Z. WASZCZYSZYN i M. ŻYCKOWSKI (Kraków)

WZORY APROKSYMACYJNE NA PIERWIASTKI RZECZYWISTE
RÓWNANIA STOPNIA TRZECIEGO

1. Sformułowanie zagadnienia. Wiele zagadnień fizyki i techniki wymaga rozwiązywania równań algebraicznych wyższych stopni. Szczególnie często występuje równanie trzeciego stopnia o współczynnikach rzeczywistych

$$(1.1) \quad a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0; \quad a_i \text{ rzeczywiste, } a_0 \neq 0.$$

Jak wiadomo, poprzez podstawienie

$$(1.2) \quad x = y - \frac{a_1}{3a_0},$$

można równanie (1.1) sprowadzić do dwuparametrowej postaci kanonicznej

$$(1.3) \quad y^3 + py + q = 0.$$

O liczbie pierwiastków rzeczywistych równania decyduje znak wyróżnika

$$(1.4) \quad \Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

W przypadku $\Delta > 0$ jest tylko jeden pierwiastek rzeczywisty, który możemy wyrazić znanym wzorem Cardano; pozostałe dwa są zespolone sprzężone i również określone jawnymi wzorami analitycznymi. Gdy $\Delta < 0$, a współczynniki p i q są w dalszym ciągu rzeczywiste, wystąpią trzy rzeczywiste pierwiastki; w przypadku $\Delta = 0$ wśród trzech rzeczywistych pierwiastków jeden będzie podwójny. Przypadek $\Delta < 0$ jest nazwany w literaturze *przypadkiem nieprzywiedlnym* (*casus irreducibilis*), gdyż pierwiastków równania (1.3) nie można wyznaczyć poprzez działania arytmetyczne i działanie wyciągania pierwiastków. Dla obliczeń praktycznych posługujemy się postacią trygonometryczną

$$(1.5) \quad y = 2\sqrt[3]{r} \cos \frac{1}{3}(\varphi + 2k\pi), \quad k = 0, 1, 2,$$

gdzie

$$r = \sqrt{-\frac{1}{27}p^3}, \quad \cos\varphi = -\frac{q}{2r}.$$

Ten ostatni przypadek $\Delta < 0$ występuje często w różnych zagadnieniach ⁽¹⁾ (np. w fizyce i technice przy obliczaniu wartości własnych macierzy hermitowskich), lecz niewygodna postać rozwiązania (1.5), wymagająca obliczania pomocniczego kąta φ , utrudnia znacznie dalszą analizę zagadnień. W praktyce korzysta się z przybliżonych metod graficznych lub numerycznych (przegląd tych metod można znaleźć w różnych podręcznikach, jak np. J. Łukaszewicza i M. Warmusa ([4]), I. S. Bieriezina i N. P. Żidkowa ([1]) lub z gotowych tablic (np. B. M. Szumiagiskij ([7]), Ł. P. Zelik i Ł. D. Serebriakowa ([9]), H. E. Salzer, Ch. H. Richards i I. Arsham ([6]), H. Górecki ([2])). Ostatnio wzrosło zainteresowanie metodami numerycznymi w związku z zastosowaniem maszyn liczących (por. pracę M. Warmusa ([8])). Jednak taki sposób obliczania pierwiastków zawęża analizę, gdyż wymaga ustalenia wartości współczynników równania.

Obecna praca jest próbą uzyskania przybliżonych, jawnych wzorów analitycznych na pierwiastki rzeczywiste dla równania stopnia trzeciego o współczynnikach rzeczywistych. Podamy możliwie proste lecz obarczone małym błędem wzory na pierwiastki rzeczywiste w przypadku $\Delta \leq 0$. W pracy posłużymy się aproksymacją jednokrotnie optymalną zaproponowaną przez M. Życzkowskiego ([11]). Polega ona na dobraniu funkcji aproksymacyjnej spełniającej założoną ilość warunków na brzegach rozpatrywanego przedziału (zgodność funkcji aproksymowanej i aproksymującej oraz kilku pierwszych pochodnych); dodatkowy wyraz tej funkcji dobiera się tak, aby odległość funkcji aproksymowanej i aproksymującej była minimalna, tj. aby w rozpatrywanym przedziale błąd bezwzględny był równy $B = B_{\max} = |B_{\min}|$. Aproksymacja jednokrotnie optymalna sprowadza się więc do jednoparametrowej aproksymacji Czebyszewa, przy czym jednak funkcja aproksymująca należy do klasy funkcji spełniających już założone warunki zgodności (typu Hermite'a). Wartości kolejnych pochodnych poszukiwanej funkcji na brzegach przedziału wyznaczymy dzięki rozwinięciu funkcji w uogólnione szeregi potęgowe.

