

## L'étude de la dérivée normale du potentiel logarithmique de la double couche

par Z. SZMYDT (Kraków)

Cette note est une continuation de nos recherches [3] concernant les propriétés de caractère intégrale du potentiel logarithmique de couches — simple et double — étendues sur le contour  $\Sigma$  d'un domaine plan. L'étude détaillée de la dérivée normale du potentiel logarithmique de la double couche y fait la partie principale: la démonstration des Théorèmes 5 et 6 sur cet argument (cf. le § 4) est basée sur le Lemme 2 (cf. le § 2) et sur les Théorèmes 2 et 4 (cf. le § 3). Les applications des théorèmes de cette note sont données dans celle qui la suit directement.

**§ 1. Notations.** Une courbe située dans le plan de la variable complexe  $z = x + iy$  sera désignée par  $\Sigma$  et dite courbe simple fermée lorsqu'elle admet la représentation paramétrique:  $z = z(s)$  pour  $0 \leq s \leq L$  où (i)  $z(s)$  est une fonction continue avec sa dérivée première  $z'(s)$  et périodique de période  $L$  ( $L > 0$ ), (ii)  $z(s_1) = z(s_2)$  avec  $0 \leq s_1 < s_2 \leq L$  si et seulement si  $s_1 = 0$  et  $s_2 = L$ . On suppose en plus que (iii)  $|z'(s)| = 1$  lorsque  $0 \leq s \leq L$ .  $\Sigma$  sera dite de classe  $C^n$  lorsque la fonction périodique  $z(s)$  est de classe  $C^n$ . Si en outre la dérivée  $z^{(n)}(s)$  vérifie la condition de Hölder avec l'exposant  $\beta$ ,  $0 < \beta \leq 1$ , la courbe  $\Sigma$  sera dite de classe  $C_\beta^n$ . Nous dirons que la représentation paramétrique  $z = z(s)$ ,  $0 \leq s \leq L$  de la courbe simple fermée de classe  $C^n$  (de classe  $C_\beta^n$ ) est normale lorsque  $z(s)$  est une fonction de classe  $C^n$  satisfaisant aux conditions (i)-(iii).

Dans la suite on désignera par  $\varrho$  un nombre positif, par  $r$  un nombre réel arbitraire et par  $m$  un nombre non négatif.

Soit  $\Omega$  le domaine limité par la courbe  $\Sigma$ :  $z = z(s)$ ,  $0 \leq s \leq L$ , et soit  $n_z$  le vecteur normal au point  $z$  de  $\Sigma$  dirigé vers l'intérieur de  $\Omega$  et  $\nu_z$  le vecteur-unité ayant le même sens. On désignera par  $\Sigma_r$  la courbe donnée par l'équation:

$$z = z_r(s), \quad 0 \leq s \leq L,$$

où

$$(1) \quad z_r(s) = x_r(s) + iy_r(s) = z(s) + r\nu_{z(s)}.$$

On a  $\Sigma = \Sigma_0$ . L'élément d'arc de la courbe  $\Sigma_r$  sera désigné par  $ds_r$ .

À chaque fonction  $f$ , définie sur la courbe:  $z = z(s)$ ,  $0 \leq s \leq L$ , on fait correspondre une fonction  $\tilde{f}(s) = f[z(s)]$ ,  $0 \leq s \leq L$ . Nous dirons que  $f$  est une fonction de classe  $O^m(\Sigma)$  lorsque la fonction périodique  $\tilde{f}(s)$  est de classe  $O^m$ .

## § 2. Prolongement d'une fonction de classe $O^m(\Sigma)$ .

LEMME 1. Soit  $z = z(s) = x(s) + iy(s)$ ,  $0 \leq s \leq L$  une représentation paramétrique normale de la courbe simple fermée  $\Sigma$  de classe  $C_1^1$ . Soit  $A_\varrho$  le rectangle:  $|r| \leq \varrho$ ,  $0 \leq s < L$  et  $P_\varrho$  son image par la transformation:  $z = z_r(s)$  o'est-à-dire par la transformation (cf. la relation (1))

$$(2) \quad x = x(s) - ry'(s), \quad y = y(s) + rx'(s).$$

Soit  $S_\varrho$  le segment décrit par le point:  $y = x(0) - ry'(0)$ ,  $y = y(0) + rx'(0)$  lorsque  $-\varrho \leq r \leq \varrho$ .

Sous ces hypothèses il existe un nombre positif  $\varrho_0$ , tel que la transformation (2), continue dans  $A_{\varrho_0}$  admet la transformation inverse

$$r = \lambda(x, y), \quad s = \mu(x, y)$$

qui est défini dans  $P_{\varrho_0}$  et continue dans  $P_{\varrho_0} \setminus S_{\varrho_0}$ . En outre si:

$$(x_n, y_n) \in P_{\varrho_0}, \quad r_n = \lambda(x_n, y_n), \quad s_n = \mu(x_n, y_n) \quad \text{lorsque} \quad n = 1, 2, \dots, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x, y) \in S_{\varrho_0}, \quad r = \lambda(x, y)$$

alors la suite  $\{(r_n, s_n)\}$  ne peut pas avoir plus que deux points d'accumulation:  $(r, 0)$  et  $(r, L)$ .

La démonstration du Lemme 1 est tout à fait élémentaire, c'est pourquoi nous l'omettons.

COROLLAIRE 1. Si  $\Sigma$  est une courbe simple fermée de classe  $C_1^1$ , alors pour chaque  $|r| \leq \varrho_0$  la courbe  $\Sigma_r$  est fermée et telle que  $z_r(s_1) = z_r(s_2)$  avec  $s_1 < s_2$  si et seulement si  $s_1 = 0$  et  $s_2 = L$ . Désignant par  $\Omega_r$  le domaine (ouvert) limité par la courbe  $\Sigma_r$  où  $|r| \leq \varrho_0$  et par  $\bar{\Omega}_r$  sa fermeture on a

$$\bar{\Omega}_r = \Omega_r \cup \Sigma_r, \quad P_{|r|} = \bar{\Omega}_{-|r|} \setminus \Omega_{|r|}.$$

LEMME 2. Soit  $z = z(s) = x(s) + iy(s)$ ,  $0 \leq s \leq L$ , une représentation paramétrique normale de la courbe simple fermée  $\Sigma$  de classe  $O^{m+1}$  où  $m \geq 1$  et soit  $p(z)$  une fonction de classe  $O^m(\Sigma)$ . Choisissons un nombre positif  $r_0$  inférieur au nombre  $\varrho_0$  du Lemme 1 et en outre assez petit à ce que

$$(3) \quad K(r, s) = 1 - r[x'(s)y''(s) - y'(s)x''(s)] > 0 \\ \text{lorsque } |r| \leq r_0 \text{ et } 0 \leq s \leq L.$$

