Об изоморфизме некоторых колец операторов

П. АНТОСИК (Катовице)

Аналогично тому, как была построена в работе [1] теория кольца операторов на правосторонне открытом интервале $[0, T)$, можем построить теорию кольца операторов в замкнутом нитервале $[0, T]$. Чтобы это сделать достаточно в теории кольца операторов в интервале $[0, T)$ вместо непрерывности функций p и q в $[0, T)$ взять условие непрерывности этих функций в интервале $[0, T]$, а все остальное оставить без изменения. Покажем, что эти кольца изоморфны.

В этой работе символами $P[0, T)$ и $P[0, T]$ будем обозначать кольца непрерывных функции соответственно в нитервале $[0, T)$ или в $[0, T]$.

Под операцией сложения в этих кольцах будем понимать обычное сложение функций, а умножение берем в смысле свертки, это значит, что произведением функций p и q будет функция определенная формулой

$$a(t) = \int_0^t p(t-\tau)q(\tau)\,d\tau. \tag{1}$$

Согласно определению, данному в [1], функция q не является делителем нуля тогда и только тогда, когда в каждом промежутке $[0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, эта функция не равна тождественно нулю.

Упорядоченные пары (p, q) и (p_1, q_1) называются *эквивалентными* только в том случае, когда $pq_1 = p_1 q$ в смысле свертки, в предположении, что функции p, q, p_1 и q_1 принадлежат одновременно к одному из колец $P[0, T)$ или $P[0, T]$ и кроме того функция q не является делителем нуля.

Классы эквивалентности упорядоченных пар называются *операторами*.

Операторы, иначе классы эквивалентности упорядоченных пар, которые являются эквивалентными с парами $(a, b), (c, d), (p, q), \ldots$ соответственно будем обозначать знаками

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{p}{q}, \ldots$$

Формулы

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}, \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

определяют сложение и умножение операторов.

В зависимости от того, к которому кольцу $P[0,T)$, или $P[0,T]$ принадлежат функции входящее в состав упорядоченных пар, мы получаем кольцо операторов определенных в интервале $[0,T)$, или в нитервале $[0,T]$. Эти кольца мы будем обозначать символами $\mathscr{R}[0,T)$, или $\mathscr{R}[0,T]$.

Теорема 1. *Если* $\frac{p}{q}\in\mathscr{R}[0,T)$, *то существуют такие функции* p_1 *и* q_1, *что* $p_1, q_1 \in P[0,T)$, *пары* (p,q) *и* (p_1,q_1) *являются эквивалентными, кроме того существуют левосторонние пределы*

$$\lim_{t\to T_-} p_1(t) \quad и \quad \lim_{t\to T_-} q_1(t). \tag{2}$$

Действительно, пусть $\frac{p}{q}$ будет произвольным оператором взятым из кольца $\mathscr{R}[0,T)$.

Возмем функцию $h(t)$ определенную формулой

$$h(t)=\sup_{x<T-t}\big(\max(|p(x)|,|q(x)|)\big), \tag{3}$$

предполагая, что $t\in(0,T)$.

Из формулы (3) следует, что функция $h(t)$ непрерывна, неубывающая и принимает положительные значения; кроме того эта функция не является делителем нуля в кольце $P[0,T)$. Из этого следует, что функция $r(t)$, определенная формулами

$$r(t)=\frac{1}{h(t)}, \quad \text{если} \quad t\in(0,T) \quad и \quad r(0)=\lim_{t\to 0_+}\frac{1}{h(t)}, \tag{4}$$

непрерывна и неубывающая в промежутке $[0,T)$ и кроме того не является делителем нуля в кольце $P[0,T)$. Поэтому, если принять, $p_1=pr$ и $q_1=qr$, точнее

$$p_1(t)=\int_0^t r(t-\tau)p(\tau)\,d\tau, \qquad q_1(t)=\int_0^t r(t-\tau)q(\tau)\,d\tau, \tag{5}$$

то упорядоченные пары (p,q) и (p_1,q_1) являются эквивалентными.

Докажем, что функции p_1 и q_1 имеют левосторонне пределы в точке $t=T$.

Прежде всего заметим, что для каждого $t\in(0,T)$ и каждого $\tau\in[0,t]$ имеют место неравенства

$$r(t-\tau)|p(\tau)|=\frac{|p(\tau)|}{h(t-\tau)}\leqslant\frac{\sup_{x<\tau}|p(x)|}{\sup_{x<T-(t-\tau)}\big(\max(|p(x)|,|q(x)|)\big)} \leqslant\frac{\sup_{x<\tau}|p(x)|}{\sup_{x<\tau}\big(\max(|p(x)|,|q(x)|)\big)}\leqslant 1. \tag{6}$$

Из этого неравенства и формул (5) следует, что функции $p_1(t)$ и $q_1(t)$ являются ограниченными в промежутке $[0,T)$ числом T. Введем обозначения

$$f_1(t)=\int_0^t r(t-\tau)p^+(\tau)\,d\tau, \qquad f_2(t)=\int_0^t r(t-\tau)p^--(\tau)\,d\tau,$$

где $p^+(t)=\max\big(p(t),0\big)$ и $p^-(t)=\max\big(-p(t),0\big)$. Таким образом

$$p_1(t)=f_1(t)-f_2(t). \tag{7}$$

Пусть $t_1,t_2\in[0,T)$ и $t_1<t_2$; тогда легко видеть, что

$$f_1(t_2)-f_1(t_1)=\int_0^{t_1}\big(r(t_2-\tau)-r(t_1-\tau)\big)p^+(\tau)\,d\tau+\int_{t_1}^{t_2}r(t_2-\tau)p^+(\tau)\,d\tau\geqslant 0,$$

так как $p^+(\tau)\geqslant 0$, $r(t_2-\tau)\geqslant 0$ и $r(t_2-\tau)-r(t_1-\tau)\geqslant 0$. Этим доказано, что функция $f_1(t)$ не убывает в интервале $[0,T)$. Подобным образом доказывается, что не убывает в $[0,T)$ функция $f_2(t)$. Из неравенства (6) следует, что функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ ограниченные в промежутке $[0,T)$ числом T. Все это вместе обусловливает существование конечных левосторонних пределов

$$\lim_{t\to T-} f_1(t), \qquad \lim_{t\to T-} f_2(t).$$

Отсюда, на основании равенства (7) существует первый из пределов (2) и является конечным числом.