Taka aproksymacja redukuje w znacznym stopniu wady aproksymacji brzegowej Hermite'a oraz optymalnej Czebyszewa. Z jednej strony pozwala ona na wyrównanie i wydajne zmniejszenie błędu bezwzględnego,

⁽¹⁾ Zestawienie szeregu ważnych problemów techniki, które wymagają obliczania pierwiastków stopnia trzeciego można znaleźć w obszernej pracy doktorskiej H. Góreckiego ([2]).

a z drugiej strony wymaga wyznaczenia tylko jednego parametru (stąd nazwa aproksymacji jednokrotnie optymalnej), przy czym technika obliczeniowa łączy się od razu z efektywnym określaniem błędu.

2. Obliczenie wzorów aproksymacyjnych. Kanoniczną postać równania (1.3) nieco uprościmy. Wprowadzimy mianowicie nowe zmienne

$$(2.1) \quad u = -\frac{q}{p\sqrt{-p}}, \quad z = \frac{y}{\sqrt{-p}},$$

dzięki którym równanie (1.3) przyjmie nową, prostą postać

$$(2.2) \quad u = z - z^3.$$

Dalsze nasze zadanie sprowadza się do odwrócenia funkcji (2.2) tak, ażeby otrzymać $z = z(u)$ (por. rys. 1). Zadanie będziemy teraz rozpatrywać w przedziale $-2/3\sqrt{3} \leq u \leq 2/3\sqrt{3}$ odpowiadającemu założeniu $\Delta \leq 0$. W punktach A i A' (funkcja $z(u)$ jest symetryczna względem 0) wyróżnik $\Delta = 0$ i otrzymamy pierwiastki wielokrotne, natomiast w punkcie 0 parametr $q = 0$ (wynika to z (2.1)) i obok pierwiastka $z_2 = 0$ otrzymamy dwa pierwiastki różniące się tylko znakiem $z_1 = -z_3 = 1$ (a więc $y_1 = -y_3 = \sqrt{-p}$).

Rys. 1.

2.1. Obliczanie pierwiastków uogólnionymi szeregami potęgowymi. Funkcję (2.2) można odwrócić dzięki zastosowaniu szeregów potęgowych. Szereg taki można rozwinąć wokół punktu 0 (por. np. pracę T. A. Kokariewej [3]), będzie on jednak wykazywał słabą zbieżność w okolicy punktów A i A' . W tych punktach występuje bowiem osobliwość $d^i z / du^i \rightarrow \infty$ (dla $i = 1, 2, \dots$), której nie możemy ująć szeregiem potęgowym.

Dla odwrócenia funkcji (2.2) posłużymy się uogólnionym szeregiem potęgowym. Będzie to szereg (por. M. Życzkowski [10]) typu

$$(2.3) \quad y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{\mu+\nu j},$$

w którym μ i ν mogą być dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Podejście takie umożliwi dokonanie rozwinięcia wokół punktów A i A' co przy zastosowaniu zwyczajnych szeregów potęgowych nie byłoby możliwe.

Rozwinięcia wokół punktu A (por. rys. 1) dokonamy w nowym układzie t, v . Równania transformacyjne

$$(2.4) \quad v = z - \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad t = \frac{2}{3\sqrt{3}} - u,$$

pozwalają zapisać równanie (2.2) w nowej postaci

$$(2.5) \quad t = \sqrt{3} v^2 - v^3.$$

Przyjmujemy szereg uogólniony

$$(2.6) \quad v = \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^{(j+1)/2},$$

który po podstawieniu do równania (2.5) i przyrównaniu współczynników przy jednakowych potęgach t pozwala wyliczyć kolejno potrzebne stałe b_j . Otrzymamy w ten sposób funkcję $v_1(t)$ odpowiadającą gałęzi ABC oraz funkcję $v_2(t)$ dla gałęzi AOA' krzywej (2.5) pokazanej na rysunku 1. Obydwie funkcje zapiszemy łącznym wzorem

$$(2.7) \quad v_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}} t^{1/2} - \frac{1}{6} t \pm \frac{5}{24\sqrt[4]{27}} t^{3/2} + \dots$$

lub też, dzięki związkom transformacyjnym (2.4), poszukiwaną funkcję $z(u)$

$$(2.8) \quad z_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}} - u} - \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} - u \right) \pm \frac{5}{24\sqrt[4]{27}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} - u \right)^{3/2} + \dots$$

W podobny sposób można otrzymać rozwiązanie w otoczeniu punktu A' .