Supposons que les fonctions  $\lambda(x, y)$ ,  $\mu(x, y)$  et l'ensemble  $P_\varrho$  soient ceux, introduits dans le Lemme 1. Soit  $q(x, y)$  la fonction définie dans l'ensemble  $P_{r_1}$  où  $0 < r_1 \leq r_0$  au moyen de la formule:

$$(4) \quad q(x, y) = \tilde{p}(s) \quad \text{où} \quad s = \mu(x, y).$$

Sous ces hypothèses la fonction  $q(x, y)$  est continue dans l'épiderme  $P_{r_1}$  et à chaque  $k = 1, 2, \dots, m$  correspondent des fonctions:

$$(5) \quad \varphi_{k_1 k_2 j}(r, s), \quad k_1, k_2 = 0, 1, \dots, k, \quad k_1 + k_2 = k, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

telles que

$$(6) \quad \frac{\partial^k q(x, y)}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} = \sum_{j=1}^k \tilde{p}^{(j)}(s) \varphi_{k_1 k_2 j}(r, s) \quad \text{où} \quad r = \lambda(x, y), \quad s = \mu(x, y).$$

Les fonctions (5) sont de classe  $C^{m-k}$  dans l'ensemble:

$$(7) \quad -\infty < s < +\infty, \quad |r| < r_1$$

périodiques de période  $L$  par rapport à la variable  $s$  et ne dépendent pas de la fonction  $p$ . La fonction  $q(x, y)$  est de classe  $C^m$  à l'intérieur de l'épiderme  $P_{r_1}$ . En outre il existe des fonctions  $p^*(x, y)$  de classe  $C^m$  dans le plan tout entier et telles que

$$(8) \quad p^*(x, y) = q(x, y) \quad \text{dans} \quad P_{r_1/2}.$$

Démonstration. Remarquons que la fonction  $\tilde{p}(s) = p[z(s)]$  est périodique de période  $L$ . En vertu du Lemme 1 il en résulte que la fonction  $q(x, y)$  définie par la relation (4) est continue dans l'épiderme  $P_{r_1}$ . Vu le théorème sur les fonctions implicites, l'hypothèse (3) entraîne donc les relations suivantes:

$$(9) \quad \frac{\partial q(x, y)}{\partial x} = \tilde{p}'(s) x'(s) / K(r, s), \quad \frac{\partial q(x, y)}{\partial y} = \tilde{p}'(s) y'(s) / K(r, s)$$

où  $r = \lambda(x, y)$ ,  $s = \mu(x, y)$ .

D'autre part on a:

$$(10) \quad \lambda_x(x, y) = \frac{-y'(s) - r x''(s)}{K(r, s)}, \quad \lambda_y(x, y) = \frac{x'(s) - r y''(s)}{K(r, s)}.$$

Soit

$$(11) \quad \varphi_{1,0,1}(r, s) = x'(s) / K(r, s), \quad \varphi_{0,1,1}(r, s) = y'(s) / K(r, s).$$

On vérifie aisément que les fonctions (11) sont de classe  $C^{m-1}$  dans l'ensemble (7) et qu'elles sont périodiques de période  $L$  par rapport à la variable  $s$ . Donc, en vertu de (9) et (11) les relations (6) se trouvent démontrées dans le cas où  $k = 1$ .

Supposons maintenant que pour chaque  $k = 1, 2, \dots, n$  où  $1 \leq n < m$  les relations (6) sont satisfaites, que les fonctions (5) soient de classe  $C^{m-k}$  dans l'ensemble (7) et périodiques par rapport à la variable  $s$ , de période  $L$ . Choisissons arbitrairement un couple  $(n_1, n_2)$  des nombres entiers tels que

$$(12) \quad 0 \leq n_1 \leq n, \quad 0 \leq n_2 \leq n, \quad n_1 + n_2 = n.$$

D'après notre hypothèse les fonctions  $\varphi_{n_1 n_2 j}(r, s)$  ( $j = 1, \dots, n$ ), sont de classe  $\mathcal{O}^{m-n}$  dans l'ensemble (7), périodiques de période  $L$  par rapport à la variable  $s$  et on a

$$\frac{\partial^n q(x, y)}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2}} = \sum_{j=1}^n \tilde{p}^{(j)}(s) \varphi_{n_1 n_2 j}(r, s).$$

Il en résulte que

$$\frac{\partial^{n+1} q(x, y)}{\partial x^{n_1+1} \partial y^{n_2}} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{p}^{(j)}(s) \varphi_{n_1+1, n_2, j}(r, s)$$

où <sup>(1)</sup>

$$\varphi_{n_1+1, n_2, 1}(r, s) = \frac{\partial}{\partial r} \varphi_{n_1 n_2 1}(r, s) \frac{-y'(s) - rx''(s)}{K(r, s)} + \frac{\partial}{\partial s} \varphi_{n_1 n_2 1}(r, s) \frac{x'(s)}{K(r, s)},$$

$$\begin{aligned} \varphi_{n_1+1, n_2, j}(r, s) &= \frac{\partial}{\partial r} \varphi_{n_1 n_2 j}(r, s) \frac{-y'(s) - rx''(s)}{K(r, s)} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial s} \varphi_{n_1 n_2 j}(r, s) \frac{x'(s)}{K(r, s)} + \varphi_{n_1 n_2 j-1}(r, s) \frac{x'(s)}{K(r, s)} \\ &\quad (j = 2, \dots, n), \end{aligned}$$

$$\varphi_{n_1+1, n_2, n+1}(r, s) = \varphi_{n_1 n_2 n}(r, s) \frac{x'(s)}{K(r, s)}.$$

Il est évident que les fonctions énumérées ci-dessus sont de classe  $\mathcal{O}^{m-(n+1)}$  dans l'ensemble (7) et périodiques de période  $L$  par rapport à la variable  $s$ .

D'une manière analogue on démontre qu'il existe des fonctions  $\varphi_{n_1, n_2+1, j}(r, s)$  ( $j = 1, 2, \dots, n+1$ ) de classe  $\mathcal{O}^{m-(n+1)}$  dans l'ensemble (7), périodiques de période  $L$  par rapport à  $s$  et telles que

$$\frac{\partial^{n+1} q(x, y)}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2+1}} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{p}^{(j)}(s) \varphi_{n_1, n_2+1, j}(r, s).$$

En vertu du choix arbitraire de nombres  $n_1$  et  $n_2$  satisfaisant aux conditions (12) les relations (6) se trouvent démontrées dans le cas  $k = n+1$ .