Подобным образом доказывается, что существует второй из пределов (2). Тем самым теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Кольца* $\mathscr{R}[0,T)$ *и* $\mathscr{R}[0,T]$ *изоморфны.*

Действительно, по теореме 1 для каждого оператора $\frac{p}{q}$ взятого из кольца $\mathscr{R}[0,T)$ существуют функции p_1 и q_1 обладающие пределами (2) и такие, для которых имеет место равенство

$$\frac{p}{q}=\frac{p_1}{q_1}.$$

На основании определения возьмем функции

$$a(t) = p_1(t), \quad \text{если} \quad t \in [0, T) \quad \text{и} \quad a(T) = \lim_{t \to T-} p_1(t),$$

$$b(t) = q_1(t), \quad \text{если} \quad t \in [0, T) \quad \text{и} \quad b(T) = \lim_{t \to T-} q_1(t).$$

Сразу видно, что $a, b \in P[0, T]$ и $\dfrac{a}{b} \in \mathscr{R}[0, T]$.

Пусть f будет отображением кольца $\mathscr{R}[0, T)$ на кольцо $\mathscr{R}[0, T]$ определенное таким образом, чтобы

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{a}{b}.$$

Ясно, что преобразование f взаимно однозначно и кроме того

$$f\left(\frac{p}{q} + \frac{u}{v}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right) + f\left(\frac{u}{v}\right), \quad f\left(\frac{p}{q} \cdot \frac{u}{v}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right) \cdot f\left(\frac{u}{v}\right).$$

Это значит, что f изоморфное отображение и таким образом кольца $\mathscr{R}[0, T)$ и $\mathscr{R}[0, T]$ изоморфны, что и требовалось доказать.

Литература

[1] J. Mikusiński, *Le calcul opérationnel d'intervalle fini*, Studia Mathematica 15 (1956), p. 225-251.

[2] — *Operational calculus*, Warszawa 1959.

Reçu par la Rédaction le 15. 4. 1964

Zu einigen Konvergenzeigenschaften von Folgen zufälliger Elemente

von

W. RICHTER (Dresden)

In der vorliegenden Note soll auf eine neue Konvergenzeigenschaft von Folgen zufälliger Elemente Y_n eingegangen werden, deren Werte in einem vollständigen separablen metrischen Raum M liegen. Die Begriffe *eine Folge* $\{Y_n\}$ *konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen ein zufälliges Element* Y und *eine Folge* $\{Y_n\}$ *ist mischend mit dem Limes* μ erweisen sich in ihren Eigenschaften in gewissem Sinne als einander entgegengesetzt. Ist $\{Y_n\}$ mischend mit dem Limes μ und ist μ ein eigentliches Wahrscheinlichkeitsmaß, so gibt es kein zufälliges Element Y mit der Eigenschaft, daß $\{Y_n\}$ in Wahrscheinlichkeit gegen Y konvergiert und daß von Y in M induzierte Maß μ_Y gleich μ ist.

Dennoch haben beide Begriffe auch gemeinsames. In beiden Fällen konvergiert die Folge $\{\mu_{Y_n}\}$ der Wahrscheinlichkeitsmaße von $\{Y_n\}$ schwach gegen einen Limes μ. Es stellt sich heraus, daß es daneben noch eine stärkere Konvergenzeigenschaft gibt, die sowohl die in Wahrscheinlichkeit konvergenten als auch die mischenden Folgen besitzen. Wir nennen diese die *stabile* (P)-*Konvergenz einer Folge* $\{Y_n\}$ (Definition 4). Für stabil (P)-konvergente Folgen $\{Y_n\}$ zufälliger Elemente mit Werten aus einem metrischen Raum M gelten Übertragungssätze, welche die in [13] abgeleiteten Resultate verallgemeinern und in gewisser Weise abrunden ([14]-[16]).

§ 1. Zufällige Elemente und Maße in metrischen Räumen. Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist ein Wahrscheinlichkeitsraum $[\Omega, \mathfrak{B}_\Omega, \mathrm{P}]$, bestehend aus einer abstrakten Menge Ω, einer σ-Algebra $\mathfrak{B}_\Omega$ von Teilmengen von Ω und einer auf $\mathfrak{B}_\Omega$ definierten Wahrscheinlichkeit P. Daneben sei ein meßbarer metrischer Raum $[M, \varrho, \mathfrak{B}_M]$ vorgegeben, bestehend aus einer abstrakten Menge M, einer auf $M \times M$ definierten Metrik ϱ und der von den abgeschlossenen Mengen des metrischen Raumes $[M, \varrho]$ erzeugten σ-Algebra $\mathfrak{B}_M$ von Teilmengen von M. M sei in der Metrik ϱ vollständig und separabel. Die Annahme der Separabilität von M ist nicht überall erforderlich und wird hier nur der Bequemlichkeit halber generell getroffen (siehe aber z. B. [6], Satz 3, und demgegenüber [9]). CA bezeichne die abgeschlossene Hülle einer Menge $A \subseteq M$.