Sur une certaine famille de fonctions univalentes

par W. JANOWSKI (Łódź)

§ 1. Soit c , $|c| < 1$, un nombre quelconque, S_c — une famille de fonctions holomorphes et univalentes dans le cercle $|z| < 1$, de la forme

$$(1.1) \quad f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

qui remplissent la condition

$$(1.2) \quad f'(c) = 1.$$

Pour le ζ , $|\zeta| < 1$, arbitraire fixé, subordonnons à toute fonction $f(z) \in S_c$ le nombre

$$(1.3) \quad F(f) = F(f(\zeta), \overline{f(\zeta)}, \dots, f^{(n)}(\zeta), \overline{f^{(n)}(\zeta)}),$$

où $F(f, \bar{f}, \dots, f^{(n)}, \overline{f^{(n)}})$ est une fonction analytique de $2n+2$ variables complexes $f, \bar{f}, \dots, f^{(n)}, \overline{f^{(n)}}$ dans le domaine $\{|f^{(k)}| < \infty, |\overline{f^{(k)}}| < \infty\}$, où $k = 0, 1, \dots, n$, $f^{(0)} \equiv f$, $\overline{f^{(0)}} \equiv \bar{f}$.

Nous appellerons domaine de la variabilité de la fonctionnelle (1.3) l'ensemble de tous les points $F(f)$ du plan de la variable complexe, lorsque $f(z)$ parcourt la famille S_c et nous désignerons ce domaine par $D_n(\zeta)$.

Le but de cette note est d'étudier des propriétés du domaine $D_n(\zeta)$ et de déterminer effectivement $D_n(\zeta)$ dans certains cas particuliers.

LEMME 1. *La famille S_c est compacte.*

Démonstration. Si $f(z) \in S_c$, alors $f(z)/f'(0) \in S$, où S est une sous-classe de fonctions de la forme (1.1), qui remplissent la condition $f'(0) = 1$.

D'après ce qui précède

$$(1.4) \quad \left| \frac{f'(c)}{f'(0)} \right| \geq \frac{1-|c|}{(1+|c|)^3} \quad \text{et} \quad \left| \frac{f(c)}{f'(0)} \right| \leq \frac{|c|}{(1-|c|)^2}.$$

De (1.2) et (1.4) nous obtenons

$$|f(c)| \leq M(|c|), \quad \text{où} \quad M(|c|) = |c| \left(\frac{1+|c|}{1-|c|} \right)^3,$$

ce qui prouve que les fonctions de la famille S_c sont presque également bornées dans le cercle $|z| < 1$, donc elles forment dans ce cercle une famille normale.

Soit $f_m(z)$ ($m = 0, 1, \dots$) une suite de fonctions de la famille S_c convergentes presque uniformément dans le cercle $|z| < 1$. Désignons par $f_0(z)$ la limite de cette suite. Comme $f'(c) \neq 0$, $f_0(z)$ n'est pas une fonction constante, elle est donc une fonction univalente. Vu $f_0(0) = 0$ et $f'_0(c) = 1$, on a $f_0(z) \in S_c$. Ainsi, S_c est une famille compacte.

Il résulte de la compacité de la famille S_c que l'ensemble $D_n(\zeta)$ est fermé. Il est donc borné. De même que dans la note [9] (voir p. 10-12), on peut démontrer le lemme:

LEMME 2. *L'ensemble $D_n(\zeta)$ est un cercle topologique fermé.*

Il résulte directement du lemme 2 que pour caractériser le domaine $D_n(\zeta)$ il suffit de trouver sa frontière $\Gamma_n(\zeta)$.

La fonction $f^*(z)$, pour laquelle $F(f^*) \in \Gamma_n(\zeta)$, sera dite fonction frontale par rapport à la fonctionnelle (1.3). Soit $\hat{F}$ un point arbitraire extérieur du domaine $D_n(\zeta)$. Il existe alors un point F_0 de la frontière $\Gamma_n(\zeta)$ tel que

$$(1.5) \quad |F_0 - \hat{F}| \leq |F - \hat{F}|$$

pour tous les points F du domaine $D_n(\zeta)$ appartenant à l'entourage suffisamment petit du point F_0 . L'ensemble $\Gamma'_n(\zeta)$ des points F_0 est dense dans $\Gamma_n(\zeta)$. Fermant le premier d'entre eux, nous obtenons le second (voir [2]).