La première partie du Lemme 2 étant ainsi établie, passons à la démonstration de la continuité des dérivées d'ordre  $m$  de la fonction  $q(x, y)$  à l'intérieur de la couronne  $P_{r_1}$ . À cet effet considérons les relations (6) dans le cas  $k = m$ . Remarquons que quel que soient les nombres  $k_1 = m_1$ ,  $k_2 = m_2$ ,  $m_1 + m_2 = m$ ,  $0 \leq m_1 \leq m$ ,  $0 \leq m_2 \leq m$ , le second membre de (6) est une fonction continue dans l'ensemble (7) et périodique de période  $L$  par rapport à  $s$ . En vertu des propriétés des fonctions  $\lambda(x, y)$  et  $\mu(x, y)$  énumérées dans le Lemme 1, il en résulte que les fonctions  $\frac{\partial^m q(x, y)}{\partial x^{m_1} \partial y^{m_2}}$  sont continues à l'intérieur de  $P_{r_1}$ .

<sup>(1)</sup> Cf. (10) ainsi que la démonstration des relations (9).

Voici maintenant une remarque qui nous permettra d'achever la démonstration du Lemme 2 <sup>(2)</sup>.

Remarque 1. Il existe une fonction  $h(x, y)$  de classe  $O^\infty$  dans le plan tout entier qui s'annule dans  $\Omega_{r_1}$  et à l'extérieur de  $\Omega_{-r_1}$  et est égale à l'unité dans la couronne  $P_{r_1/2}$  <sup>(3)</sup>.

Soit  $p^*(x, y)$  la fonction égale à  $q(x, y)h(x, y)$  dans  $P_{r_1}$  et s'annulant dans le complémentaire de cette couronne. Il est évident que la fonction  $p^*(x, y)$  est de classe  $C^m$  dans le plan tout entier et que

$$p^*(x, y) = q(x, y) \quad \text{dans} \quad P_{r_1/2}.$$

Le Lemme 2 se trouve ainsi complètement démontré.

**§ 3. L'étude du potentiel logarithmique de la simple et de la double couche.** Soit  $p(z)$  une fonction continue sur la courbe simple fermée  $\Sigma$ . On va considérer les potentiels suivants, dus à la densité  $p$ :

$$(13) \quad u_p(\zeta) = \int_{\Sigma} p(z) \log|z - \zeta| ds_z, \quad v_p(\zeta) = \int_{\Sigma} p(z) \frac{\partial}{\partial n_z} \log|z - \zeta| ds_z.$$

Soit encore

$$(14) \quad w_p(\zeta) = \int_{\Sigma} p(z) \frac{\partial}{\partial n_{\zeta}} \log|z - \zeta| ds_z.$$

Commençons par rappeler quelques de nos résultats antérieurs établis soit dans la note [2] soit dans [3].

**THÉORÈME 1** <sup>(4)</sup>. Soit  $m$  un nombre entier non négatif. Supposons que la courbe simple fermée  $\Sigma$  soit de classe  $C^{m+2}$  lorsque  $m \geq 1$  et de classe  $C_1^1$  lorsque  $m = 0$ . Soit  $p(z)$  une fonction de classe  $C^m(\Sigma)$  et soit  $p(z_r) = p(z)$  lorsque  $z \in \Sigma$  et  $|r| \leq r_0$ . Sous ces hypothèses les dérivées  $\frac{\partial^k}{\partial s_{\zeta}^k} v_p(\zeta)$ ,  $\frac{\partial^k}{\partial s_{\zeta}^k} w_p(\zeta)$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ) existent; elles sont continues lorsque  $\zeta \in \Sigma$  et on a

$$(15) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial^k}{\partial s_{\zeta}^k} \int_{\Sigma_{\pm \epsilon}} p(z_{\pm \epsilon}) \frac{\partial}{\partial n_z} \log|z_{\pm \epsilon} - \zeta| ds_{\pm \epsilon z} = \frac{\partial^k}{\partial s_{\zeta}^k} \{v_p(\zeta) \pm \pi p(\zeta)\},$$

$$(16) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial^k}{\partial s_{\zeta}^k} \int_{\Sigma_{\pm \epsilon}} p(z_{\pm \epsilon}) \frac{\partial}{\partial n_{\zeta}} \log|z_{\pm \epsilon} - \zeta| ds_{\pm \epsilon z} = \frac{\partial^k}{\partial s_{\zeta}^k} \{w_p(\zeta) \mp \pi p(\zeta)\}$$

$$(k = 0, 1, \dots, m) \quad (5),$$

uniformément par rapport à  $\zeta \in \Sigma$ .

<sup>(2)</sup> Elle nous servira encore dans la démonstration du Théorème 6 (cf. le § 4).

<sup>(3)</sup> Cf. le Corollaire 1.

<sup>(4)</sup> Cf. [2], théorèmes 2 et 4.

<sup>(5)</sup> Les symboles  $ds_z$  et  $ds_{rz}$  introduits au lieu de  $ds$  et  $ds_r$  indiquent que c'est le point  $z$  qui varie dans l'intégration.

**THÉORÈME 2** <sup>(6)</sup>. Soit  $m$  un nombre entier non négatif. Supposons que la courbe simple fermée  $\Sigma: z = z(s)$ ,  $0 \leq s \leq L$ , soit de classe  $C^{m+1}$  lorsque  $m \geq 2$  et de classe  $C_1^1$  lorsque  $m = 1$ . Soit  $p(z)$  une fonction de classe  $C^{m-1}(\Sigma)$  et supposons qu'il existe des constantes  $c > 0$ ,  $\theta > 0$  telles que

$$|\tilde{p}^{(m-1)}(s_1) - \tilde{p}^{(m-1)}(s_2)| \leq c|s_1 - s_2|^\theta \quad \text{lorsque} \quad 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq L.$$

Soit  $p(z_r) = p(z)$  lorsque  $z \in \Sigma$  et  $|r| \leq r_0$ .

Sous ces hypothèses les dérivées  $\frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} u_p(\zeta)$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ) existent; elles sont continues lorsque  $\zeta \in \Sigma$  et on a

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \int_{\Sigma_r} p(z_r) \log|z_r - \zeta| ds_{rz} = \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} u_p(\zeta) \quad \forall \quad (k = 0, 1, \dots, m)$$

uniformément par rapport à  $\zeta \in \Sigma$ .