Rozwiązania otrzymane za pomocą szeregów będą miały znaczenie lokalne, w praktyce można je wykorzystać w sąsiedztwie punktów rozwinięcia; dla punktów dalszych należy wziąć dużą liczbę wyrazów szeregów (np. dla $u = 0$ zamiast $z_2 = 0$ otrzymamy przy trzech wyrazach szeregu (2.8) $z_2 = 0,4180$, przy czterech wyrazach $z_2 = 0,01997$). Znaczenie integralne będą miały wyprowadzone w dalszym ciągu wzory aproksymacyjne.

2.2. Zastosowanie aproksymacji jednokrotnie optymalnej. Zastosujemy metodę aproksymacji jednokrotnie optymalnej, zaproponowaną przez M. Życzkowskiego ([11]). Będzie ona polegała na dobraniu funkcji aproksymującej $P(x)$ dla funkcji aproksymowanej $f(x)$ spełniającej n narzuconych warunków Hermite'a (zgodność wartości obydwu funkcji i pierwszych kilku pochodnych) w m wybranych punktach, gdzie $m \leq n$; dodatkowy wyraz funkcji $P(x)$ pozwala ponadto zminimalizować i wyrównać błąd bezwzględny

$$(2.9) \quad \max_{a \leq x \leq b} [f(x) - P(x)] = - \min_{a \leq x \leq b} [f(x) - P(x)].$$

W praktyce przyjmujemy funkcję aproksymacyjną w postaci

$$(2.10) \quad P(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \varphi_i(x), \quad a \leq x \leq b,$$

gdzie a_i są stałymi współczynnikami, a $\varphi_i(x)$ uogólnionymi wielomianami. Ze spełnienia warunków hermitowskich wyrażamy współczynniki a_i dla $i = 1, 2, \dots, n$ jako funkcje współczynnika a_{n+1} , który drogą numerycznych przeliczeń dobieramy tak, by spełniony był warunek (2.9).

Ze spełnieniem warunku (2.9) wiąże się, opracowany również w [11], problem numerycznego wyznaczania ekstremów funkcji. W przypadku, gdy znamy wartości funkcji w stałych odstępach h szczególnie prosty wzór otrzymamy aproksymując funkcję w otoczeniu ekstremum przez parabolę drugiego stopnia. Otrzymamy wtedy:

$$(2.11) \quad f_m \approx f_0 - \frac{(f_{+1} - f_{-1})^2}{8(f_{+1} - 2f_0 + f_{-1})},$$

gdzie f_{-1}, f_0, f_{+1} oznaczają wartości funkcji w trzech sąsiednich węzłach; węzeł środkowy powinien leżeć najbliżej ekstremum, co zapewnia możliwie mały błąd przybliżenia. Wzór (2.11) i dokładniejsze można znaleźć w pracach M. Życzkowskiego ([11] i [12]).

Jeśli chodzi o oszacowanie błędów aproksymacji jednokrotnie optymalnej to tkwi ono już w samej technice obliczeniowej; mianowicie, przy każdorazowym doborze współczynnika a_{n+1} liczymy ekstremum błędu bezwzględnego, np. przy pomocy wzoru (2.11), dążąc do spełnienia warunku (2.9). W obecnej pracy szacowano błąd bezwzględny, gdyż błąd względny byłby inny dla postaci kanonicznej (1.3) niż dla postaci wyjściowej równania (1.1), a ponadto w tym ostatnim przypadku dla $y \rightarrow a_1/3a_0$ błąd względny $\Delta x/x \rightarrow \infty$ (zgodnie z podstawieniem (1.2)).

Wróćmy teraz do podstawowego zagadnienia wyznaczenia pierwiastków rzeczywistych równania sześciennego. Zajmiemy się najpierw wyznaczeniem pierwiastka maksymalnego z_1 , odpowiadającego gałęzi CBA krzywej z rysunku 1.

