine Menge U der Mächtigkeit $\aleph_\nu$ mit c' vielen Wohlordnungen, so daß es keinen Vollteil von U gibt, in dem sie übereinstimmen.*

Beweis. Ist c Limeskardinalzahl, so ist wegen der Kontinuumhypothese c regulär und $c' = c$, so daß aus Satz 7 die Behauptung folgt. Es sei also c keine Limeskardinalzahl. Dann gibt es nach Satz 3 eine Menge M der Mächtigkeit c und eine Menge T von Wohlordnungen von M mit $\overline{\overline{T}} = c'$, so daß kein Vollteil von M ordnungsgleicher Kern ist bezüglich T. Wir können dann auch der Einfachheit halber M als die Menge $W(\omega(c))$ annehmen (wobei die Ordnungen aus T dann natürlich von der üblichen Ordnung der Ordinalzahlen verschieden sein können). Es sei $T = \{<_0, \ldots, <_\tau, \ldots | \ \tau < \omega(c')\}$. Mit $M(\tau)$ bezeichnen wir die vermöge $<_\tau$ geordnete Menge M.

Man nehme nun eine Darstellung $\aleph_\nu = \sum_{\mu<\omega(c)} \aleph_{a_\mu}$, wo die $\aleph_{a_\mu} < \aleph_\nu$ sind. Dann bilde man wohlgeordnete Mengen M_{a_μ}, $\mu < \omega(c)$, die zu je zweien disjunkt sind, und die $\overline{\overline{M_{a_\mu}}} = \aleph_{a_\mu}$ erfüllen und setze $U = \bigcup_{\mu<\omega(c)} M_{a_\mu}$. Für $\tau < \omega(c')$ sei nun $\prec_\tau$ diejenige Wohlordnung von U, die durch die geordnete Summe

$$U_\tau = \sum_{\mu \in M(\tau)} M_{a_\mu}$$

bestimmt wird, wo also das Argument die vermöge $<_\tau$ geordnete Menge $W(\omega(c))$ ist. Dann erfüllt U mit den Ordnungen $\prec_\tau$, $\tau < \omega(c')$, die Behauptung. Denn wäre V ein ordnungsgleicher Kern und Vollteil von U, so hätte V für c viele verschiedene μ mit M_{a_μ} Elemente gemeinsam, da c regulär ist. Die Menge N dieser μ-Werte wäre dann Vollteil von M, und in N müßten alle Ordnungen $\prec_\tau$, und dann auch alle Ordnungen $<_\tau$ aus T, übereinstimmen, was der Konstruktion von T widerspricht.

§ 5. Eine Anwendung auf die Topologie. Die Sätze 2 und 6 gestatten eine gewisse Anwendung auf die Topologie. Es seien $W_\varkappa$, $\varkappa < \lambda$, wohlgeordnete Mengen. Wir betrachten dann das cartesische Produkt $R = W_0 \times W_1 \times \ldots \times W_\varkappa \times \ldots | \ \varkappa < \lambda$. Dabei sei folgende Umgebungsdefinition in R gegeben: Ist $x = [x_0, \ldots, x_\varkappa, \ldots | \ \varkappa < \lambda]$ mit $x_\varkappa \in W_\varkappa$ ein Punkt aus R, so sei eine Teilmenge $U \subset R$ genau dann eine *Umgebung von* x, wenn $U = U_0 \times U_1 \times \ldots \times U_\varkappa \times \ldots | \ \varkappa < \lambda$, ist, wo jedes $U_\varkappa$ ein Segment der geordneten Menge $W_\varkappa$ ist, das $x_\varkappa$ enthält, und in dem $x_\varkappa$ nicht erstes Element ist [4].

Ist $M \subset R$, so nennen wir einen Punkt $k \in R$ einen *$\aleph_\nu$-Kondensationspunkt zu M*, wenn in jeder Umgebung von k mindestens $\aleph_\nu$ viele Punkte von M liegen. Dann gilt folgender

SATZ 9. *Es sei $\aleph_\nu$ eine beliebige unendliche Kardinalzahl und c und c' definiert wie in Satz 6. Sodann sei λ eine Ordinalzahl mit $\bar{\lambda} < c$, falls $\aleph_\nu$ keine Limeskardinalzahl ist, bzw. $\bar{\lambda} < c'$, falls $\aleph_\nu$ eine Limeskardinalzahl ist.*

Ist dann für jedes $\varkappa < \lambda$ jeweils $W_\varkappa$ eine wohlgeordnete Menge mit einem letzten Element, so gibt es zu jeder Teilmenge $M \subset R = W_0 \times W_1 \times \times \ldots \times W_\varkappa \times \ldots | \ \varkappa < \lambda$, mit der Mächtigkeit $\overline{\overline{M}} = \aleph_\nu$ einen $\aleph_\nu$-Kondensationspunkt in R, wenn man im Falle, daß $\aleph_\nu$ Limeskardinalzahl ist, die Kontinuumhypothese annimmt.

Beweis. Wir nehmen an, daß die $W_\varkappa$ Abschnitte der Ordinalzahlreihe sind, was ja die Allgemeinheit nicht einschränkt. Zu jedem $\varkappa < \lambda$ sei nun in M eine Wohlordnung $<_\varkappa$ definiert, so daß gilt:

Sind $x = [x_0, \ldots, x_\varkappa, \ldots]$ und $y = [y_0, \ldots, y_\varkappa, \ldots]$ Elemente von M, so folgt aus $x <_\varkappa y$, daß $x_\varkappa \leqslant y_\varkappa$ (im Sinne des $\leqslant$ für Ordinalzahlen) gilt.

