ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XV (1964)

Sur un problème de Neumann généralisé

par Z. SZMYDT (Kraków)

Dans le Théorème III de la note [3] j'ai construit une solution d'un problème de Neumann généralisé, appelé problème N. Je vais démontrer ici que chaque solution de ce problème ne diffère que par une constante de la solution construite dans [3].

Le Théorème 2 de la présente note (cf. le paragraphe 3) englobe deux résultats en connection: 1) l'existence et l'unicité, à une constante additive près, d'une solution du problème N (énoncé au § 2), 2) l'isomorphisme entre un sous-ensemble de fonctions harmoniques dans un domaine plan Ω et une classe de distributions définies sur le contour de Ω. La démonstration du Théorème 2 est donnée au § 4 et les conséquences de ce Théorème relatives au problème de Neumann généralisé sont exposées au § 5.

Le paragraphe 6 complète nos résultats antérieurs (cf. [3] et [4]) concernant le problème de Dirichlet généralisé. Les notations dont nous nous servirons dans la suite sont données au paragraphe 1.

§ 1. Notations. Une courbe située dans le plan de la variable complexe $z = x+iy$ sera désignée par Σ et dite *courbe simple fermée* lorsqu'elle admet la représentation paramétrique: $z = z(s)$ pour $0 \leqslant s \leqslant L$, où (i) $z(s)$ est une fonction continue avec sa dérivée première $z'(s)$ et périodique de période L $(L > 0)$, (ii) $z(s_1) = z(s_2)$ avec $0 \leqslant s_1 < s_2 \leqslant L$ si et seulement si $s_1 = 0$ et $s_2 = L$. On suppose encore que (iii) $|z'(s)| = 1$ lorsque $0 \leqslant s \leqslant L$. Σ sera dite *de classe* C^n lorsque la fonction périodique $z(s)$ est de classe C^n. Si en outre la dérivée $z^{(n)}(s)$ vérifie la condition de Lipschitz, la courbe Σ sera dite *de classe* C_1^n. Nous dirons que la représentation paramétrique $z = z(s)$, $0 \leqslant s \leqslant L$, de la courbe simple fermée de classe C^n est *normale*, lorsque $z(s)$ est une fonction de classe C^n satisfaisant aux conditions (i)-(iii).

Dans la suite ϱ désignera un nombre positif, r un nombre réel arbitraire et m un entier non négatif.

Soit Ω le domaine limité par la courbe Σ: $z = z(s)$, $0 \leqslant s \leqslant L$, et soit n_z le vecteur normal au point z de Σ dirigé vers l'intérieur de Ω.

On désignera par Ω_r le domaine limité par la courbe Σ_r, donnée par l'équation: $z = z_r(s)$, $0 \leqslant s \leqslant L$, où $z_r(s) = x_r(s) + iy_r(s)$ et $x_r(s) = x(s) - - ry'(s)$, $y_r(s) = y(s) + rx'(s)$. À chaque fonction f, définie sur la courbe $z = z_r(s)$ on fait correspondre la fonction $\tilde{f}_r(s) = f[z_r(s)]$, $0 \leqslant s \leqslant L$. Nous dirons que f est une *fonction de classe* $C^m(\Sigma_r)$, lorsque la fonction périodique $\tilde{f}_r(s)$ est de classe C^m. On a: $\Sigma = \Sigma_0$, $\Omega = \Omega_0$ et $\tilde{f} = \tilde{f}_0$.

Soit $D_m(\Sigma)$ l'espace réel des fonctions réelles $f(z) \in C^m(\Sigma)$, avec la norme définie par la formule: $\|f\| = \sum_{k=0}^{m} \max_{0 \leqslant s \leqslant L} |\tilde{f}^{(k)}(s)|$. On désignera par F, G, H les distributions d'ordre $\leqslant m$, c'est-à-dire les éléments du dual $D'_m(\Sigma)$.

Soit Σ une courbe simple fermée de classe C_1^1. On désignera par ϱ_0 un nombre positif assez petit tel que, pour chaque $0 \leqslant r \leqslant \varrho_0$, la courbe Σ_r soit fermée et telle que $z_r(s_1) = z_r(s_2)$ avec $s_1 < s_2$ si et seulement si $s_1 = 0$ et $s_2 = L$.

D'autre part soit $K_m(\Sigma, +)$ l'ensemble des fonctions q ayant les propriétés suivantes: (a) $q \in C^m(\Sigma_r)$ pour chaque $0 \leqslant r \leqslant \varrho_0$, (b) $\lim_{r \to 0} \tilde{q}_r^{(j)}(s) = q_0^{(j)}(s)$ avec $\tilde{q}_r(s) = q[z_r(s)]$, $j = 0, 1, \ldots, m$, uniformément dans l'intervalle $0 \leqslant s \leqslant L$.

Par $D_m(\Sigma, +)$ on désignera l'ensemble des fonctions q telles que $q(z) \in D_m(\Sigma)$ et $q(z_r) = q(z)$ lorsque $0 \leqslant r \leqslant \varrho_0$ et $z \in \Sigma$.

Il est évident que $D_m(\Sigma, +) \subset K_m(\Sigma, +)$. D'autre part, étant donnée une fonction $p \in D_m(\Sigma)$, il existe toujours une fonction $q \in D_m(\Sigma, +)$ qui coïncide avec p sur la courbe Σ. On notera $\|q\|$ la norme dans l'espace $D_m(\Sigma)$ de la restriction de la fonction q à la courbe Σ.

§ 2. Énoncé du problème de Neumann généralisé.

Problème N. *Soit donnée une distribution $B \in D'_m(\Sigma)$. On cherche une fonction v, harmonique à l'intérieur du domaine Ω, qui pour chaque fonction $q \in K_m(\Sigma, +)$ vérifie la condition aux limites généralisée:*

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_{\Sigma_\varrho} q(z_\varrho) \frac{\partial v}{\partial n_z} ds_{z_\varrho} = B[q]. \tag{1}$$

Problème $\mathrm{N}^{\mathrm{bis}}$. *Soit donnée une distribution $B \in D'_m(\Sigma)$. On cherche une fonction v, harmonique à l'intérieur du domaine Ω, qui vérifie la condition* (1) *pour chaque fonction $q \in D_m(\Sigma, +)$.*

Théorème 1. *Les problèmes* N *et* $\mathrm{N}^{\mathrm{bis}}$ *sont équivalents.*

Démonstration. Il est évident que chaque solution du problème N est aussi une solution du problème $\mathrm{N}^{\mathrm{bis}}$. Inversement, supposons que

$v(z)$ soit une solution du problème $\mathrm{N}^{\mathrm{bis}}$ et soit

$$(2) \qquad B_\varrho[p] = \int_\Sigma p(z) \frac{\partial v(z_\varrho)}{\partial n_z} \cdot \frac{ds_{z_\varrho}}{ds_z} ds_z$$

pour chaque fonction $p \in D_m(\Sigma)$ et $0 < \varrho \leqslant \varrho_0$.