Spośród wielu możliwych funkcji aproksymujących najprostszą okazała się funkcja

$$(2.12) \quad z_1 = a_1 + a_2 \sqrt{u_A - u} + a_3 u + a_4 u^2.$$

Krzywa opisana przez (2.12) ma pionową styczną w punkcie $u = u_A = 2/3\sqrt{3}$, co zapewnia dużą dokładność w otoczeniu punktu A. Jako warunki interpolacyjne przyjmujemy zgodność wartości funkcji w cha-

rakterystycznych punktach $u = -2/3\sqrt{3}, 0, 2\sqrt{3}$ prowadzące do układu równań

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{3}} &= \alpha_1 + \alpha_2 \sqrt{2u_A} - \alpha_3 u_A + \alpha_4 u_A^2, \\ (2.13) \quad 1 &= \alpha_1 + \alpha_2 \sqrt{u_A}, \\ \frac{1}{\sqrt{3}} &= \alpha_1 + \alpha_3 u_A + \alpha_4 u_A^2, \end{aligned}$$

z którego możemy wyznaczyć $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jako funkcje współczynnika α_4 (dla wygody obliczeń numerycznych użyto ułamków dziesiętnych z dokładnością $1 \cdot 10^{-6}$)

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0,542584 - 0,505806\alpha_4, \\ (2.14) \quad \alpha_2 &= 0,737288 + 0,815286\alpha_4, \\ \alpha_3 &= 0,090325 + 0,929223\alpha_4. \end{aligned}$$

Wielkość współczynnika α_4 można dobrać tak, aby w którymś z punktów C, B lub A był spełniony dodatkowy warunek Hermite'a (zgodność pochodnych w sensie zgodności współczynników α_i), lub aby był spełniony warunek (2.9) aproksymacji jednokrotnie optymalnej.

Dla porównania w tabelicy 1 pokazano wyniki dla różnych typów aproksymacji podając równocześnie różnice między wartościami ścisłymi pierwiastków, obliczonymi według (1.5), a wartościami przybliżonymi, obliczonymi według (2.12). Wartości podano dla równego skoku $h = 1/12\sqrt{3} = u_A/8$; w pobliżu u_A podział został czterokrotnie zagęszczony.

W tabelicy 2 podano wielkości współczynników α_i odpowiadających poszczególnym typom aproksymacji, oraz maksymalne błędy bezwzględne obliczone według (2.11). I tak, dla $\alpha_4 = 0$ otrzymamy typ $1+1+1$ odpowiadający klasycznej interpolacji przy trzech węzłach; typy $2+1+1$, $1+2+1$ i $1+1+2$ zapewniają dodatkowo zgodność pierwszych pochodnych w punktach C, B lub A (w przypadku $1+1+2$ wartość $\alpha_2 = 1/\sqrt[4]{3} = 0,759838$ zgodnie z wartością współczynnika szeregu (2.8)). Wprowadzenie aproksymacji optymalnej $1+1+1+\square$ (zapis ten oznacza zgodność funkcji w trzech punktach oraz jeden warunek optymalności) zmniejsza błąd prawie trzykrotnie w stosunku do najkorzystniejszej aproksymacji hermitowskiej typu $1+2+1$, przy czym wartość współczynnika $\alpha_4 = 0,020647$ obliczono na drodze kolejnych przybliżeń.

Najmniejszy pierwiastek z_3 (odpowiadający gałęzi $A'B'C'$ z rysunku 1) wypiszemy korzystając z symetrii względem środka 0. Otrzymamy na-

stępującą funkcję aproksymacyjną

$$(2.15) \quad z_3 = -a_1 - a_2\sqrt{u_A + u} + a_3u - a_4u^2,$$

w której w zależności od typu aproksymacji należy przyjąć współczynniki z tablicy 2.

TABLICA 2

pierw.	typ aprosk.	współczynniki				max B
		a_1	a_2	a_3	a_4	
z_1, z_3	1+1+1	0,542 584	0,737 288	0,090 325	0	0,002 169
	2+1+1	0,536 795	0,746 619	0,100 960	0,011 445	0,000 999
	1+2+1	0,535 381	0,748 898	0,103 557	0,014 240	0,000 750
	1+1+2	0,528 594	0,759 838	0,116 026	0,027 658	0,000 845
	1+1+1+ $\square$	0,532 141	0,754 121	0,109 511	0,020 647	0,000 255
	1+1+1+ $\textcircled{1}$	0,532 774	0,753 100	0,108 346	0,019 394	0,000 360
z_2	2+1+2+ $\square$	0,471 406	-0,759 838	0,375 546	-0,260 570	0,000 337
	1+1+1+ $\textcircled{1}$	0	0,753 100	0,108 346	0	0,000 360

