STUDIA MATHEMATICA, T. XXIV. (1964)

Une remarque sur les logarithmes unilatéraux

par

W. KIERAT (Katowice)

J. Mikusiński a énoncé, dans la note [1], p. 234-235, le théorème suivant:

THÉORÈME. *Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres réels distincts et $\beta_1, \ldots, \beta_n$ des nombres complexes non nuls. Pour que la fonction exponentielle*

$$\exp[(\beta_1 s^{\alpha_1} + \ldots + \beta_n s^{\alpha_n})\lambda] \tag{1}$$

existe pour $\lambda \geqslant 0$, il faut et il suffit qu'il existe, pour $\lambda \geqslant 0$, chacune des fonctions exponentielles

$$\exp(\beta_1 s^{\alpha_1}\lambda), \ldots, \exp(\beta_n s^{\alpha_n}\lambda).$$

La démonstration du théorème est basée sur le travail [2]. Or, on peut remarquer que la méthode y employée ne s'applique que lorsque les fonctions sont considérées pour tout λ réel, et qu'elle faillit, quand ces fonctions n'existent que pour $\lambda < 0$. En effet, il est alors impossible, en général, de choisir les nombres $\delta_1, \ldots, \delta_n$ $(\delta_\nu > 0)$, de manière que le système des équations de [2], p. 233, ait une solution non négative, par rapport à γ_ν.

Dans la note présente, je me propose de donner une démonstration modifiée, embrassant tous les deux cas cités ci-dessus.

Démonstration. Si la fonction (1) est définie pour $\lambda \geqslant 0$, alors l'opérateur

$$\beta_1 s^{\alpha_1} + \ldots + \beta_n s^{\alpha_n} \tag{2}$$

est un logarithme droit ou bilatéral. Du théorème de [1], p. 238, il résulte que l'opérateur

$$\beta_1 \bar{s}^{\alpha_1} + \ldots + \beta_n \bar{s}^{\alpha_n} + \alpha\bar{s} \tag{3}$$

est un logarithme bilatéral (l'opérateur (3) est défini dans l'intervalle $0 \leqslant t < \overline{T} = \frac{1}{2}T$, α est un nombre caractéristique (non-négatif) du logarithme (2)).

Nous distingons les deux cas:

I. Tout les nombres α_i sont différents de 1;

II. On a $\alpha_i = 1$ pour un certain i.

Dans le cas I, l'opérateur (3) est un logarithme bilatéral, d'où il s'ensuit que, pour chaque $\delta\nu > 0$ et γ_ν réel, il existe une fonction

$$\exp\Big[\sum_{\nu=1}^{n+1}\gamma_\nu(\beta_1\delta_\nu^{\alpha_1}\bar{s}^{\alpha_1}+\ldots+\beta_n\delta_\nu\bar{s}^{\alpha_n}+\alpha\delta_\nu\bar{s})\lambda\Big], \tag{4}$$

ses valeurs étant des opérateurs dans l'intervalle $0 \leqslant t < \overline{T}\delta^*$, $\delta^* = \min\delta_\nu$. Admettons que $\delta_\nu = 2^\nu$ pour $\nu = 1, \ldots, n+1$. Il existe alors une solution du système

$$\sum_{\nu=1}^{n+1}\delta_\nu^{\alpha_1}\gamma_\nu = 1, \quad \sum_{\nu=1}^{n+1}\delta_\nu^{\alpha_2}\gamma_\nu = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{\nu=1}^{n+1}\delta_\nu\gamma_\nu = 0,$$

et la fonction (4) se réduit à $\exp(\beta_1 s^{\alpha_1}\lambda)$; elle est définie pour chaque λ réel.

D'une façon analogue, on peut démontrer que, pour chaque λ réel, il existe des fonctions

$$\exp(\beta_1 s^{\alpha_2}\lambda), \ldots, \exp(\beta_n s^{\alpha_n}\lambda).$$

Dans le cas II, nous pouvons admettre que $\alpha_n = 1$. Alors l'opérateur (3) prend la forme

$$\beta_1\bar{s}^{\alpha_1}+\ldots+(\beta_n+\alpha)\bar{s}.$$

Pour chaque $\delta_\nu > 0$ et γ_ν réel, il existe une fonction

$$\exp\Big[\sum_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu\big(\beta_1\delta_\nu\bar{s}^{\alpha_1}+\ldots+(\beta_n+\alpha)\delta_\nu\bar{s}\big)\lambda\Big] \tag{5}$$

dont les valeurs sont des opérateurs dans $0 \leqslant t < \overline{T}\delta^*$, $\delta^* = \min\delta_\nu$. En admettant les mêmes δ_ν que dans le cas I, le système

$$\sum_{\nu=1}^{n}\delta_\nu^{\alpha_1}\gamma_\nu = 1, \quad \sum_{\nu=1}^{n}\delta_\nu^{\alpha_2}\gamma_\nu = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{\nu=1}^{n}\delta_\nu\gamma_\nu = 0$$

possède une solution par rapport à γ_ν. Donc, la fonction (5) se réduit à la forme $\exp(\beta_1 s^{\alpha_1}\lambda)$. On démontre d'une façon analogue, pour chaque λ réel, qu'il existe des fonctions $\exp(\beta_2 s^{\alpha_2}\lambda), \ldots, \exp[(\beta_n+\alpha)s\lambda]$.

La fonction $\exp\big((\beta_n+\alpha)s\lambda\big)$ existe pour chaque λ réel, si $\beta_n+\alpha = 0$ et seulement dans ce cas, ce qui entraîne $\exp(\beta s\lambda) = \exp(-\alpha s\lambda)$. La fonction à droite de la dernière égalité est définie pour $\lambda \geqslant 0$.

Travaux cités

[1] J. Mikusiński, *Le calcul opérationnel d'intervalle fini*, Studia Mathematica 15 (1956), p. 225-251.

[2] — *Sur les fonctions exponentielles du calcul opératoire*, ibidem 12 (1951), p. 208-224.

Reçu par la Rédaction le 24. 10. 1963