On vérifie facilement que la formule (2) définit une fonctionnelle $B_\varrho \in D'_m(\Sigma)$ et que:

$$(3) \qquad \lim_{\varrho \to 0} B_\varrho[p] = B[p] \quad \text{lorsque} \quad p \in D_m(\Sigma).$$

Soit q une fonction arbitraire de la classe $K_m(\Sigma, +)$ et soit

$$(4) \qquad q_\varrho(z) = q(z_\varrho) \quad \text{lorsque} \quad 0 < \varrho \leqslant \varrho_0 \text{ et } z \in \Sigma.$$

On vérifie aisément que

$$(5) \qquad \lim_{\varrho \to 0} q_\varrho(z) = q(z) \quad \text{dans l'espace } D_m(\Sigma).$$

Les relations (3) et (5) entraînent la suivante: $\lim\limits_{\varrho \to 0} B_\varrho[q_\varrho] = B[q]$ d'où, en vertu des définitions (2) et (4), résulte la relation (1), ce qui achève la démonstration du Théorème 1.

§ 3. Fonctions harmoniques dans Ω et distributions sur le contour de Ω. Soit $W_m(\Omega)$ l'espace des fonctions $v(z)$ harmoniques dans le domaine Ω et telles que la fonction

$$(6) \qquad \sup_p \frac{\left| \int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho) \frac{\partial v}{\partial n_z} ds_{z_\varrho} \right|}{\|p\|} \quad \text{où} \quad p \in D_m(\Sigma, +),\ \|p\| \neq 0,$$

soit bornée dans l'intervalle $0 < \varrho \leqslant \varrho_0$.

Soit $C(\Omega)$ l'ensemble des fonctions constantes dans le domaine Ω et soit $V_m(\Omega)$ l'espace quotient $W_m(\Omega)/C(\Omega)$, c'est-à-dire l'ensemble des classes $[v]$ dont chacune est formée des éléments: $v + \text{const}$ où $v \in W_m(\Omega)$.

D'autre part soit $B'_m(\Sigma)$ l'ensemble des distributions B telles que $B \in D'_m(\Sigma)$ et $B[1] = 0$.

Supposons que $p \in C^0(\Sigma_r)$, $0 \leqslant r \leqslant \varrho_0$, et soit $k_{p,r}$ la constante définie par la formule suivante [1]:

$$(7) \qquad k_{p,r} = \int_{\Sigma_r} \mu_r(z_r) p(z_r) ds_{z_r} \Big/ \int_{\Sigma_r} \mu_r(z_r) ds_{z_r}$$

---

[1] La constante $k_{p,r}$ ne dépend pas du choix particulier de la solution $\mu_r(z_r)$ de l'équation (8).

où $\mu_r(z_r)$ désigne une solution quelconque non banale de l'équation

$$\pi\mu(\zeta_r)+\int_{\Sigma_r}\mu(z_r)\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z_r-\zeta_r|ds_{z_r}=0 \tag{8}$$

et Σ est une courbe simple fermée de classe C^2. On sait bien que

$$\mu_r(z_r)\neq 0 \quad \text{lorsque} \quad z_r\in\Sigma_r \text{ et } 0\leqslant r\leqslant \varrho_0 \tag{9}$$

et d'autre part que l'équation:

$$p(\zeta_r)-k_{p,r}=\int_{\Sigma_r}\chi(z_r)\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z_r-\zeta_r|ds_{z_r}+\pi\chi(\zeta_r) \tag{10}$$

admet une solution et que deux solutions quelconques ne diffèrent que par une constante.

THÉORÈME 2. *Supposons que Σ soit une courbe simple fermée de classe C^{m+3}. Soit $B\in B'_m(\Sigma)$ et soit H la fonctionnelle définie par la formule*

$$H[p]=B[\chi_{p,0}(z)] \quad \textit{lorsque} \quad p\in D_m(\Sigma) \tag{11}$$

où $\chi_{p,r}(z_r)$ désigne une solution quelconque de l'équation (10).

Sous ces hypothèses on a $H\in B'_m(\Sigma)$ et la formule (11) *définit une transformation biunivoque de l'espace $B'_m(\Sigma)$ en lui-même. D'autre part la fonction*

$$v(z)=H[\log|z-\zeta|] \quad \textit{lorsque} \quad z\in\Omega \tag{12}$$

appartient à l'espace $W_m(\Omega)$. La transformation Γ définie par la relation $\Gamma B=[v]$ établit un isomorphisme des espaces linéaires $B'_m(\Sigma)$ et $V_m(\Omega)$. Son inverse $\Gamma^{-1}([v])$ est donnée par

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_{\Sigma_\varrho}q(z_\varrho)\frac{\partial v^*}{\partial n_z}ds_{z_\varrho}=B[q] \quad \textit{lorsque} \quad q\in D_m(\Sigma;+) \tag{13}$$

où v^* désigne une fonction quelconque de la classe $[v]$.

L'ensemble des solutions du problème $\mathrm{N}^{\mathrm{bis}}$ *où $B\in B'_m(\Sigma)$ coïncide avec la classe $[v]$ dont le représentant $v(z)$ est défini par les relations* (12) *et* (11).

Remarque 1. Soit $S_m(\Omega)$ l'ensemble des fonctions

$$v(z)=H[\log|z-\zeta|]+c \quad \text{lorsque} \quad z\in\Omega \tag{14}$$

qu'on obtient en faisant varier la constante c ainsi que la fonctionnelle H dans l'espace $B'_m(\Sigma)$.

En vertu du Théorème III de la note [3] la totalité des solutions du problème N qui appartiennent à $S_m(\Omega)$ coïncide avec la classe $[v]$

dont le représentant v est défini par (12) et (11). Comme les fonctions de la forme (14) constituent un sous-ensemble propre de l'ensemble de toutes les fonctions harmoniques dans le domaine Ω, le présent résultat est plus général que le précédent. En outre, il découle du Théorème 2 que les ensembles $S_m(\Omega)$ et $W_m(\Omega)$ coïncident.

§ 4. Démonstration du Théorème 2. Dans la démonstration du Théorème 2 nous nous appuirons sur 8 lemmes dont le premier résulte immédiatement du Théorème I de la note [3].

LEMME 1. *Soit Σ une courbe simple fermée de classe C^{m+2}. Supposons que $H \in D'_m(\Sigma)$ et soit $v(z)$ une fonction définie par la formule suivante:*

$$v(z) = H[\log|z-\zeta|] + \text{const} \quad \textit{lorsque} \quad z \in \Omega . \tag{15}$$

Dans ces hypothèses la fonction $v(z)$ est harmonique dans le domaine Ω et vérifie la condition aux limites:

$$\lim_{\varrho\to 0} \int_{\dot{\Sigma}_\varrho} p(z_\varrho) \frac{\partial v}{\partial n_z} ds_{z_\varrho} = H[X_p(\zeta)] \quad \textit{lorsque} \quad p \in D_m(\Sigma, +) \tag{16}$$

où la fonction $X_p(\zeta)$ est définie par la formule

$$X_p(\zeta) = \pi p(\zeta) + \int_{\Sigma} p(z) \frac{\partial}{\partial n_z} \log|z-\zeta| ds_z . \tag{17}$$

LEMME 2. *Chaque solution du problème* $\mathrm{N}^{\mathrm{bis}}$ *appartient à l'espace $W_m(\Omega)$.*

Démonstration. Soit $v(z)$ une solution du problème $\mathrm{N}^{\mathrm{bis}}$ et soit $B_\varrho[p]$ la fonctionnelle de l'espace $D'_m(\Sigma)$, définie par la relation (2) pour chaque $0 < \varrho \leqslant \varrho_0$. En vertu de la relation (3) et du théorème de Banach-Steinhaus (cf. [1], p. 123) il existe une constante M telle que $\|B_\varrho\| \leqslant M$ lorsque $0 < \varrho \leqslant \varrho_0$, c'est-à-dire la fonction (6) est bornée dans l'intervalle en question. On a donc: $v(z) \in W_m(\Omega)$, d'où découle notre assertion.