Solche Ordnungen sind ja leicht zu finden. Wegen Satz 2 bzw. Satz 6 gibt es dann eine Menge $K \subset M$ der Mächtigkeit $\overline{\overline{K}} = \aleph_\nu$, in der alle Ordnungen $<_\varkappa$, $\varkappa < \lambda$, übereinstimmen. Wir können annehmen, daß K in Bezug auf jede der Ordnungen $<_\varkappa$ den Typ ω_ν hat, andernfalls gehe man zu einer Teilmenge mit dieser Eigenschaft über. Es gilt dann also:

(*) *Sind $x = [x_0, \ldots, x_\varkappa, \ldots]$ und $y = [y_0, \ldots, y_\varkappa, \ldots]$ aus K und ist $x <_\tau y$ für jedes $\tau < \lambda$, so ist $x_\varkappa \leqslant y_\varkappa$ für jedes $\varkappa < \lambda$.*

Ist $x \in K$, so bezeichne $x_\varkappa$ die $\varkappa$-te Komponente von x. Es sei dann $s_\varkappa = \sup\{x_\varkappa | \ x \in K\}$. Da $W_\varkappa$ ein letztes Element hat, existiert $s_\varkappa$, und es ist $s = [s_0, \ldots, s_\varkappa, \ldots | \ \varkappa < \lambda]$ Element von R. Es folgt weiter, daß s $\aleph_\nu$-Kondensationspunkt zu K ist, denn ist eine Umgebung $U = U_0 \times \times \ldots \times U_\varkappa \times \ldots | \ \varkappa < \lambda$, von s gegeben, so gilt wegen (*) bei gegebenem $\varkappa$ für alle $x \in K$ mit Ausnahme von weniger als $\aleph_\nu$ vielen, $x_\varkappa \in U_\varkappa$. Dann ist die Menge A der Elemente aus K, die nicht in U fallen, Vereinigungsmenge von $\bar{\lambda}$ vielen Mengen, deren Mächtigkeit je $< \aleph_\nu$ ist. Wegen $\bar{\lambda} < c$ folgt aus der Bedeutung von c (vgl. Fußnote 2!) also $\overline{\overline{A}} < \aleph_\nu$, und es fallen folglich $\aleph_\nu$ viele Elemente von K, also von M, in U, was zu zeigen war.

---

[4] Wir erheben nicht zugleich die analoge Forderung, daß $x_\varkappa$ nicht letztes Element von $U_\varkappa$ ist, da Satz 9 auch ohne diese schon folgt.

Zitate

[1] E. Harzheim, *Dualzerlegungen in totalgeordneten Mengen*, this volume, S. 81-91.

[2] A. Lindenbaum, *Z teorii uporządkowania wielokrotnego* (*Sur la théorie de l'ordre multiple*), Wiadomości Matematyczne 37 (1934), S. 1-35.

Reçu par la Rédaction le 7. 8. 1962

Rotation groups under monotone transformations

by

A. G. Haddock (Batesville, Ark.)

Lucille Whyburn [1] has several theorems concerning rotation groups under topological transformations. We generalize her results by relaxing the condition that the transformation be topological.

Unless otherwise specified, S is to mean a compact Hausdorff space (M is to mean a plane Peano continuum), T will be a monotone transformation such that $T(S) = S$ ($T(M) = M$), and if T allows a set K of fixed points then $T^{-1}(K) = K$. The proofs of most of the theorems follow in a straightforward manner along the lines of Whyburn's proofs and are not included.

THEOREM 1. *If C_1 is a component of $S-K$, then $T(C_1)$ and $T^{-1}(C_1)$ are components of $S-K$.*

THEOREM 2. *Let C_0 be a component of $S-K$, $C_n = T^n(C_0)$ for each n, and let G be the collection C_n. Then G forms a commutative group where the group operation is defined for any two elements C_i and C_j as $C_iC_j = T^j(C_i)$.*

THEOREM 3. *Every component of $S-K$ lies in one and only one rotation group.*

LEMMA 1. *If $T(x_0) = x_0$ and $\{x_i\}$ is a sequence of distinct points converging to x_0, then $\{T^{-1}(x_i)\}$ is a sequence of sets converging to x_0.*

Proof. Letting $L = \bigcup_{i=0}^{\infty} x_i$, it follows from the continuity of T that $T^{-1}(L)$ is closed and hence compact. Suppose first that $x_0 \notin \overline{\lim_i}\, T^{-1}(x_i)$. Then there is an open set U_0 about x_0 such that $U_0 \cap T^{-1}(L) = x_0$. Let U_i for $i > 0$ be an open set about x_i such that $U_i \cap (\bigcup_{j\neq i, j=0}^{\infty} x_j) = \emptyset$. It follows that $U_i' = T^{-1}(U_i)$ is an open set containing $T^{-1}(x_i)$ such that $U_i' \cap \big(\bigcup_{j\neq i, j=0}^{\infty} T^{-1}(x_i)\big) = \emptyset$. Hence the collection $\{U_i'\}$ including $i = 0$ is an open covering of $T^{-1}(L)$ which contains no finite subcovering. This contradicts the fact that $T^{-1}(L)$ is compact. Suppose now that there exists a point y in $\overline{\lim}\, T^{-1}(x_i)$ such that $y \neq x_0$. Then by the definition of the limit superior, given any open set U about y, U intersects infinitely many