Analogicznie można wyznaczyć wartości pierwiastka z_2 , odpowiadającego gałęzi $A'OA$. W tym przypadku najkorzystniejsza okazuje się funkcja

$$(2.16) \quad z_2 = (a_1 + a_2\sqrt{u_A - |u|} + a_3|u| + a_4u^2)\text{sign } u,$$

która dla najkorzystniejszej aproksymacji typu 2+1+2+ $\square$ (jest to w zasadzie aproksymacja dla punktów 0, A typu 1+2+ $\square$ rozszerzona do punktu A' dzięki wprowadzeniu funkcji $\text{sign } u$) daje maksymalny błąd $\max |B| = 0,000337$ (por. tablice 2 i 3).

TABLICA 3

u	z_2 ściśle	z_2 aproksymujące			
		2+1+2+ $\square$		1+1+1+ $\textcircled{1}$	
		z_2	$B \cdot 10^6$	z_2	$B \cdot 10^6$
0	0	0	0	0	0
$1/12\sqrt{3} = 0,048\ 113$	0,048 225	0,047 912	313	0,048 092	133
$1/6\sqrt{3} = 0,096\ 225$	0,097 142	0,096 880	262	0,096 893	248
$1/4\sqrt{3} = 0,144\ 338$	0,147 549	0,147 505	-44	0,147 220	329
$1/3\sqrt{3} = 0,192\ 450$	0,200 512	0,200 695	-183	0,200 152	360
$5/12\sqrt{3} = 0,240\ 563$	0,257 671	0,257 994	-323	0,257 355	316
$1/2\sqrt{3} = 0,288\ 675$	0,322 089	0,322 400	-311	0,321 914	175
$7/12\sqrt{3} = 0,336\ 788$	0,401 520	0,401 664	-144	0,401 607	-87
$29/48\sqrt{3} = 0,348\ 816$	0,426 273	0,426 373	-100	0,426 441	-168
$15/24\sqrt{3} = 0,360\ 844$	0,455 106	0,455 141	-35	0,455 352	-246
$31/48\sqrt{3} = 0,372\ 872$	0,491 882	0,491 876	+6	0,492 182	-300
$2/3\sqrt{3} = 0,384\ 900$	0,577 350	0,577 350	0	0,577 350	0

Wzór aproksymacyjny (2.16) jest jednak niewygodny w zastosowaniach zarówno ze względu na dość skomplikowaną postać (konieczność użycia *signu* oraz bezwzględnych wartości) jak też z powodu niespełnienia pierwszego wzoru Vietà

$$(2.17) \quad z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

zapisanego dla równania kanonicznego (2.2). Okazuje się bowiem, że zastosowanie aproksymacji Hermite'a lub aproksymacji jednokrotnie optymalnej do obliczenia każdego pierwiastka z osobna nie zapewnia spełnienia (2.17). Pierwszy wzór Vietà jest przyjmowany zwykle jako najprostszy sprawdzian poprawności numerycznie obliczonych pierwiastków (przy ściśle obliczonych pierwiastkach powinny być spełnione dwa dalsze wzory Vietà, por. [5]); pozwoli on ponadto znacznie uprościć wzór dla pierwiastka z_2 .

Przyjmijmy mianowicie z_1 i z_3 według (2.12) i (2.15), a z wzoru (2.17) obliczymy

$$(2.18) \quad z_2 = \alpha_2(\sqrt{u_A + u} - \sqrt{u_A - u}) - 2\alpha_3 u.$$

Aproksymację jednokrotnie optymalną zastosujemy teraz integralnie, zażądamy mianowicie zminimalizowania błędu bezwzględnego dla wszystkich pierwiastków łącznie. Przy tym typie aproksymacji oznaczonym przez $1+1+1+\textcircled{1}$, wyznaczono na drodze numerycznej wielkość współczynnika $\alpha_4 = 0,019394$, a na podstawie (2.14) pozostałe współczynniki podane w tablicy 2. W porównaniu z aproksymacją $2+1+2+\square$ dla pierwiastka z_2 błąd tylko nieznacznie się zwiększył, natomiast w porównaniu z $1+1+1+\square$ dla z_1 i z_3 błąd wprawdzie wzrasta o około 40%, jednak jak zaznaczyliśmy otrzymujemy znacznie prostszą postać wzoru dla pierwiastka z_2 , spełniony jest pierwszy wzór Vietà oraz współczynniki α_i są jednakowe we wzorach na wszystkie pierwiastki.