LEMME 3. *Soit Σ une courbe simple fermée de classe C^2. Supposons que $p, g \in C^0(\Sigma_r)$, $0 \leqslant r \leqslant \varrho_0$, et soit*

$$c_{g,r} = \frac{1}{L_r} \int_{\Sigma_r} g(z_r) ds_{z_r} \quad \textit{où} \quad L_r = \int_{\Sigma_r} ds_{z_r} . \tag{18}$$

Dans ces hypothèses les intégrales:

$$\int_{\Sigma_r} [g(z_r) - c_{g,r}] \chi_{p,r}(z_r) ds_{z_r} \quad \textit{et} \quad \int_{\Sigma_r} [p(z_r) - k_{p,r}] \mu_{g,r}(z_r) ds_{z_r}$$

ne dépendent pas du choix de la solution $\chi_{p,r}$ *de l'équation* (10) *et de celui de la solution* $\mu_{g,r}$ *de l'équation*

$$(19)\qquad g(\zeta_r)-c_{g,r}=\int_{\Sigma_r}\mu(z_r)\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z_r-\zeta_r|ds_{z_r}+\pi\mu(\zeta_r)\,.$$

D'autre part on a l'identité:

$$(20)\qquad \int_{\Sigma_r}[p(z_r)-k_{p,r}]\mu_{g,r}(z_r)ds_{z_r}=\int_{\Sigma_r}[g(z_r)-c_{g,r}]\chi_{p,r}(z_r)ds_{z_r}\,.$$

La démonstration du Lemme 3 est bien simple, c'est pourquoi nous l'omettons.

Lemme 4. *Soit Σ une courbe simple fermée de classe C^{m+2}. Soit $v(z)$ une fonction harmonique dans le domaine Ω et soit $\mu_{\frac{\partial v}{\partial n},\varrho}(z_\varrho)$ une solution quelconque de l'équation* (19) *dans laquelle $g=\partial v/\partial n$ et $r=\varrho$. Supposons que la fonction* [2]

$$(21)\qquad \sup_p\frac{\left|\int_{\Sigma_\varrho}[p(z_\varrho)-k_{p,\varrho}]\mu_{\frac{\partial v}{\partial n},\varrho}(z_\varrho)ds_{z_\varrho}\right|}{\|p\|}\qquad \text{où}\quad p\in D_m(\Sigma,+),\ \|p\|\neq 0$$

soit bornée dans l'intervalle $0<\varrho\leqslant\varrho_0$.

Dans ces hypothèses il existe une fonctionnelle $H\in B'_m(\Sigma)$ telle que la relation (15) *est satisfaite.*

Démonstration. Remarquons d'abord *qu'il* existe, pour chaque $\varrho\leqslant\varrho_0$, une constante c_ϱ telle que

$$(22)\qquad \int_{\Sigma_\varrho}\mu_{\frac{\partial v}{\partial n},\varrho}(\zeta_\varrho)\log|z-\zeta_\varrho|ds_{\zeta_\varrho}=v(z)+c_\varrho\qquad\text{lorsque}\qquad z\in\overline{\Omega}_\varrho\,.$$

Considérons dans l'espace $B'_m(\Sigma)$ la famille, dépendante du paramètre ϱ, des fonctionnelles:

$$(23)\qquad H_\varrho[p]=\int_{\Sigma_\varrho}[p(\zeta_\varrho)-k_{p,\varrho}]\mu_{\frac{\partial v}{\partial n},\varrho}(\zeta_\varrho)ds_{\zeta_\varrho},\qquad p\in D_m(\Sigma,+)\,.$$

Par hypothèse, la fonction $\|H_\varrho\|$ est bornée dans l'intervalle $0<\varrho\leqslant\varrho_0$. Il existe donc (cf. [1], p. 123) une suite $\{\varrho_n\}$ et une fonctionnelle $H\in B'_m(\Sigma)$ telles que $\lim\limits_{n\to\infty}\varrho_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}H_{\varrho_n}[p]=H[p]$ pour chaque $p\in D_m(\Sigma)$.

Choisissons un point $z\in\Omega$ et soit

$$(24)\qquad p(\zeta)=\log|\zeta-z|,\qquad p_n(\zeta)=\log|\zeta_{\varrho_n}-z|,\qquad\text{pour}\qquad n\geqslant N\,,$$

où N est assez grand pour que $z\in\Omega_{\varrho_N}$.

---

[2] La fonction (21) ne dépend pas du choix particulier de la solution $\mu_{\frac{\partial v}{\partial n},\varrho}$ (cf. le Lemme 3).

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(\zeta) = p(\zeta)$ dans l'espace $D_m(\Sigma)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} H_{\varrho_n}[p_n] = H[p]\,. \tag{25}$$

D'autre part il existe des constantes k_ϱ telles que

$$k_{\log|\zeta_\varrho - z|,\varrho} = k_\varrho \qquad \text{lorsque} \qquad z \in \overline{\Omega}_\varrho\,. \tag{26}$$

En vertu des relations (22)-(26) il existe des constantes $\tilde{c}_{\varrho_n}$ telles que

$$\lim_{n\to\infty} \{\tilde{c}_{\varrho_n} + v(z)\} = H[\log|\zeta - z|]\,. \tag{27}$$

Comme les constantes $\tilde{c}_{\varrho_n}$ ne dépendent pas du choix du point z dans le domaine Ω, la relation (27) entraîne la conclusion du Lemme 4.

Lemme 5. *Soit Σ une courbe simple fermée de classe C^{m+3}. Supposons que $p \in D_m(\Sigma, +)$.*

Dans ces hypothèses il existe un nombre positif $\tilde{\varrho} \leqslant \varrho_0$ tel que à chaque r, $0 \leqslant r \leqslant \tilde{\varrho}$, et à chaque $p \in D_m(\Sigma)$ correspond une solution $\chi_{p,r}(z_r)$ de l'équation (10) *qui vérifie les inégalités suivantes*:

$$\|\chi_{p,r}(z_r)\| \leqslant c\|p\|\,, \tag{28}$$

$$\|\chi_{p,\varrho}(z_\varrho) - \chi_{p,0}(z)\| \leqslant \eta_\varrho\|p\|\,, \qquad \lim_{\varrho\to 0} \eta_\varrho = 0\,, \tag{29}$$

dans lesquelles c et η_ϱ sont des constantes indépendantes de la fonction p; par $\|\chi_{p,r}(z_r)\|$ on comprend la norme dans l'espace $D_m(\Sigma)$ de la fonction $a_{p,r}(z) = \chi_{p,r}(z_r)$ lorsque $z \in \Sigma$.