Dans la suite nous sera utile le lemme suivant, facile à démontrer <sup>(7)</sup>.

**LEMME 3.** Soit  $\Sigma$  une courbe simple fermée de classe  $C_\beta^1$ . Choisissons arbitrairement une représentation paramétrique normale  $z = z(s)$ ,  $0 \leq s \leq L$  de  $\Sigma$  et soit  $\zeta = z(\sigma)$ .

Il existe alors des constantes  $c > 0$ ,  $C > 0$  et des fonctions  $R(s, \sigma)$ ,  $X(s, \sigma)$ ,  $Y(s, \sigma)$ ,  $W(s, \sigma)$ ,  $U(s, \sigma)$  continues dans le plan  $E: -\infty < s < \infty$ ,  $-\infty < \sigma < \infty$  et telles que:

$$\frac{\partial}{\partial n_z} \log|z - \zeta| = X(s, \sigma)/R(s, \sigma)(s - \sigma),$$

$$\frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log|z - \zeta| = U(s, \sigma)/R(s, \sigma)(s - \sigma),$$

$$(17) \quad \frac{\partial}{\partial n_z} \log|z - \zeta| + \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log|z - \zeta| = Y(s, \sigma)/R(s, \sigma)(s - \sigma),$$

$$(18) \quad \frac{\partial}{\partial s_z} \log|z - \zeta| + \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log|z - \zeta| = W(s, \sigma)/R(s, \sigma)(s - \sigma)$$

et que

$$(19) \quad R(s, \sigma) \geq c \quad \text{lorsque} \quad 0 \leq s \leq L, \quad L/5 \leq \sigma \leq 4L/5,$$

$$(20) \quad |X(s, \sigma)| \leq C|s - \sigma|^\beta, \quad |Y(s, \sigma)| \leq C|s - \sigma|^\beta, \quad |W(s, \sigma)| \leq C|s - \sigma|^\beta.$$

<sup>(6)</sup> Cf. [3], théorème 3. Dans le théorème cité nous avons admis qu'aussi dans le cas  $m = 1$  la courbe  $\Sigma$  est de classe  $C^{m+1}$  c'est-à-dire de classe  $C^2$ . Mais si l'on examine sa démonstration (cf. le lemme 5 de [3]) on vérifie aisément que cette hypothèse peut être substituée par la présente.

<sup>(7)</sup> Cf. [2], lemme 11 et [3], lemme 3. Ce lemme nous a servi déjà dans les démonstrations des Théorèmes 1 et 2 cités ci-dessus.

Si  $\Sigma$  est une courbe de classe  $O^k$  avec  $k \geq 2$  on a

$$(21) \quad \begin{aligned} X(s, \sigma) &= Q(s, \sigma)(s - \sigma), & Y(s, \sigma) &= T(s, \sigma)(s - \sigma), \\ W(s, \sigma) &= M(s, \sigma)(s - \sigma). \end{aligned}$$

Les fonctions  $Q(s, \sigma)$ ,  $T(s, \sigma)$ ,  $M(s, \sigma)$  sont de classe  $O^{k-2}$  et les fonctions  $R(s, \sigma)$  et  $U(s, \sigma)$  sont de classe  $O^{k-1}$  dans l'ensemble  $E$ .

**THÉORÈME 3.** Soit  $m$  un nombre entier non négatif. Supposons que la courbe  $\Sigma$  soit de classe  $O^{m+2}$  lorsque  $m \geq 1$  et de classe  $O^1$  lorsque  $m = 0$ . Soit  $\{p_\nu(z)\}$  une suite des fonctions de classe  $C^0(\Sigma)$  telle que

$$(22) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} p_\nu(z) = 0 \quad \text{uniformément par rapport à } z \in \Sigma.$$

Sous ces hypothèses les dérivées  $\frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} v_{p_\nu}(\zeta)$  et  $\frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} w_{p_\nu}(\zeta)$  existent; elles sont continues lorsque  $\zeta \in \Sigma$  et on a

$$(23) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} v_{p_\nu}(\zeta) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, m),$$

$$(24) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} w_{p_\nu}(\zeta) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, m),$$

uniformément lorsque  $\zeta \in \Sigma$ .

Démonstration (a). Soit

$$w_{p_\nu}(\zeta) = \int_\Sigma p_\nu(z) \left[ \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z - \zeta| + \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |z - \zeta| \right] ds_z \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Il est évident que le système des relations (23) et (24) est équivalent au système des relations (23) et celles qui suivent:

$$(25) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} w_{p_\nu}(\zeta) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, m)$$

uniformément par rapport à  $\zeta \in \Sigma$ .

Soit  $\zeta_0$  un point arbitrairement choisi sur la courbe  $\Sigma$ . On vérifie aisément qu'il suffit de démontrer que les dérivées  $\frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} v_{p_\nu}(\zeta)$ ,  $\frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} w_{p_\nu}(\zeta)$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ) existent, sont continues et que les limites (23) et (25) existent uniformément dans un arc de  $\Sigma$  contenant  $\zeta_0$  et ayant la longueur positive, indépendante de  $\zeta_0$ . Nous le démontrerons en nous servant

(a) La démonstration du Théorème 3 est analogue, mais plus simple que celle du Théorème 1.

de la représentation paramétrique normale  $z = z(s)$ ,  $0 \leq s \leq L$  de la courbe  $\Sigma$  telle que  $\zeta_0 = z(L/2)$ . En effet, il découle du Lemme 3 que

$$(26) \quad \tilde{v}_{p_\nu}(\sigma) = v_{p_\nu}[z(\sigma)] = \int_0^L [\tilde{p}_\nu(s) X(s, \sigma) / R(s, \sigma)(s - \sigma)] ds \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

donc, en vertu des relations (19), (20) et (22) on obtient:

$$(27) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \tilde{v}_{p_\nu}(\sigma) = 0 \quad \text{uniformément dans l'intervalle} \quad L/5 \leq \sigma \leq 4L/5.$$

Si  $\Sigma$  est une courbe de classe  $C^{m+2}$  avec  $m \geq 1$  on déduit des relations (21), (26) et (22) que les dérivées  $\tilde{v}_{p_\nu}^{(k)}(\sigma)$  existent et qu'on a:

$$(28) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \tilde{v}_{p_\nu}^{(k)}(\sigma) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, m),$$

uniformément dans l'intervalle  $L/5 \leq \sigma \leq 4L/5$ .