§ 2. THÉORÈME 1. *Si la fonction $f(z)$ appartient à la famille S_c , alors pour ε suffisamment petit, à la famille S_c appartient la fonction de la forme*

$$(2.1) \quad f_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon \varphi(z, a) + o(\varepsilon),$$

où

$$(2.2) \quad \varphi(z, a) = \alpha \psi(z, a) + \alpha \mu^2(a) \sigma(z, a) + \bar{\alpha} \bar{\mu}^2(a) \sigma(z, 1/\bar{a}),$$

et

$$(2.3) \quad \psi(z, a) = f(a)f(z) \frac{(f(z) - 2f(c))f(a) + f(c)^2}{(f(z) - f(a))(f(c) - f(a))^2}, \quad \mu(a) = \frac{f(a)}{af'(a)},$$

$$(2.4) \quad \sigma(z, a) = \chi(z, a) - f(z)\chi'_z(c, a), \quad \chi(z, a) = \frac{1}{2}zf'(z)\frac{a+z}{a-z};$$

a , $|a| < 1$, et a sont des nombres complexes arbitraires.

Démonstration. Si $f(z)$ appartient à la famille $\tilde{S}$ de toutes les fonctions holomorphes et univalentes dans le cercle $|z| < 1$, de la forme (1.1),

alors pour ε suffisamment petit, appartient à cette famille la fonction de la forme (voir [9] et [5]):

$$(2.5) \quad \hat{f}_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon \hat{\varphi}(z, a) + o(\varepsilon),$$

où

$$(2.6) \quad \hat{\varphi}(z, a) = \alpha \hat{\psi}(z, a) + \alpha \mu^2(a) \chi(z, a) + \bar{\alpha} \bar{\mu}^2(a) \chi(z, 1/\bar{a}),$$

et

$$(2.7) \quad \hat{\psi}(z, a) = \frac{f(z)^2}{f(z) - f(a)}.$$

Supposant que $f(z)$ appartient également à la famille S_c nous obtenons, en dérivant (2.5) par rapport à z , la formule

$$(2.8) \quad \hat{f}'_\varepsilon(c) = 1 + \varepsilon \hat{\varphi}'_z(c, a) + o(\varepsilon),$$

où

$$(2.9) \quad \hat{\varphi}'_z(c, a) = \alpha \hat{\psi}'_z(c, a) + \alpha \mu^2(a) \chi'_z(c, a) + \bar{\alpha} \bar{\mu}^2(a) \chi'_z(c, 1/\bar{a}),$$

$$(2.10) \quad \hat{\psi}'_z(c, a) = \frac{f(c)^2 - 2f(a)f(c)}{(f(c) - f(a))^2}.$$

Désignant par $\hat{f}_\varepsilon(z)$ la fonction

$$(2.11) \quad \hat{f}_\varepsilon(z)/\hat{f}'_\varepsilon(c),$$

nous remarquons qu'elle appartient à la famille S_c . En substituant $\hat{f}_\varepsilon(z)$ de (2.5) et $\hat{f}'_\varepsilon(c)$ de (2.8) dans (2.11), et en tenant compte de (2.9), nous avons

$$(2.12) \quad \begin{aligned} f_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon \{ & \alpha [\hat{\psi}(z, a) - f(z)\hat{\psi}'_z(c, a)] + \\ & + \alpha \mu^2(a) [\chi(z, a) - f(z)\chi'_z(c, a)] + \bar{\alpha} \bar{\mu}^2(a) [\chi(z, 1/\bar{a}) - \chi'_z(c, 1/\bar{a})] \}. \end{aligned}$$

Posant

$$(2.13) \quad \varphi(z) = \hat{\psi}(z, a) - f(z)\hat{\psi}'_z(c, a),$$

nous obtenons de (2.12), vu (2.4), (2.7), (2.10) et (2.13), la formule des variations (2.1), ce qui termine la démonstration.

THÉORÈME 2. *Si la fonction $f(z)$ appartient à la famille S_c et si cette fonction représente le cercle $|z| < 1$ en domaine ayant des points extérieurs et b est un de ces points, alors pour ε suffisamment petit à la famille S_c appartient la fonction de la forme*

$$(2.14) \quad f_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon \varphi(z) + o(\varepsilon),$$

où

$$(2.15) \quad \varphi(z) = \alpha b f(z) \frac{(f(z) - 2f(c))b + f(c)^2}{(f(z) - b)(f(c) - b)^2};$$

α est un nombre complexe arbitraire.

Démonstration. On peut présenter sous la forme

$$\hat{f}_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon a \frac{f(z)^2}{f(z) - b}$$

la formule correspondante des variations pour une fonction de la famille $\tilde{S}$ (voir [4]).

Procédant de même que dans le cas de la formule des variations (2.8), nous obtenons la formule demandée (2.14).

§ 3. La propriété extrémale (1.5) des points frontaux du domaine $D_n(\zeta)$ nous permet de trouver, avec la formule des variations (2.1), l'équation différentielle des fonctions frontales $f^*(z)$ de la classe étudiée S_c .

