STUDIA MATHEMATICA, T. XXV. (1964)

Sur un théorème de calcul opérationnel d'intervalle fini

par

W. KIERAT et J. MIKUSIŃSKI (Katowice)

Dans le travail [1] J. Mikusiński considère un anneau des fonctions continues dans l'intervalle $0 \leqslant t < T$ avec l'addition ordinaire et la multiplication dans le sens du produit de composition. Les éléments de l'anneau-quotient sont appelés des *opérateurs*.

Dans le travail cité ci-dessus, l'auteur considère trois types de fonctions exponentielles $e^{w\lambda}$: fonctions exponentielles droites, fonctions exponentielles gauches et fonctions exponentielles bilatérales.

La fonction exponentielle droite est définie comme solution de l'équation différentielle $x'(\lambda) = wx(\lambda)$ dans l'intervalle $0 \leqslant \lambda < \infty$, telle que $x(0) = 1$.

D'une façon analogue, on définie des fonctions exponentielles gauches. Pour certains opérateurs w, la fonction $e^{w\lambda}$ est définie pour tous λ réels; alors la fonction est bilatérale.

À chacune fonction $e^{w\lambda}$ correspond un opérateur w qui s'appelle *logarithme droit* dans le premier cas, *logarithme gauche* dans le second cas et *logarithme bilatéral* dans le troisième cas.

Dans [1] J. Mikusiński a démontré un théorème sur la représentation des opérateurs qui sont des logarithmes.

Ce théorème est lié avec la notion d'opérateurs partiels.

Définition. Soit $w = \dfrac{a}{b}$, où a et b sont des fonctions continues définies dans l'intervalle $0 \leqslant t < T$. Par l'*opérateur partiel* de w, pour l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant \overline{T} < T$, nous entendons l'opérateur $\overline{w} = \dfrac{\overline{a}}{\overline{b}}$, où $\overline{a}$ et $\overline{b}$ sont des fonctions définies dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant \overline{T}$ dont les valeurs coïncident dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant \overline{T}$, avec celles de a et b, respectivement.

Dans le travail cité, le théorème suivant a été démontré:

Si w est un logarithme et α ([1], p. 238) *est son nombre caractéristique, l'opérateur partiel de w est de la forme $\overline{w} = \overline{w}_0 - \alpha\overline{s}$, où w_0 est un logarithme bilatéral et $\overline{s}$ est l'opérateur différentiel* (*dans l'intervalle* $0 \leqslant t \leqslant \overline{T}$).

Remarque. Dans ce travail, on considère des intervalles ouverts $0 \leqslant t < T$, mais le théorème ainsi que sa démonstration sont aussi valables pour les intervalles fermés. D'ailleurs, P. Antosik a démontré récemment que le corps des opérateurs dans l'intervalle fermé $0 \leqslant t \leqslant T$ est isomorphe au corps des opérateurs dans l'intervalle ouvert $0 \leqslant t < T$. Son résultat n'a pas été publié encore.

Dans cette note nous allons démontrer que la restriction aux opérateurs partiels n'est pas nécessaire et que le théorème est vrai dans la forme plus forte suivante:

THÉORÈME. *Si w est un logarithme et a son nombre caractéristique l'opérateur w est de la forme $w = w_0 - as$, où w_0 est logarithme bilatéral et s est l'opérateur différentiel.*

Pour la démonstration nous supposons que $a > 0$. Dans le cas $a < 0$ la démonstration est analogue. Pour $a = 0$ la démonstration est triviale.

D'après [1], p. 234, il résulte que l'équation

$$\int_0^t p(t-\tau) Y_\lambda(\lambda, \tau)\, d\tau = \int_0^t q(t-\tau) Y(\lambda, \tau)\, d\tau \qquad \left(w = \frac{q}{p}\right) \tag{1}$$

a une solution $Y(\lambda, \tau)$ dans un rectangle

$$0 \leqslant t \leqslant T, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0, \tag{2}$$

telle que $Y(0, t)$ ne s'annule pas identiquement au voisinage de $t = 0$.

Nous prolongeons l'opérateur w à l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 2T$ et le désignons par $\tilde{w}$.

Nous considérons l'équation

$$\int_0^t \tilde{p}(t-\tau) \tilde{Z}_\lambda(\lambda, \tau)\, d\tau = \int_0^t \tilde{q}(t-\tau) \tilde{Z}(\lambda, \tau)\, d\tau \tag{3}$$

dans le rectangle

$$0 \leqslant t \leqslant 2T, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0. \tag{4}$$

Pour solution de l'équation (3) nous trouvons

$$\tilde{Z}(\lambda, t) = \tilde{Y}(\lambda, t) + \tilde{V}(\lambda, t), \tag{5}$$

où

$$\tilde{Y}(\lambda, t) = \begin{cases} Y(\lambda, t) & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ Y(\lambda, T) & \text{pour} \quad T < t \leqslant 2T, \end{cases}$$

$$\tilde{V}(\lambda, t) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

De plus $\tilde{V}(s, t)$ est une fonction continue dans rectangle (4).