Démonstration. Soit $N(\zeta_r, z_r)$ la fonction égale à $\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z_r - \zeta_r|$ lorsque $z_r \neq \zeta_r$ et continue pour tous les $z_r, \zeta_r \in \Sigma_r$. Soit $z = z(s)$, $0 \leqslant s \leqslant L$, une représentation paramétrique normale arbitraire de la courbe Σ et soit $\tilde{p}(\sigma) = p[z(\sigma)]$. Considérons pour chaque r, $0 \leqslant r \leqslant \varrho_0$, l'équation intégrale

$$\tilde{\chi}_r(\sigma) = \frac{1}{\pi}[\tilde{p}(\sigma) - k_{p,r}] + \lambda \int_0^L \tilde{\chi}_r(s) N[z_r(s), z_r(\sigma)] \frac{ds_r}{ds}\, ds \tag{30}$$

correspondant à la valeur caractéristique $\lambda = -1$. Il est évident que le noyau

$$M_r(s, \sigma) = N[z_r(s), z_r(\sigma)] \frac{ds_r}{ds} \tag{31}$$

est une fonction continue dans le carré Π: $0 \leqslant s \leqslant L$, $0 \leqslant \sigma \leqslant L$. Remarquons que le mineur de Fredholm d'ordre n est défini par la série convergente

$$(32)\qquad D_{n(M_r)}\begin{pmatrix} s_1 \dots s_n \\ \sigma_1 \dots \sigma_n \end{pmatrix}\!\!\left| -1\right)$$

$$= M_r\begin{pmatrix} s_1 \dots s_n \\ \sigma_1 \dots \sigma_n \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!}\int_0^L \dots \int_0^L M_r\begin{pmatrix} s_1 \dots s_n & t_1 \dots t_j \\ \sigma_1 \dots \sigma_n & t_1 \dots t_j \end{pmatrix} dt_1 \dots dt_j$$

où

$$(33)\qquad M_r\begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ y_1 \dots y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} M_r(x_1, y_1) \dots M_r(x_1, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ M_r(x_n, y_1) \dots M_r(x_n, y_n) \end{vmatrix}.$$

On sait bien qu'il existe des valeurs numériques s_1 et σ_1, $0 \leqslant s_1 \leqslant L$, $0 \leqslant \sigma_1 \leqslant L$, telles que

$$D_{1(M_0)}\left(\begin{matrix} s_1 \\ \sigma_1 \end{matrix}\middle| -1\right) \neq 0 .$$

Il en résulte que la fonction

$$(34)\qquad T_r(s, \sigma) = D_{2(M_r)}\left(\begin{matrix} s\ s_1 \\ \sigma\ \sigma_1 \end{matrix}\middle| -1\right)\Big/ D_{1(M_r)}\left(\begin{matrix} s_1 \\ \sigma_1 \end{matrix}\middle| -1\right)$$

est continue dans le carré Π à condition que r soit suffisamment petit, $0 \leqslant r \leqslant \varrho_1 \leqslant \varrho_0$. On a en outre

$$(35)\qquad \lim_{\varrho\to 0} T_\varrho(s, \sigma) = T_0(s, \sigma) \text{ uniformément dans le carré } \Pi.$$

D'autre part la fonction

$$(36)\qquad \tilde{\chi}_{p,r}(\sigma) = \frac{1}{\pi}[\tilde{p}(\sigma) - k_{p,r}] - \frac{1}{\pi}\int_0^L T_r(s, \sigma)[\tilde{p}(s) - k_{p,r}]ds, \qquad 0 \leqslant \sigma \leqslant L,$$

est une solution de l'équation (30) pour chaque $0 \leqslant r \leqslant \varrho_1$ (cf. [2], p. 381).

Remarquons ensuite qu'il existe des constantes $A > 0$ et $\varrho_2 \leqslant \varrho_1$ ainsi que des fonctions $Q_i(s, \sigma)$, $i = 1, 2$, $R_j(s, \sigma)$, $j = 1, 2, 3$, de classe C^m dans l'ensemble $-\infty < s < \infty$, $-\infty < \sigma < \infty$ telles que

$$(37)\qquad \pi N[z_r(s), z_r(\sigma)] = \frac{Q_1(\sigma, s) + rQ_2(\sigma, s)}{R_1(s, \sigma) + rR_2(s, \sigma) + r^2R_3(s, \sigma)}$$

lorsque $(0, L) \neq (s, \sigma) \neq (L, 0)$

et que $R_1(s, \sigma) + rR_2(s, \sigma) + r^2R_3(s, \sigma) \geqslant A$ lorsque $0 \leqslant s \leqslant L$, $L/5 \leqslant \sigma \leqslant 4L/5$ et $0 \leqslant r \leqslant \varrho_2$ (³).

(³) Cf. [4], Lemme 1. Il est à remarquer que le dénominateur du second membre de la relation (37) est une fonction symétrique des variables s et σ, puisque $|z_r(s) - z_r(\sigma)|^2 = [R_1(s, \sigma) + rR_2(s, \sigma) + r^2R_3(s, \sigma)](s - \sigma)^2$.

Il en résulte que pour chaque r, $0 \leqslant r \leqslant \varrho_2$, la fonction (34) admet des dérivées et qu'on a (cf. (31)-(33))

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\partial^j}{\partial\sigma^j} T_\varrho(s,\sigma) = \frac{\partial^j}{\partial\sigma^j} T_0(s,\sigma), \quad j = 1, \dots, m, \tag{38}$$

uniformément dans le rectangle Π_1: $0 \leqslant s \leqslant L$, $L/5 \leqslant \sigma \leqslant 4L/5$.

Les relations (35) et (38) entraînent l'existence des constantes $C > 0$ et $\varepsilon_\varrho > 0$, $\lim\limits_{\varrho\to 0} \varepsilon_\varrho = 0$, telles que

$$|T_r(s,\sigma)| \leqslant C, \quad |T_\varrho(s,\sigma) - T_0(s,\sigma)| \leqslant \varepsilon_\varrho \quad \text{lorsque} \quad (s,\sigma) \in \Pi \tag{39}$$

et

$$\left|\frac{\partial^j T_r(s,\sigma)}{\partial\sigma^j}\right| \leqslant C, \quad \left|\frac{\partial^j}{\partial\sigma^j}[T_\varrho(s,\sigma) - T_0(s,\sigma)]\right| \leqslant \varepsilon_\varrho \quad \text{lorsque} \quad (s,\sigma) \in \Pi_1. \tag{40}$$

Remarquons qu'en vertu des relations (7) et (9) on a

$$|k_{p,r}| \leqslant \|p\| \quad \text{lorsque} \quad 0 \leqslant r \leqslant \varrho_0. \tag{41}$$

D'autre part il existe des constantes positives $\varrho_3 \leqslant \varrho_2$ et δ_ϱ, $\lim\limits_{\varrho\to 0} \delta_\varrho = 0$ telles que

$$|k_{p,\varrho} - k_{p,0}| \leqslant \delta_\varrho \|p\| \quad \text{pour chaque} \quad p \in D_m(\Sigma) \text{ et } 0 < \varrho \leqslant \varrho_3. \tag{42}$$