Tak więc ostatecznie aproksymacyjne wzory na pierwiastki rzeczywiste dla równania stopnia trzeciego (2.2) możemy zapisać w następującej postaci, ważnej dla $-0,384900 \leq u \leq 0,384900$,

$$\begin{aligned} z_1 &= 0,532774 + 0,753100\sqrt{0,384900 - u} + 0,108346u + 0,019394u^2, \\ (2.19) \quad z_2 &= 0,753100(\sqrt{0,384900 + u} - \sqrt{0,384900 - u}) - 0,216692u, \\ z_3 &= -0,532774 - 0,753100\sqrt{0,384900 + u} + \\ &\quad + 0,108346u - 0,019394u^2, \end{aligned}$$

lub dzięki związkom (2.1) wzory na pierwiastki dla równania kanonicznego (1.3)

$$\begin{aligned}
 y_1 &= 0,532774\sqrt{-p} + 0,753100 \sqrt{-\frac{q}{\sqrt{-p}} - 0,384900p -} \\
 &\quad - 0,108346 \frac{q}{p} + 0,019394 \frac{q^2}{p^2\sqrt{-p}}, \\
 (2.20) \quad y_2 &= 0,753100 \left(\sqrt{\frac{q}{\sqrt{-p}} - 0,384900p} - \sqrt{-\frac{q}{\sqrt{-p}} - 0,384900p} \right) + \\
 &\quad + 0,216692 \frac{q}{p}, \\
 y_3 &= -0,532774\sqrt{-p} - 0,753100 \sqrt{\frac{q}{\sqrt{-p}} - 0,384900p -} \\
 &\quad - 0,108346 \frac{q}{p} - 0,019394 \frac{q^2}{p^2\sqrt{-p}}.
 \end{aligned}$$

Maksymalny bezwzględny błąd przy obliczaniu pierwiastków y będzie $\max |B| \leq 0,000360\sqrt{-p}$.

3. Przykład liczbowy. Obliczymy pierwiastki równania trzeciego stopnia

$$x^3 + 9x^2 + 23x + 14 = 0.$$

Stosując podstawienie $x = y - 3$ sprowadzamy równanie do postaci kanonicznej

$$y^3 - 4y - 1 = 0.$$

Równanie ma 3 pierwiastki rzeczywiste, gdyż jak łatwo sprawdzić wyróżnik $\Delta < 0$. Wartości pierwiastków obliczone przy pomocy dokładnego wzoru (1.5) są równe

$$\begin{aligned}
 y_1 &= 2,1149, & x_1 &= -0,8851, \\
 y_2 &= -0,2541, & x_2 &= -3,2541, \\
 y_3 &= -1,8608, & x_3 &= -4,8608,
 \end{aligned}$$

natomiast obliczone z wzorów (2.20)

$$\begin{aligned}
 y_1 &= 2,1146, & x_1 &= -0,8854, \\
 y_2 &= -0,2535, & x_2 &= -3,2535, \\
 y_3 &= -1,8611, & x_3 &= -4,8611.
 \end{aligned}$$

Tak więc różnice występują dopiero na czwartym miejscu po przecinku.

4. Zakończenie. Wzory aproksymacyjne (2.20) podają wartości pierwiastków jako jawne funkcje współczynników p i q równania kanonicznego. Prosta postać i niewielki błąd pozwalają je zastosować przy analizie wielu praktycznie ważnych zagadnień. Podają one ponadto uporządkowane pierwiastki, co również może mieć pewne znaczenie praktyczne (np. w hipotezie wyłączeniowej Tresci-Guesta stosowanej w teorii ciała odkształcalnego).

Na koniec zwrócimy uwagę, że metoda stosowana przez nas (rozwiązanie w uogólnione szeregi potęgowe i aproksymacja jednokrotnie optymalna) może być zastosowana do wyznaczania wzorów aproksymacyjnych dla pierwiastków rzeczywistych równań algebraicznych dowolnego stopnia dających się sprowadzić do dwuparametrowej postaci kanonicznej (równania tego typu rozważa również T. A. Kokariewa [3]).