Les relations (27) et (28) entraînent l'assertion (23). D'une manière analogue, en s'appuyant sur (17) et (19)-(21) on démontre les relations (25). Le Théorème 3 se trouve ainsi démontré.

**LEMME 4.** Soit  $z = z(s)$ ,  $0 \leq s \leq L$ , une courbe simple fermée de classe  $C_p^1$  et soit  $\{p_\nu(z)\}$  une suite des fonctions définies sur  $\Sigma$  et telle que la relation (22) soit satisfaite. Supposons en outre qu'il existe les constantes  $c > 0$  et  $\theta > 0$  telles que

$$(29) \quad |\tilde{p}_\nu(s_1) - \tilde{p}_\nu(s_2)| \leq c|s_1 - s_2|^\theta \quad \text{lorsque} \quad 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq L \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Sous ces hypothèses il existe les dérivées  $\frac{\partial}{\partial s_\zeta} u_{p_\nu}(\zeta)$ , continues lorsque  $\zeta \in \Sigma$  et on a

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial s_\zeta} u_{p_\nu}(\zeta) = 0 \quad \text{uniformément par rapport à } \zeta \in \Sigma.$$

**Démonstration.** On vérifie aisément<sup>(\*)</sup> qu'il existe la dérivée  $\frac{\partial}{\partial s_\zeta} u_{p_\nu}(\zeta)$  et qu'on a:

$$(30) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_\zeta} u_{p_\nu}(\zeta) = & \int_\Sigma [p_\nu(z) - p_\nu(\zeta)] \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log|z - \zeta| ds_z + \\ & + p_\nu(\zeta) \int_\Sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial s_z} \log|z - \zeta| + \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log|z - \zeta| \right\} ds_z \quad (\nu = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Soit  $\Psi_\nu(\zeta) = \frac{\partial}{\partial s_\zeta} u_{p_\nu}(\zeta)$  et soit  $\zeta_0$  un point arbitrairement choisi sur la courbe  $\Sigma$ . Supposons, ce qu'on peut faire sans restreindre la généralité,

(\*) Cf. [3], lemme 4.



que  $\zeta_0 = z(L/2)$ . Soit, comme usuellement:  $\zeta = z(\sigma)$ ,  $\tilde{\Psi}_\nu(\sigma) = \Psi_\nu[z(\sigma)]$ . En vertu de la relation (30) et du Lemme 3 on obtient:

$$\tilde{\Psi}_\nu(\sigma) = \int_0^L \frac{[\tilde{p}_\nu(s) - \tilde{p}_\nu(\sigma)] U(s, \sigma)}{R(s, \sigma)(s - \sigma)} ds + \tilde{p}_\nu(\sigma) \int_0^L \frac{W(s, \sigma)}{R(s, \sigma)(s - \sigma)} ds.$$

En s'appuyant sur les hypothèses (22) et (29) et sur les relations (19) et (21) on démontre aisément que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \tilde{\Psi}_\nu(\sigma) = 0 \quad \text{uniformément lorsque} \quad L/5 \leq \sigma \leq 4L/5.$$

Il en résulte que  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \Psi_\nu(\zeta) = 0$  uniformément par rapport à  $\zeta$  dans un arc de  $\Sigma$  de longueur  $3L/5$  et contenant le point  $\zeta_0$ . Le point  $\zeta_0$  étant arbitraire il s'en suit notre assertion.

**THÉORÈME 4.** Soit  $m$  un nombre entier non négatif. Supposons que la courbe  $\Sigma: z = z(s)$ ,  $0 \leq s \leq L$ , soit de classe  $O^{m+1}$  lorsque  $m \geq 2$  et de classe  $C^1_\beta$  lorsque  $m = 1$ .

Soit  $\{p_\nu(z)\}$  une suite des fonctions définies sur  $\Sigma$ . Supposons que les fonctions  $\tilde{p}_\nu(s) = p_\nu[z(s)]$  sont de classe  $O^{m-1}$ , qu'il existe des constantes  $c > 0$ ,  $\theta > 0$  telles que

$$(31) \quad |\tilde{p}_\nu^{(m-1)}(s_1) - \tilde{p}_\nu^{(m-1)}(s_2)| \leq c|s_1 - s_2|^\theta \quad \text{lorsque} \quad 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq L,$$

et que

$$(32) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \tilde{p}_\nu^{(k)}(s) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, m-1)$$

uniformément dans l'intervalle  $0 \leq s \leq L$ .

Dans ces hypothèses les dérivées  $\frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} u_{p_\nu}(\zeta)$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ;  $\nu = 1, 2, \dots$ ) existent; elles sont continues lorsque  $\zeta \in \Sigma$  et on a

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} u_{p_\nu}(\zeta) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, m)$$

uniformément par rapport à  $\zeta \in \Sigma$ .

**Démonstration.** Si  $m = 1$  le Théorème 4 résulte du Lemme 4. Supposons pour la démonstration par récurrence que le Théorème 4 soit vrai lorsque  $m = n \geq 1$ . Admettons que  $\Sigma$  est une courbe simple fermée de classe  $O^{n+2}$  et que les relations (31) et (32) sont satisfaites lorsque  $m = n+1$ . Soit  $q_\nu(z)$  la fonction définie sur la courbe  $\Sigma$  au moyen de la formule

$$q_\nu(z) = \tilde{p}'_\nu(s) \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

où  $s$  désigne une valeur quelconque du paramètre telle que  $z = z(s)$ . On démontre aisément <sup>(10)</sup> que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_\zeta} u_{p_\nu}(\zeta) &= \int_{\Sigma} q_\nu(z) \log|z - \zeta| ds_z \\ &+ \int_{\Sigma} p_\nu(z) \left[ \frac{\partial}{\partial s_z} \log|z - \zeta| + \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log|z - \zeta| \right] ds_z \quad (\nu = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Vu l'hypothèse de récurrence les dérivées

$$\frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \int_{\Sigma} q_\nu(z) \log|z - \zeta| ds_z \quad (k = 1, \dots, n; \nu = 1, 2, \dots)$$

existent et on a

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \int_{\Sigma} q_\nu(z) \log|z - \zeta| ds_z = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

uniformément par rapport à  $\zeta \in \Sigma$ .