En effet, considérons l'équation intégrale

$$\tilde{\mu}_r(\sigma) = \lambda \int_0^L \tilde{\mu}_r(s) K_r(s,\sigma)\, ds$$

dans laquelle $\lambda = -1$ et $K_r(s,\sigma) = N[z_r(\sigma), z_r(s)] \dfrac{ds_r}{ds}$. Choisissons s_0 de manière que

$$D_{1(K_0)}\left(\begin{matrix}\sigma \\ s_0\end{matrix}\middle| -1\right) \not\equiv 0 \quad \text{lorsque} \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant L.$$

Soit

$$\tilde{\mu}_r(\sigma) = D_{1(K_r)}\left(\begin{matrix}\sigma \\ s_0\end{matrix}\middle| -1\right) \quad \text{lorsque} \quad 0 \leqslant r \leqslant \varrho_0,\ 0 \leqslant \sigma \leqslant L.$$

On vérifie aisément qu'il existe un nombre positif $\varrho_3 \leqslant \varrho_2$ tel que $\tilde{\mu}_r(\sigma) \not\equiv 0$ dans l'intervalle $0 \leqslant \sigma \leqslant L$ lorsque $0 \leqslant r \leqslant \varrho_3$; la fonction $\mu_r(z_r) = \tilde{\mu}_r(\sigma)$ lorsque $z_r = z_r(\sigma)$, $0 \leqslant r \leqslant \varrho_3$, est une solution non nulle (cf. [2], p. 378) de l'équation (8) et

$$\lim_{r\to 0} \mu_r(z_r) = \mu_0(z) \quad \text{uniformément lorsque } z \in \Sigma. \tag{43}$$

Les relations (7), (9) et (43) entraînent la conclusion (42).

En s'appuyant sur les inégalités (39)-(43) on démontre que pour chaque $0 \leqslant r \leqslant \varrho_3$, la fonction (36) vérifie les inégalités suivantes:

$$(44) \qquad |\tilde{\chi}_{p,r}(\sigma)| \leqslant \frac{2}{\pi}\,(1+CL)\|p\| \quad \text{lorsque} \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant L\,,$$

$$(45) \qquad \max_{0\leqslant\sigma\leqslant L} |\tilde{\chi}_{p,\varrho}(\sigma)-\tilde{\chi}_{p,0}(\sigma)| \leqslant \frac{1}{\pi}\,(\delta_\varrho+2L\varepsilon_\varrho+CL\delta_\varrho)\|p\|\,,$$

$$(46) \qquad \sum_{j=1}^{m} \max_{a\leqslant\sigma\leqslant b} |\tilde{\chi}^{(j)}_{p,r}(\sigma)| \leqslant \frac{m}{\pi}\,(1+2CL)\|p\| \quad \text{où} \quad a = L/5,\ b = 4L/5\,,$$

$$(47) \qquad \sum_{j=1}^{m} \max_{a\leqslant\sigma\leqslant b} |\tilde{\chi}^{(j)}_{p,\varrho}(\sigma)-\tilde{\chi}^{(j)}_{p,0}(\sigma)| \leqslant \frac{mL}{\pi}\,(2\varepsilon_\varrho+C\delta_\varrho)\|p\| \quad \text{où} \quad a=L/5,\ b=4L/5\,.$$

D'autre part, la fonction $\chi_{p,r}(z_r)$ définie par la relation

$$(48) \qquad \chi_{p,r}(z_r) = \tilde{\chi}_{p,r}(s) \quad \text{lorsque} \quad z_r = z_r(s),\ 0 \leqslant s \leqslant L\,,$$

vérifie l'équation (10).

Soit maintenant $\tau = \sigma - L/2$ et $z^*(\tau) = z(\tau+L/2)$. On voit que $z = z^*(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant L$, est aussi une représentation paramétrique normale de la courbe Σ. Le raisonnement qui vient d'être fait assure l'existence d'une solution $\chi^*_{p,r}$ de l'équation (10) telle que la fonction

$$(49) \qquad \tilde{\chi}_{p,r}(\tau) = \chi^*_{p,r}[z^*_r(\tau)] \quad \text{lorsque} \quad 0 \leqslant \tau \leqslant L$$

vérifie les inégalités

$$(50) \qquad \sum_{j=1}^{m} \max_{a\leqslant\tau\leqslant b} |\tilde{\tilde{\chi}}^{(j)}_{p,r}(\tau)| \leqslant \frac{m}{\pi}\,(1+2CL)\|p\| \quad \text{lorsque} \quad 0 \leqslant r \leqslant \tilde{\varrho}\,,$$

$$(51) \qquad \sum_{j=1}^{m} \max_{a\leqslant\tau\leqslant b} |\tilde{\tilde{\chi}}^{(j)}_{p,\varrho}(\tau)-\tilde{\tilde{\chi}}^{(j)}_{p,0}(\tau)| \leqslant \frac{mL}{\pi}\,(2\varepsilon_\varrho+C\delta_\varrho)\|p\| \quad \text{lorsque} \quad \varrho \leqslant \tilde{\varrho}$$

où $\tilde{\varrho} \leqslant \varrho_3$ est un nombre positif suffisamment petit et $a = L/5$, $b = 4L/5$.

Comme les deux solutions de l'équation (10) ne diffèrent que par une constante, il existe une constante $\tilde{c}_r$ telle que

$$(52) \qquad \chi^*_{p,r}(z_r) = \chi_{p,r}(z_r)+\tilde{c}_r \quad \text{lorsque} \quad z_r \in \Sigma_r \text{ et } 0 \leqslant r \leqslant \tilde{\varrho}\,.$$

On déduit des relations (48), (49) et (52) que

$$\frac{\partial^j}{\partial\tau^j}\,\tilde{\tilde{\chi}}_{p,\varrho}(\tau) = \frac{\partial^j}{\partial\tau^j}\,\tilde{\chi}_{p,\varrho}(\tau+L/2) \quad \text{lorsque} \quad L/5 \leqslant \tau \leqslant 4L/5$$

et en vertu des inégalités (46), (47), (50) et (51) on obtient les suivantes:

$$(53)\qquad \sum_{j=1}^{m} \max_{0\leqslant\sigma\leqslant L} |\tilde{\chi}_{p,r}^{(j)}(\sigma)| \leqslant \frac{m}{\pi}(1+2CL)\|p\| \quad \text{lorsque} \quad 0\leqslant r\leqslant\tilde{\varrho},$$

$$(54)\qquad \sum_{j=1}^{m} \max_{0\leqslant\sigma\leqslant L} |\tilde{\chi}_{p,\varrho}^{(j)}(\sigma)-\tilde{\chi}_{p,0}^{(j)}(\sigma)| \leqslant \frac{mL}{\pi}(2\varepsilon_\varrho+C\delta_\varrho)\|p\| \quad \text{lorsque} \quad \varrho\leqslant\tilde{\varrho}.$$

L'inégalité (28) résulte de (53) et (44), tandis que les inégalités (54) et (45) entraînent la relation (29), dans laquelle $\eta_\varrho = \dfrac{L}{\pi}(m+1)(2\varepsilon_\varrho+C\delta_\varrho)+\dfrac{1}{\pi}\delta_\varrho$.