Prace cytowane

- [1] И. С. Березин, Н. П. Жидков, *Методы вычислений*, 2 изд., т. 2, Москва 1962.
- [2] H. Górecki, *Nowe praktyczne metody rozwiązywania algebraicznych równań stopni wyższych i ich zastosowania w zagadnieniach teorii konstrukcji inżynierskich* (praca doktorska), Politechnika Krakowska, Kraków 1962.
- [3] Т. А. Кокарева, *О приближенном вычислении корней уравнений $z^m = A + Bz^k$* , Журнал Вычисл. Матем. и Матем. Физ. 2 (1961), str. 157-161.
- [4] J. Łukasiewicz i M. Warmus, *Metody numeryczne i graficzne*, cz. 1, Warszawa 1956.
- [5] A. Mostowski i M. Stark, *Elementy algebry wyższej*, Warszawa 1958.
- [6] H. E. Salzer, Ch. H. Richards, I. Arsham, *Tables for the Solution of Cubic Equations*, New York 1958.
- [7] Б. М. Шумягский, *Таблицы для решения кубических уравнений*, Москва-Ленинград 1950.
- [8] M. Warmus, *Rozwiązywanie numeryczne równań trzeciego i czwartego stopnia o współczynnikach rzeczywistych*, Zastosow. Matem. 6 (1961), str. 127-135.
- [9] Л. П. Зелик, Л. Д. Серебрякова, *Таблица корней кубических уравнений*, Записки Рязаньского Гос. Пед. Института 12 (1955), str. 75-81.
- [10] M. Życzkowski, *Potenzieren von verallgemeinerten Potenzreihen mit beliebigem Exponent*, ZAMP 12 (1961), str. 572-576.
- [11] — *O tak zwanej aproksymacji jednokrotnie optymalnej i niektórych jej zastosowaniach w mechanice*, Rozpr. Inż. 12 (1963), str. 463-490.
- [12] — *On numerical evaluation of the maximum of a function*, Zastosow. Matem. 8 (1965), str. 67-74.

Praca wpłynęła 13. 11. 1964

З. ВАЩИШИН и М. ЖИЧКОВСКИ (Краков)

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ
КОРНЕЙ КУБИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

РЕЗЮМЕ

Настоящая работа является попыткой получения по возможности простых приближенных формул для действительных корней кубического уравнения с действительными коэффициентами, дискриминант которого $\Delta < 0$. В работе применяется метод однократно оптимальной аппроксимации, состоящей в том, что принимается аппроксимирующая функция, которая удовлетворяет условиям Эрмита (равенство значений аппроксимирующей и аппроксимируемой функции и нескольких их производных) в характеристических точках и вместе с тем обеспечивает наименьшую абсолютную погрешность (разность аппроксимирующей и аппроксимируемой функции).

Подбор коэффициентов аппроксимирующей функции сделан с помощью численных вычислений, при чем на каждом шагу определено эффективно максимальную абсолютную погрешность. Коэффициенты в условиях Эрмита принимаются на основании разложений искомых функций в обобщенные степенные ряды.

Даются окончательные явные формулы (2.20) удовлетворяющие первой формуле Виета, при чем для всех корней канонического уравнения (1.3) максимальная абсолютная погрешность $\max |B| < 0,000360\sqrt{-p}$.

Z. WASZCZYSZYN and M. ŻYCHKOWSKI (Kraków)

**APPROXIMATION FORMULAS FOR THE REAL ROOTS
OF A CUBIC EQUATION**

SUMMARY

The paper is an attempt at obtaining sufficiently simple, explicit analytic approximate formulas for the real roots of a cubic equation with real coefficients whose discriminant $\Delta < 0$. The authors use a method of a onefold optimal approximation consisting in the adoption of an approximating function which, besides satisfying Hermite's conditions (the agreement of the values of the approximated function and the approximating one and a few derivatives) at characteristic points ensures the minimization of the absolute error (the difference between the approximated function and the approximating one).

The choice of coefficients of the approximating function has been made by means of numerical calculations, the maximum absolute error having been each time effectively determined. The coefficients for Hermite's conditions have been adopted on the basis of the expansion of the required functions in generalized power series.

The authors give final explicit formulas (2.20) which satisfy the first Vieta's formula; for all the roots of the canonical equation (1.3) the maximal absolute error will be $\max |B| < 0.000360\sqrt{-p}$.