Soit

$$\varphi_\nu(\zeta) = \int_{\Sigma} p_\nu(z) \left[ \frac{\partial}{\partial s_z} \log|z - \zeta| + \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log|z - \zeta| \right] ds_z \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Il suffit de démontrer que les dérivées  $\frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \varphi_\nu(\zeta)$  ( $k = 1, 2, \dots, n; \nu = 1, 2, \dots$ ) existent et qu'on a:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \varphi_\nu(\zeta) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

uniformément par rapport à  $\zeta \in \Sigma$ .

On le démontre en appliquant le Lemme 3 (cf. en particulier les relations (18), (19) et (21)). La démonstration est bien analogue à celle des relations (23) et (24), c'est pourquoi nous nous dispensons d'en donner les détails.

**§ 4. L'étude de la dérivée normale du potentiel logarithmique de la double couche.** Notations. À chaque fonction  $p(z)$  définie dans un domaine  $D$  de la variable complexe  $z$  on fait correspondre la fonction  $p(x, y)$  des variables réelles  $x$  et  $y$  définie pour  $(x, y) \in D$  par la formule:

$$p(x, y) = p(z) \quad \text{lorsque} \quad z = x + iy$$

et réciproquement.

La fonction  $p(z)$  sera dite de classe  $A^m$  dans le domaine  $D$  lorsque la fonction  $p(x, y)$  est de classe  $C^m$  dans  $D$ , c'est-à-dire lorsque  $p(x, y)$  possède les dérivées partielles continues de l'ordre  $m$  dans  $D$ .

<sup>(10)</sup> Cf. [3], lemme 6.

LEMME 5. Soit  $m$  un nombre entier non négatif. Si  $m \geq 2$  on suppose que  $\Sigma$  est une courbe simple fermée de classe  $C^m$  et que les fonctions

$$(33) \quad f_\nu(x, y) \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots), \quad f_0(x, y) = f(x, y)$$

sont de classe  $C^{m-1}$  dans le plan  $E$ . Si  $m = 0$  et  $m = 1$  on admet que  $\Sigma$  est une courbe simple fermée de classe  $C_1^1$  et que les fonctions (33) sont continues<sup>(11)</sup>. Supposons encore que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(x, y) = 0$$

et qu'on a lorsque  $m > 1$ :

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\partial^k}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} f_\nu(x, y) = 0, \quad k_1 + k_2 = k, \quad k = 1, \dots, m-1,$$

dans les deux cas la convergence étant uniforme dans un domaine ouvert contenant  $\bar{\Omega}$ .

Sous ces hypothèses il existe les dérivées:

$$\frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \int_{\Omega} f_\nu(z) \log|z - \zeta| d\tau_z \quad (k = 0, 1, \dots, m; \nu = 0, 1, 2, \dots);$$

elles sont continues lorsque  $\zeta \in \Sigma$  et on a:

$$(34) \quad \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \int_{\Omega_r} f(z) \log|z - \zeta| d\tau_z = \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \int_{\Omega} f(z) \log|z - \zeta| d\tau_z,$$

$$(35) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \int_{\Omega} f_\nu(z) \log|z - \zeta| d\tau_z = 0$$

la convergence étant uniforme par rapport à  $\zeta \in \Sigma$  pour chaque  $k = 0, 1, \dots, m$ .

Démonstration. Il est évident que le Lemme 5 est vrai lorsque  $m = 0$  et  $m = 1$ . Supposons qu'il soit aussi vrai lorsque  $m = \mu$ ,  $\mu \geq 1$ , et admettons que la courbe  $\Sigma$  soit de classe  $C^{\mu+1}$  et que les fonctions (33) soient de classe  $C^\mu$  dans le plan  $(x, y)$ . Remarquons d'abord<sup>(12)</sup> que pour chaque fonction  $p(z)$  de classe  $A^1$  on a

$$(36) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \int_{\Omega} p(z) \log|z - \zeta| d\tau_z \\ &= \cos(s_\zeta, x) \left\{ \int_{\Sigma_r} p(z) \cos(n_z, x) \log|z - \zeta| ds_{\tau_z} + \int_{\Omega_r} \frac{\partial p}{\partial x} \log|z - \zeta| d\tau_z \right\} + \\ & \quad + \cos(s_\zeta, y) \left\{ \int_{\Sigma_r} p(z) \cos(n_z, y) \log|z - \zeta| ds_{\tau_z} + \int_{\Omega_r} \frac{\partial p}{\partial y} \log|z - \zeta| d\tau_z \right\} \end{aligned}$$

lorsque  $\zeta \in \Sigma$  et  $|r| \leq r_0$ .

<sup>(11)</sup> Il suffit même admettre qu'elles sont intégrables et bornées.

<sup>(12)</sup> Cf. [3], formule (67), lemme 7.

En vertu des Théorèmes 2 et 4 et de l'hypothèse de récurrence on déduit de la formule (36) que les relations (34) et (35) sont vrai lorsque  $m = \mu + 1$ . Le Lemme 5 se trouve ainsi démontré.

LEMME 6. Soit  $m$  un nombre entier non négatif. On suppose que  $\Sigma$  est une courbe simple fermée de classe  $C^{m+1}$  lorsque  $m \geq 1$  et de classe  $C_1^1$  lorsque  $m = 0$ . Supposons que les fonctions  $g_\nu(x, y)$  ( $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ),  $g_0(x, y) = g(x, y)$  sont de classe  $C^m$  dans le plan  $(x, y)$  et que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\partial^k}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} g_\nu(x, y) = 0, \quad k_1 + k_2 = k, \quad k = 0, 1, \dots, m,$$

uniformément dans un domaine ouvert contenant  $\bar{\Omega}$ .

Sous ces hypothèses il existe les dérivées

$$\frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \int_{\Omega} g_\nu(z) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log|z - \zeta| d\tau_z \quad (k = 0, 1, \dots, m; \nu = 0, 1, 2, \dots);$$

elles sont continues lorsque  $\zeta \in \Sigma$  et on a:

$$(37) \quad \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \int_{\Omega} g(z) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log|z - \zeta| d\tau_z = \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \int_{\Omega} g(z) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log|z - \zeta| d\tau_z,$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \int_{\Omega} g_\nu(z) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log|z - \zeta| d\tau_z = 0$$

la convergence étant uniforme par rapport à  $\zeta \in \Sigma$  pour chaque  $k = 0, 1, \dots, m$ .