Le Lemme 5 se trouve ainsi complètement démontré.

LEMME 6. *Soit Σ une courbe simple fermée de classe C^{m+3} et soit $B\in B'_m(\Sigma)$. La formule* (11), *où $\chi_{p,0}(z)$ est une solution quelconque de l'équation* (10), *définit une transformation biunivoque de l'espace $B'_m(\Sigma)$ en lui-même. La transformation inverse est donnée par la relation $B[p]=H[X_p]$, où la fonction X_p est définie par* (17).

Démonstration. Comme $B[1]=0$, la définition (11) est indépendante du choix particulier de la solution $\chi_{p,0}(z)$ de l'équation (10). Admettons que $\chi_{p,0}(z)$ soit donnée par les relations (48) et (36) où $r=0$. Il est évident que la fonctionnelle H est linéaire. Sa continuité résulte de celle de la fonctionnelle B en vertu de l'inégalité (28). En remarquant que $H[1]=0$ on achève la démonstration du Lemme 6.

LEMME 7. *Soit Σ une courbe simple fermée de classe C^{m+3}. Si $v\in W_m(\Omega)$, la fonction*

$$(55)\qquad \sup_p \frac{\left|\int_{\Sigma_\varrho} \frac{\partial v}{\partial n}\chi_{p,\varrho}(z_\varrho)\,ds_{z_\varrho}\right|}{\|p\|}$$

où $p\in D_m(\Sigma,+)$, $\|p\|\neq 0$ et $\chi_{p,\varrho}(z_\varrho)$ est une solution quelconque de l'équation (10), *est bornée dans l'intervalle $0<\varrho\leqslant\varrho_0$.*

Démonstration. Supposons que $v\in W_m(\Omega)$. Comme l'intégrale

$$\int_{\Sigma_r} \frac{\partial v}{\partial n}\chi_{p,r}(z_r)\,ds_{z_r}$$

ne dépend pas du choix particulier de la solution $\chi_{p,r}$ (cf. le Lemme 3), nous admettrons dans la suite que la fonction $\chi_{p,r}(z_r)$ est définie par des relations (48) et (36). Considérons la fonction $\chi_{p,0}(z)$ définie sur la courbe Σ et soit par définition

$$(56)\qquad \chi_{p,0}(z_r)=\chi_{p,0}(z) \quad \text{lorsque} \quad 0\leqslant r\leqslant\varrho_0 \text{ et } z\in\Sigma.$$

En vertu des relations (56), (29) et (28) on obtient:

$$\|\chi_{p,\varrho}(z_\varrho)-\chi_{p,0}(z_\varrho)\| \leqslant \eta_\varrho \|p\|, \quad \lim_{\varrho\to 0} \eta_\varrho = 0\,, \tag{57}$$

$$\|\chi_{p,0}\| \leqslant c\|p\|\,. \tag{58}$$

Soit $B_\varrho[p]$ la famille des fonctionnelles (2) et soit

$$\gamma_{p,\varrho}(z) = \chi_{p,\varrho}(z_\varrho)-\chi_{p,0}(z_\varrho)\,. \tag{59}$$

Puisque $v \in W_m(\Omega)$, il existe (cf. (6)) une constante C telle que

$$\|B_\varrho\| \leqslant C \quad \text{lorsque} \quad 0<\varrho\leqslant\varrho_0\,, \tag{60}$$

d'où résulte l'inégalité

$$\left|B_\varrho\left[\frac{\gamma_{p,\varrho}}{\|p\|}\right]\right| \leqslant C\,\frac{\|\gamma_{p,\varrho}\|}{\|p\|} \quad \text{lorsque} \quad 0<\varrho\leqslant\varrho_0\,. \tag{61}$$

Les relations (2), (59), (61) et (57) entraînent la suivante:

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{1}{\|p\|} \int\limits_{\Sigma_\varrho} \frac{\partial v(z_\varrho)}{\partial n_z} [\chi_{p,\varrho}(z_\varrho)-\chi_{p,0}(z_\varrho)]\, ds_{z_\varrho} = 0\,, \tag{62}$$

la convergence étant uniforme par rapport à $p \in D_m(\Sigma, +)$, $\|p\| \neq 0$.

D'autre part, la fonction

$$\sup_p \frac{1}{\|p\|} \int\limits_{\Sigma_\varrho} \frac{\partial v}{\partial n}\, \chi_{p,0}(z_\varrho)\, ds_{z_\varrho} \quad \text{lorsque} \quad p \in D_m(\Sigma, +),\ \|p\| \neq 0\,,$$

est bornée dans l'intervalle $0<\varrho\leqslant\varrho_0$, car $v \in W_m(\Omega)$, $\chi_{p,0} \in D_m(\Sigma, +)$ et l'inégalité (58) est satisfaite. En vertu de la relation (62) notre assertion en résulte.

Les Lemmes 7 et 3 entraînent le lemme suivant:

LEMME 8. *Soit Σ une courbe simple fermée de classe C^{m+3}. Si $v \in W_m(\Omega)$, la fonction* (21) *est bornée dans l'intervalle* $0<\varrho\leqslant\varrho_0$.

Pour compléter la conclusion du Lemme 8, ajoutons ([4]) le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Si Σ est une courbe simple fermée de classe C^{m+3}, l'espace $W_m(\Omega)$ coïncide avec celui des fonctions $v(z)$ qui sont harmoniques dans Ω et rendent bornée dans l'intervalle $0<\varrho\leqslant\varrho_0$ soit la fonction* (55), *soit la fonction* (21).

Démonstration. Le Théorème 3 découle des Lemmes 3 et 7 en vertu de la propriété suivante: chaque fonction harmonique v, pour laquelle la fonction (55) est bornée dans l'intervalle $0<\varrho\leqslant\varrho_0$, appar-

---

([4]) Ce qui est superflu pour la démonstration seule du Théorème 2.

tient à l'espace $W_m(\Omega)$. Cette propriété peut aisément être démontrée si l'on s'appuie sur l'identité

$$\chi_{X_{p,\varrho},\varrho}(z_\varrho) \equiv p(z_\varrho) + \text{const}, \quad \text{lorsque} \quad z \in \Sigma_\varrho, \tag{63}$$

dans laquelle $X_{p,\varrho}(z_\varrho)$ est une fonction définie par la formule

$$X_{p,\varrho}(\zeta_\varrho) = \pi p(\zeta_\varrho) + \int\limits_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho) \frac{\partial}{\partial n_z} \log|z_\varrho - \zeta_\varrho| ds_{z_\varrho} \tag{64}$$

où $\zeta_\varrho \in \Sigma_\varrho$ et $0 < \varrho \leqslant \varrho_0$.

Après cette digression, retournons à la démonstration du Théorème 2, qui sera maintenant presque immédiate grâce aux Lemmes 1, 2, 4, 6 et 8.