D'après (3) et (5), on a

$$-\int_0^t \tilde{p}(t-\tau) \tilde{V}_\lambda(\lambda, \tau)\, d\tau + \int_0^t \tilde{q}(t-\tau) \tilde{V}(\lambda, \tau)\, d\tau = \int_0^t \tilde{p}(t-\tau) \tilde{Y}_\lambda(\lambda, \tau)\, d\tau - \int_0^t \tilde{q}(t-\tau) \tilde{Y}(\lambda, \tau)\, d\tau. \tag{6}$$

Posons

$$-\tilde{\varphi}(\lambda, t) = \int_0^t \tilde{p}(t-\tau) \tilde{Y}_\lambda(\lambda, \tau)\, d\tau - \int_0^t \tilde{q}(t-\tau) \tilde{Y}(\lambda, \tau)\, d\tau. \tag{7}$$

Dans le rectangle (2) on a $\tilde{Y}(\lambda, t) = Y(\lambda, t)$, ce qui entraîne, en vertu de (1), que $\varphi(\lambda, t) = 0$ dans (2).

Dans (6) nous posons $t = T + u$, nous changeons la variable d'intégration, ce qui donne, en tenant compte de (7),

$$\int_{-T}^u \tilde{p}(u-\omega) \tilde{V}_\lambda(\lambda, T+\omega)\, d\omega - \int_{-T}^u \tilde{q}(u-\omega) \tilde{V}(\lambda, T+\omega) = \tilde{\varphi}(\lambda, T+u). \tag{8}$$

La fonction $\tilde{V}(\lambda, T+u) = 0$ satisfait dans le rectangle $-T \leqslant u \leqslant 0$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$, à l'équation (8).

Nous posons

$$\tilde{V}(\lambda, T+u) = \tilde{V}^*(\lambda, u), \qquad \tilde{\varphi}(\lambda, T+u) = \tilde{\varphi}^*(\lambda, u)$$

alors

$$\tilde{V}_\lambda(\lambda, T+u) = \tilde{V}_\lambda^*(\lambda, u).$$

L'équation (8) peut alors s'écrire dans la forme

$$\tilde{p} \tilde{Y}_\lambda^*(\lambda) - \tilde{q} \tilde{Y}^*(\lambda) = \tilde{\varphi}^*(\lambda)$$

(les opérateurs sont définis dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant T$). Cette équation est équivalente à l'équation

$$p \tilde{Y}_\lambda^*(\lambda) - q \tilde{Y}^*(\lambda) = \tilde{\varphi}^*(\lambda). \tag{9}$$

Comme la fonction $\varphi^*(\lambda)$ est continue, il existe d'après [2], p. 325, une solution de l'équation (9) de la forme

$$\tilde{Y}^*(\lambda) = \frac{1}{p} \int_0^\lambda \tilde{\varphi}^*(\lambda) e^{\frac{q}{p}(\lambda - \varkappa)}\, d\varkappa.$$

Il en résulte qu'il existe une solution $\tilde{Z}(\lambda, t)$ de l'équation (3) dans le rectangle (4) qui $\tilde{Z}(0, t)$ n'est pas identiquement nulle au voisinage de $t = 0$.

D'après [1], p. 234, l'opérateur $\tilde{w} = \frac{\tilde{q}}{\tilde{p}}$ est un logarithme droit dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 2T$ avec le nombre caractéristique α.

D'après de théorème cité au commencement de cette note, il s'ensuit, pour $\overline{T} = T$, que $w = w_0 - \alpha s$.

Travaux cités

[1] J. Mikusiński, *Le calcul opérationnel d'intervalle fini*, Stud. Math. 15 (1956), p. 225-251.

[2] — *Rachunek operatorów*, Warszawa 1957.

Reçu par la Rédaction le 16. 3. 1964

STUDIA MATHEMATICA, T. XXV. (1964)

The norm of a discrete singular transform

by

B. MUCKENHOUPT (South Hadley, Mass.)

1. Introduction. In [3], Calderon and Zygmund proved that certain discrete singular transforms bear a striking resemblance to the better known continuous ones. The theorems concerning the l^2 or L^2 norm were similar, and in the one-dimensional case the discrete and continuous analogues have the same norm. It was natural to conjecture that this was true in higher dimensions. This paper shows that this is not the case and presents the first serious divergence between the discrete and continuous theory. Incidentally, it produces an amusing summation formula.

The discrete transforms considered in [3] are of the type

$$\tilde{a}_j = \sum_k{}' \frac{\Omega(k)}{|k|^n} a_{j-k}. \tag{1}$$

The points j and k are of the form $m_1 e_1 + m_2 e_2 + \ldots + m_n e_n$, the m_i being integers and the e_i a fixed basis for n-dimensional Euclidean space. The summation is over all such points except the origin. The a_i and $\Omega(k)$ are real or complex valued, $\Omega(h) = \Omega(k/|k|)$, the integral of Ω on the unit sphere is zero, and Ω's modulus of continuity satisfies the Dini condition. The principal result ([3], p. 268) was that the l^2 norm of (1) is the essential least upper bound of the modulus of the function with Fourier series

$$\sum_k{}' \frac{\Omega(k)}{|k|^n} e^{2\pi i(k\cdot x)}. \tag{2}$$

The continuous version of this theorem concerns the singular integral in n dimensions of the form

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|y|>\varepsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y)\,dy, \tag{3}$$

where Ω has the properties given above ([2], p. 88-91). This transform has L^2 norm equal to the essential least upper bound of the modulus of

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon>|y|<1/\varepsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} e^{2\pi i(y\cdot x)}\,dy. \tag{4}$$