Démonstration. Le Lemme 6 est évident lorsque  $m = 0$ . D'autre part pour chaque fonction  $p(z)$  de classe  $A^1$  on a

$$(38) \quad \int_{\Omega} p(z) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log|z - \zeta| d\tau_z$$

$$= \cos(n_\zeta, x) \left\{ \int_{\Sigma_r} p(z) \cos(n_z, x) \log|z - \zeta| ds_{rz} + \int_{\Omega_r} \frac{\partial p}{\partial x} \log|z - \zeta| d\tau_z \right\} +$$

$$+ \cos(n_\zeta, y) \left\{ \int_{\Sigma_r} p(z) \cos(n_z, y) \log|z - \zeta| ds_{rz} + \int_{\Omega_r} \frac{\partial p}{\partial y} \log|z - \zeta| d\tau_z \right\}$$

lorsque  $|r| \leq r_0$  et  $\zeta \in \Sigma$ .

Dans le cas où  $m \geq 1$  le Lemme 6 résulte de la relation (38) en vertu des Théorèmes 2, 4 et du Lemme 5.

LEMME 7. Soit  $m$  un nombre entier non négatif et soit  $z = z(s)$ ,  $0 \leq s \leq L$  une courbe simple fermée de classe  $C^{m+2}$ . Supposons que  $p(z)$  est une fonction de classe  $C^{m+2}(\Sigma)$  et soit  $p(x, y)$  un prolongement<sup>(13)</sup> de  $p$  de classe  $C^{m+2}$  dans le plan  $E$  et tel que

$$(39) \quad p(x_r, y_r) = p(z_r) = p(z) \quad \text{lorsque} \quad z = x + iy \in \Sigma \quad \text{et} \quad |r| \leq \varepsilon \quad (\varepsilon > 0).$$

<sup>(13)</sup> L'existence d'un tel prolongement assure le Lemme 2.

Sous ces hypothèses on a <sup>(14)</sup>

$$(40) \quad \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r \neq 0}} \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \int_{\Sigma_r} p(z_r) \frac{\partial}{\partial n_z} \log|z_r - \zeta| ds_{rz} \\ = \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \int_{\Omega} \Delta p \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log|z - \zeta| d\tau_z \quad (k = 0, 1, \dots, m),$$

uniformément par rapport à  $\zeta \in \Sigma$ .

Démonstration. Soient:  $0 < \varrho < \varepsilon$ ,  $\zeta \in \Sigma$  et  $\Omega_\varrho, \Omega_{-\varrho}$  les domaines définies dans le Corollaire 1. On établit aisément en s'appuyant sur le théorème de Green et ensuite sur la relation (39) que

$$(41) \quad \int_{\Sigma_{-\varrho}} p(z_{-\varrho}) \frac{\partial}{\partial n_z} \log|z_{-\varrho} - \zeta| ds_{-\varrho z} = \int_{\Omega_{-\varrho}} \Delta p \log|z - \zeta| d\tau_z - 2\pi p(\zeta),$$

$$(42) \quad \int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho) \frac{\partial}{\partial n_z} \log|z_\varrho - \zeta| ds_{\varrho z} = \int_{\Omega_\varrho} \Delta p \log|z - \zeta| d\tau_z \quad (15).$$

L'assertion (40) résulte du Lemme 6 et des identités (41) et (42).

Notation. Considérons le potentiel  $v_p(\zeta)$  défini par la formule (13) et soit  $p(z_r) = p(z)$  lorsque  $z \in \Sigma$  et  $|r| \leq \varepsilon$  où  $\varepsilon > 0$ . Supposons que  $\zeta \in \Sigma$  et que la limite

$$(43) \quad \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r \neq 0}} \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \int_{\Sigma_r} p(z_r) \frac{\partial}{\partial n_z} \log|z_r - \zeta| ds_{rz}$$

existe et est finie. Elle sera désignée par  $\frac{\partial^*}{\partial n_\zeta} v_p(\zeta)$ .

Les Lemmes 2 et 7 permettent d'exprimer la dérivée  $\frac{\partial^*}{\partial n_\zeta} v_p(\zeta)$  au moyen d'une intégrale double. En effet, on a le corollaire suivant:

COROLLAIRE 2. Soit  $\Sigma$  une courbe simple fermée de classe  $C^3$ ,  $p(z)$  une fonction de classe  $C^2(\Sigma)$  et  $\zeta$  un point arbitraire de la courbe  $\Sigma$ .

Alors la dérivée  $\frac{\partial^*}{\partial n_\zeta} v_p(\zeta)$  existe et on a:

$$\frac{\partial^*}{\partial n_\zeta} v_p(\zeta) = \int_{\Omega} \Delta p \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log|z - \zeta| d\tau_z$$

pour chaque fonction  $p(x, y)$  de classe  $C^2$  dans  $\Omega$  qui vérifie la condition (39).

<sup>(14)</sup> Le second membre de la relation (40) est une fonction continue sur la courbe  $\Sigma$  en vertu du Lemme 6.

<sup>(15)</sup> À l'occasion remarquons qu'on a encore:

$$\int_{\Sigma} p(z) \frac{\partial}{\partial n_z} \log|z - \zeta| ds_z = \int_{\Omega} \Delta p \log|z - \zeta| d\tau_z - \pi p(\zeta) + \int_{\Sigma} \frac{\partial p}{\partial n_s} \log|z - \zeta| ds,$$

pour chaque fonction  $p(z)$  de classe  $A^1$  dans  $\Omega$ .

En rapprochant le Lemme 7 et le Corollaire 2 on obtient le théorème suivant:

**THÉORÈME 5.** Soit  $m$  un nombre entier non négatif et  $\Sigma$  une courbe simple fermée de classe  $C^{m+3}$ . Supposons que  $p(z)$  est une fonction de classe  $C^{m+2}(\Sigma)$  et que la relation (39) est vérifiée.

Sous ces hypothèses les dérivées  $\frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \left[ \frac{\partial^*}{\partial n_\zeta} v_p(\zeta) \right]$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ) existent; elles sont continues lorsque  $\zeta \in \Sigma$  et on a:

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r \neq 0}} \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \left\{ \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \int_{\Sigma_r} p(z_r) \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_r - \zeta| ds_{rz} \right\} = \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \frac{\partial^*}{\partial n_\zeta} v_p(\zeta) \quad (k = 0, 1, \dots, m)$$

la convergence étant uniforme par rapport à  $\zeta \in \Sigma$ .