Démonstration du Théorème 2. En vertu du Lemme 2 chaque solution du problème $\mathrm{N}^{\mathrm{bis}}$ appartient à l'espace $W_m(\Omega)$ et d'après les Lemmes 6 et 1: la formule (11) définit une transformation biunivoque de l'espace $B'_m(\Sigma)$ en lui-même et la fonction $v(z)$, définie par des relations (12) et (11) est une solution du problème $\mathrm{N}^{\mathrm{bis}}$. Il en résulte les propriétés suivantes: P_1) La fonction v appartient à l'espace $W_m(\Omega)$ et chaque fonction de la classe $[v]$, c.-à-d. $v+\text{const}$ est une solution du problème $\mathrm{N}^{\mathrm{bis}}$; P_2) L'image de la transformation Γ est contenue dans l'espace $V_m(\Omega)$; P_3) La transformation Γ est biunivoque et son inverse est donnée par (13).

Pour démontrer que la transformation Γ établit un isomorphisme des espaces linéaires $B'_m(\Sigma)$ et $V_m(\Omega)$ il nous reste à démontrer que l'image de la transformation Γ, définie dans $B'_m(\Sigma)$ tout entier, coïncide avec l'espace $V_m(\Omega)$. À cet effet, choisissons arbitrairement un élément $[\tilde{v}] \in V_m(\Omega)$. En vertu des Lemmes 8 et 4 il existe une constante c et une fonctionnelle $\tilde{H} \in B'_m(\Sigma)$, telles que $\tilde{v}(z) = \tilde{H}[\log|z-\zeta|] + c$ lorsque $z \in \Omega$ et, en vertu du Lemme 6, il existe une fonctionnelle $\tilde{B} \in B'_m(\Sigma)$ telle que $\tilde{H}[p] = \tilde{B}[\chi_{p,0}]$. On a donc $\Gamma\tilde{B} = [\tilde{v}]$. L'élément $[\tilde{v}]$ étant arbitraire, il en résulte notre assertion.

Pour terminer la démonstration du Théorème 2 remarquons que si v^* est une solution quelconque du problème $\mathrm{N}^{\mathrm{bis}}$ on a $\Gamma^{-1}([v^*]) = B$, ce qui entraîne la relation $v^* \in \Gamma B = [v]$. En vertu de la Propriété P_1) il en résulte que l'ensemble des solutions du problème $\mathrm{N}^{\mathrm{bis}}$ coïncide avec la classe $[v]$ dont le représentant v est donné par (12) et (11).

Le Théorème 2 se trouve ainsi complètement démontré.

§ 5. Conclusions du Théorème 2. Les Théorèmes 1 et 2 entraînent (cf. le théorème III de la note [3]):

COROLLAIRE 1. *Soit Σ une courbe simple fermée de classe C^{m+3}. La condition nécessaire et suffisante pour que le problème* N *admette une solution est que*

$$B[1] = 0. \tag{65}$$

Si la condition (65) *est satisfaite, l'ensemble des solutions du problème* N *coïncide avec l'élément* $[v]$ *de l'espace* $V_m(\Omega)$, *dont le représentant* v *est donné par les formules* (12) *et* (11).

COROLLAIRE 2. *Soit* Σ *une courbe simple fermée de classe* C^{m+3}. *Supposons que* $B_j \in B'_m(\Sigma)$, $j = 1, 2, \ldots$, *et que* ([5])

$$\lim_{j\to\infty} B_j[p] = B[p] \quad \textit{pour chaque} \quad p \in D_m(\Sigma). \tag{66}$$

Dans ces hypothèses, il existe des fonctions $v(z)$ *et* $v_j(z)$, $j = 1, 2, \ldots$, *harmoniques dans le domaine* Ω, *qui vérifient les conditions aux limites généralisées*:

$$\lim_{\varrho\to 0} \int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho) \frac{\partial v}{\partial n_z} ds_{z_\varrho} = B[p], \tag{67}$$

$$\lim_{\varrho\to 0} \int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho) \frac{\partial v_j}{\partial n_z} ds_{z_\varrho} = B_j[p], \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{68}$$

pour chaque $p \in D_m(\Sigma, +)$.

En outre: $\lim\limits_{j\to\infty} v_j(z) = v(z)$ *presque uniformément dans le domaine* Ω.

Démonstration. Soit $\chi_{p,r}(z_r)$ une solution quelconque de l'équation (10) et soit

$$H[p] = B[\chi_{p,0}(z)], \quad H_j[p] = B_j[\chi_{p,0}(z)], \quad j = 1, 2, \ldots,$$

pour chaque $p \in D_m(\Sigma)$.

En vertu du Théorème 2 les fonctionnelles H et H_j, $j = 1, 2, \ldots$, appartiennent à l'espace $B'_m(\Sigma)$ et les fonctions

$$v(z) = H[\log|z-\zeta|], \quad v_j(z) = H_j[\log|z-\zeta|], \quad j = 1, 2, \ldots,$$

harmoniques dans le domaine Ω, vérifient les conditions (67) et (68) pour chaque $p \in D_m(\Sigma, +)$. D'autre part, il résulte de l'hypothèse (66) que

$$\lim_{j\to\infty} H_j[p] = H[p] \quad \text{pour chaque} \quad p \in D_m(\Sigma), \tag{69}$$

étant $\chi_{p,0}(z) \in D_m(\Sigma)$ lorsque $p \in D_m(\Sigma)$.

Choisissons arbitrairement un ensemble fermé A contenu dans le domaine Ω. Il nous suffit de démontrer que

$$\lim_{j\to\infty} v_j(z) = v(z) \text{ uniformément dans l'ensemble } A.$$

Supposons, pour la démonstration par l'impossible, qu'il existe un nombre $\varepsilon_0 > 0$ et une suite $\{z_{a_j}\}$ de points $z_{a_j} \in A$, tels que $\lim\limits_{j\to\infty} a_j = \infty$ et que

$$\left| H_{a_j}[\log|z_{a_j}-\zeta|] - H[\log|z_{a_j}-\zeta|] \right| \geqslant \varepsilon_0 \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots \tag{70}$$

([5]) Si la suite $\{B_j\}$ des fonctionnelles $B_j \in D'_m(\Sigma)$ converge pour chaque $p \in D_m(\Sigma)$, la limite appartient aussi à l'espace $D'_m(\Sigma)$. La relation $B[1] = 0$ découle de (66) et de l'hypothèse: $B_j[1] = 0$ lorsque $j = 1, 2, \ldots$

Sans restreindre la généralité nous pouvons admettre que la suite $\{z_{a_j}\}$ est convergente, $\lim\limits_{j\to\infty} z_{a_j} = z$.

On vérifie facilement que $\lim\limits_{j\to\infty} \log|z_{a_j}-\zeta| = \log|z-\zeta|$ dans l'espace $D_m(\Sigma)$, donc

$$\lim_{j\to\infty} H[\log|z_{a_j}-\zeta|] = H[\log|z-\zeta|] \tag{71}$$

et en vertu de (69) on a aussi

$$\lim_{j\to\infty} H_{a_j}[\log|z_{a_j}-\zeta|] = H[\log|z-\zeta|]. \tag{72}$$

Les relations (70), (71) et (72) conduisent à l'absurde, $0 \geqslant \varepsilon_0 > 0$, ce qui achève notre démonstration.

§ 6. Problème de Dirichlet généralisé. Dans les notes [3] et [4] nous avons considéré le problème que voici:

PROBLÈME D. *Soit donnée une distribution $F \in D'_m(\Sigma)$. Il s'agit de trouver une fonction u, harmonique à l'intérieur du domaine Ω, qui pour chaque fonction $q \in K_m(\Sigma, +)$ vérifie la condition aux limites généralisée:*

$$\lim_{\varrho\to 0} \int_{\Sigma_\varrho} q(z_\varrho)u(z_\varrho)\,ds_{z_\varrho} = F[q(z)]. \tag{73}$$

Au moyen d'une démonstration analogue à celle du Théorème 1 on établit l'équivalence entre le problème D et le suivant:

PROBLÈME $\mathrm{D}^{\mathrm{bis}}$. *Soit donnée une distribution $F \in D'_m(\Sigma)$. Il s'agit de trouver une fonction u, harmonique à l'intérieur du domaine Ω, qui vérifie la condition* (73) *pour chaque fonction $q \in D_m(\Sigma, +)$.*

Supposons que $u \in C^0(\Sigma_r)$, $0 \leqslant r \leqslant \varrho_0$. On désignera par $\psi_{u,r}(z_r)$ la solution de l'équation intégrale

$$u(\zeta_r) = \int_{\Sigma_r} \psi(z_r)\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z_r-\zeta_r|\,ds_{z_r} - \pi\psi(\zeta_r) \tag{74}$$

et par $\varphi_{u,r}(z_r)$ celle de l'équation

$$u(\zeta_r) = \int_{\Sigma_r} \varphi(z_r)\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z_r-\zeta_r|\,ds_{z_r} - \pi\varphi(\zeta_r). \tag{75}$$

Soit $E_m(\Omega)$ l'espace des fonctions $u(z)$ harmoniques dans le domaine Ω et telles que la fonction

$$\sup_p \frac{\left|\int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho)u(z_\varrho)\,ds_{z_\varrho}\right|}{\|p\|}, \quad \text{où} \quad p \in D_m(\Sigma, +),\ \|p\| \neq 0,$$

soit bornée dans l'intervalle $0 < \varrho \leqslant \varrho_0$.

THÉORÈME 4. *Si Σ est une courbe simple fermée de classe C^{m+3}, l'espace $E_m(\Omega)$ coïncide avec celui des fonctions $v(z)$ qui sont harmoniques dans Ω et rendent bornée dans l'intervalle $0 < \varrho \leqslant \varrho_0$ soit la fonction*

$$\sup_p \frac{\left|\int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho)\psi_{u,\varrho}(z_\varrho)\,ds_{z_\varrho}\right|}{\|p\|} \quad \text{où} \quad p \in D_m(\Sigma, +),\ \|p\| \neq 0\,,$$

soit la fonction

$$\sup_p \frac{\left|\int_{\Sigma_\varrho} u(z_\varrho)\varphi_{p,\varrho}(z_\varrho)\,ds_{z_\varrho}\right|}{\|p\|} \quad \text{où} \quad p \in D_m(\Sigma, +),\ \|p\| \neq 0\,.$$

La démonstration du Théorème 4 est analogue, mais plus simple (6) que celle du Théorème 3, démontré au paragraphe 4, c'est pourquoi nous l'omettons.

Le Théorème 4 et le théorème de la note [4] entraînent le suivant (7):

THÉORÈME 5. *Supposons que Σ soit une courbe simple fermée de classe C^{m+3}. Soit $F \in D'_m(\Sigma)$ et soit G la fonctionnelle définie par la formule:*

$$G[f] = F[\varphi_{f,0}(z)] \quad \text{lorsque} \quad f \in D_m(\Sigma)\,. \tag{76}$$

Sous ces hypothèses on a $G \in D'_m(\Sigma)$; la fonction

$$u(z) = G\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\right] \quad \text{lorsque} \quad z \in \Omega \tag{77}$$

appartient à l'espace $E_m(\Omega)$ et vérifie la condition aux limites généralisée:

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_{\Sigma_\varrho} q(z_\varrho)u(z_\varrho)\,ds_{z_\varrho} = F[q] \quad \text{pour chaque} \quad q \in K_m(\Sigma, +)\,. \tag{78}$$

La transformation T, définie par (76) *et* (77) *établit un isomorphisme des espaces linéaires $D'_m(\Sigma)$ et $E_m(\Omega)$. Son inverse T^{-1} est donnée par* (78). *L'ensemble $E_m(\Omega)$ coïncide avec la classe des fonctions u données par* (77) *où $G \in D'_m(\Sigma)$. La transformation T est continue dans ce sens que les relations*

$$F \in D'_m(\Sigma),\quad u(z) = TF,\quad F_j \in D'_m(\Sigma),\quad u_j(z) = TF_j,\quad j = 1, 2, \ldots,$$

et

$$\lim_{j\to\infty} F_j[p] = F[p] \quad \text{pour chaque} \quad p \in D_m(\Sigma)$$

(6) Cela résulte du fait que les équations (74) ou (75) n'ont qu'une solution unique.

(7) Sans avoir recours au théorème de la note [4], on peut établir le Théorème 5 par une démonstration analogue à celle du Théorème 2, mais plus simple (cf. le renvoi (6)).

entraînent la suivante (8):

$$\lim_{j\to\infty} u_j(z) = u(z)\,,$$

la convergence étant presque uniforme dans le domaine Ω.

Le problème D *admet une et une seule solution. Elle est donnée par* (77) *où* G *est définie par* (76), *et dépend d'une manière continue* (9) *de la distribution donnée* F.

COROLLAIRE 3. *Soit* Σ *une courbe simple fermée de classe* C^{m+3}. *Supposons que les fonctions* $f_j(\zeta)$, $j = 1, 2, \ldots$, *soient continues sur la courbe* Σ *et que*

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\Sigma} f_j(\zeta) p(\zeta) ds_\zeta = F[p] \quad \textit{pour chaque} \quad p \in D_m(\Sigma)\,.$$

Soit $u_j(z)$ *la solution du problème de Dirichlet classique prenant des valeurs données* $f_j(\zeta)$ *sur la frontière* Σ *du domaine* Ω, $j = 1, 2, \ldots$, *et soit* $u(z)$ *la solution du problème* D:

$$\lim_{\varrho\to 0} \int_{\Sigma_\varrho} q(z_\varrho) u(z_\varrho) ds_{z_\varrho} = F[q] \quad \textit{pour chaque} \quad q \in D_m(\Sigma, +)\,.$$

Dans ces hypothèses

$$\lim_{j\to\infty} u_j(z) = u(z)$$

presque uniformément dans le domaine Ω.

Travaux cités

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932.

[2] E. Goursat, *Cours d'Analyse Mathématique*, tome III, troisième édition, Paris 1923.

[3] Z. Szmydt, *Sui problemi di Dirichlet e di Neumann con dati al contorno generalizzati*, Rend. Acc. Naz. Lincei, Serie VIII, 32 (1962), p. 867-872.

[4] — *L'unicité des solutions d'un problème de Dirichlet généralisé*, ibidem 33 (1962), p. 395-400.

(8) La démonstration de cette propriété est analogue à celle du Corollaire 2 (cf. le paragraphe 5).

(9) Dans le sens expliqué ci-dessus.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 25. 2. 1963