Remarque 2. Supposons que  $\Sigma$  est une courbe simple fermée de classe  $C_1^1$  et que  $p(z) \in C^0(\Sigma)$ ,  $p(z_r) = p(z)$  lorsque  $z \in \Sigma$ ,  $|r| \leq \varepsilon$  où  $\varepsilon > 0$ . En vertu du théorème 4 de la note [3] ces hypothèses entraînent la relation:

$$(44) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \left\{ \int_{\Sigma - \varepsilon} p(z_{-\varepsilon}) \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_{-\varepsilon} - \zeta| ds_{-\varepsilon} - \int_{\Sigma_\varepsilon} p(z_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_\varepsilon - \zeta| ds_{\varepsilon z} \right\} = 0$$

uniformément par rapport à  $\zeta \in \Sigma$ .

Mais les mêmes hypothèses n'assurent pas d'existence d'une limite finie (43) comme le montre l'exemple suivant:

**EXEMPLE (16).** Supposons que  $\Sigma$  est une courbe simple fermée de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , qui contient le segment  $0 \leq x \leq 2$  de l'axe  $x$ . Soit  $p(z)$  la fonction qui s'annule sur la courbe  $\Sigma$  au dehors du segment  $0 \leq x \leq 2$  où elle est définie de manière suivante:

$$p(z) = p(x + iy) = \begin{cases} x & \text{sur le segment } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x & \text{sur le segment } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Il est évident que la fonction  $p(z)$ , définie ci-dessus est de classe  $C^0(\Sigma)$ . En vertu de la Remarque 2 la relation (44) est donc satisfaite si  $p(z_r) = p(z)$  lorsque  $z \in \Sigma$  et  $|r| \leq \varepsilon$ .

Nous allons démontrer que dans le cas considéré ci-dessus la limite (43) n'est pas finie au point  $\zeta = 0$ . En effet, en admettant la relation (39) on a alors:

(16) Cet exemple est assez voisin à un donné par Liapunov et exposé à la page 73 du mémoire [1].

$$\begin{aligned}
 (45) \quad \int_{\Sigma_r} p(z_r) \frac{\partial}{\partial n_z} \log|z_r - \zeta| ds_{rz} &= \int_0^1 x \frac{r}{x^2 + r^2} dx + \int_1^2 (2-x) \frac{r}{x^2 + r^2} dx \\
 &= r \{ \ln(1+r^2) - \frac{1}{2} \ln(4+r^2) \} - r \ln|r| + 2 \left\{ \operatorname{arctg} \frac{2}{r} - \operatorname{arctg} \frac{1}{r} \right\}.
 \end{aligned}$$

Remarquons que la fonction:  $\frac{\partial}{\partial r}[r \ln|r|] = \ln|r| + 1$  tend vers l'infini lorsque  $r \rightarrow 0$  tandis que les dérivées par rapport à  $r$  de deux autres éléments de la somme qui intervient au second membre de la relation (45) ont les limites finies lorsque  $r \rightarrow 0$ . Il en résulte notre assertion.

Remarque 3. L'énoncé du théorème 5 de ma note [3] n'a pas été suffisamment rigoureux. Pour le corriger, au lieu du symbole

$$\frac{\partial}{\partial n_\zeta} v_p(\zeta) \quad \text{où} \quad v_p(\zeta) = \int_{\Sigma} p(z) \frac{\partial}{\partial n_z} \log|z - \zeta| ds_z$$

il faut y mettre la limite (43), c'est-à-dire la dérivée  $\frac{\partial^*}{\partial n_\zeta} v_p(\zeta)$ , selon la notation introduite dans la présente note.

THÉORÈME 6. Soit  $m$  un nombre entier non négatif. Supposons que la courbe simple fermée  $\Sigma: z = z(s)$ ,  $0 \leq s \leq L$  soit de classe  $C^{m+2}$  et que  $\{p_\nu(z)\}$  soit une suite des fonctions de classe  $C^{m+2}(\Sigma)$  telle que

$$(46) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \tilde{p}_\nu^{(j)}(s) = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, m+2),$$

uniformément dans l'intervalle  $0 \leq s \leq L$ .

Sous ces hypothèses on a

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \left[ \frac{\partial^*}{\partial n_\zeta} v_{p_\nu}(\zeta) \right] = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, m; \nu = 1, 2, \dots)$$

uniformément par rapport à  $\zeta \in \Sigma$ .

Démonstration. Soit  $q_\nu(x, y)$  la fonction définie dans le domaine  $P_{r_0}$  au moyen de la formule <sup>(17)</sup>

$$q_\nu(x, y) = \tilde{p}_\nu(s) \quad \text{où} \quad s = \mu(x, y) \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

En vertu du Lemme 2 <sup>(18)</sup> et de l'hypothèse (46) on a

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\partial^k q_\nu(x, y)}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} = 0 \quad (k = k_1 + k_2, \quad k = 0, 1, \dots, m+2),$$

uniformément dans l'anneau  $P_{r_0}$ .

<sup>(17)</sup> Cf. § 2, Lemme 2.

<sup>(18)</sup> Cf. la relation (6).

Soit  $h(x, y)$  une fonction quelconque, mais fixe, ayant les propriétés énumérées dans la Remarque 1 où  $r_1 = r_0$ . Soit  $p_v^*(x, y)$  ( $v = 1, 2, \dots$ ) la fonction égale à  $q_v(x, y)h(x, y)$  dans  $P_{r_0}$  et s'annulant dans le complémentaire de cette couronne. Il est évident que les fonctions  $p_v^*(x, y)$  sont de classe  $C^{m+2}$  dans le plan tout entier et qu'on a:

$$(47) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\partial^k p_v^*(x, y)}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, m+2),$$

uniformément dans l'ensemble  $\overline{\Omega_{-r_0}}$ .

En vertu du Corollaire 2 et du Théorème 5 on obtient:

$$(48) \quad \frac{\partial^k}{\partial s_z^k} \left[ \frac{\partial^*}{\partial n_z} v_{p_v}(\zeta) \right] = \frac{\partial^k}{\partial s_z^k} \int_{\Omega} \Delta p_v \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z - \zeta| d\tau_z \quad (k = 0, 1, \dots, m).$$

Le Théorème 6 résulte immédiatement des relations (47) et (48) en vertu du Lemme 6 (cf. la relation (37)).

#### Travaux cités

- [1] N. M. Giunter, *Teoria potencjalu*, Warszawa 1957.
- [2] Z. Szmydt, *Sur l'approximation par des polynômes harmoniques sur le contour d'un domaine plan*, Ann. Polon. Math. 11 (1962), p. 283-305.
- [3] — *Sur quelques propriétés du potentiel logarithmique*, Ann. Polon. Math. 12 (1962), p. 115-137.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK  
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 25.9.1964