THÉORÈME 3. Toute fonction frontale $w = f^*(z)$ par rapport à la fonctionnelle (1.3), définie dans la famille S_c , satisfait à l'équation

$$(3.1) \quad \left(\frac{w'}{w}\right)^2 M(w) = \frac{1}{z^2} N(z),$$

où

$$(3.2) \quad M(w) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \psi_\zeta^{*(k)}(\zeta, z),$$

$$(3.3) \quad \psi^*(\zeta, z) = v w \frac{(v-2d)w + d^2}{(w-v)(w-\bar{d})^2}, \quad v = f^*(\zeta), \quad d = f^*(c),$$

$$(3.4) \quad \alpha_k = \beta p_k + \bar{\beta} \bar{q}_k, \quad p_k = F'_{v_k}(f^*), \quad q_k = F'_{\bar{v}_k}(f^*), \quad v_k = f^{*(k)}(\zeta),$$

$$(3.5) \quad N(z) = \sum_{k=0}^n [\alpha_k \sigma_\zeta^{*(k)}(\zeta, z) + \bar{\alpha}_k \overline{\sigma_\zeta^{*(k)}(\zeta, 1/\bar{z})}],$$

$$(3.6) \quad \sigma^*(\zeta, z) = \chi^*(\zeta, z) - v \chi_\zeta^{*'}(c, z), \quad \chi^*(\zeta, z) = \frac{1}{2} \zeta v' \frac{z + \zeta}{z - \zeta};$$

$\beta, |\beta| = 1$, étant un paramètre.

Démonstration. En appliquant la formule des variations (2.1) à la fonction frontale $f^*(z)$ au point $z = \zeta$ et en remplaçant ensuite le paramètre variable a par z , nous obtenons, vu (3.3) et (3.6), la formule

$$(3.7) \quad f_\varepsilon(\zeta) = f^*(\zeta) + \varepsilon \varphi^*(\zeta, z) + o(\varepsilon),$$

où

$$(3.8) \quad \varphi^*(\zeta, z) = -\alpha \psi^*(\zeta, z) + \alpha \mu^2(z) \sigma^*(\zeta, z) + \bar{\alpha} \bar{\mu}^2(z) \sigma^*(\zeta, 1/\bar{z}),$$

et

$$(3.9) \quad \mu(z) = f^*(z)/zf^{*'}(z).$$

Posons

$$(3.10) \quad \Delta F = F(f_s) - F(f^*),$$

$$(3.11) \quad \Delta f^{*(k)} = f_s^{(k)} - f^{*(k)}, \quad f_s^{(k)} = f_s^{(k)}(\zeta), \quad f^{*(k)} = f^{*(k)}(\zeta)$$

pour $k = 0, 1, \dots, n$, et

$$(3.12) \quad L(f^*) = \sum_{k=0}^n [p_k \varphi_\zeta^{(k)}(\zeta, z) + \overline{q_k \varphi_\zeta^{(k)}(\zeta, z)}].$$

La dérivée d'ordre k de la fonction $f_\varepsilon(\zeta)$ s'exprimera d'après (3.7), par la formule

$$f_\varepsilon^{(k)}(\zeta) = f^{*(k)}(\zeta) + \varepsilon \varphi_\zeta^{*(k)}(\zeta, z) + o(\varepsilon),$$

donc

$$\Delta f^{*(k)} = \varepsilon \varphi_\zeta^{*(k)}(\zeta, z) + o(\varepsilon).$$

Posant dans (1.5)

$$F_0 = F(f^*), \quad F = F(f_\varepsilon)$$

et introduisant la notation

$$(3.13) \quad \beta = \exp[i \arg(\overline{F_0 - \dot{F}})],$$

nous pouvons écrire la condition (1.5) sous la forme équivalente:

$$(3.14) \quad \Delta^2 F + 2|F_0 - \dot{F}| \operatorname{re}(\beta \Delta F) \geq 0.$$

La fonctionnelle (1.3) se développe dans l'entourage du point $F(f^*)$ en une série entière, donc, étant donné (3.10)-(3.12), nous avons

$$(3.15) \quad \Delta F = \varepsilon L(f^*) + o(\varepsilon).$$

En substituant ΔF de (3.15) dans (3.14), nous obtiendrons l'inégalité

$$(3.16) \quad 2\varepsilon |F_0 - \dot{F}| \operatorname{re}[\beta L(f^*)] + o(\varepsilon) \geq 0.$$

En divisant les deux membres de l'inégalité (3.16) par ε et en passant à la limite avec $\varepsilon \rightarrow 0$, nous obtenons la condition

$$2|F_0 - \dot{F}| \operatorname{re}[\beta L(f^*)] \geq 0$$

et, vu $|F_0 - \dot{F}| > 0$, la condition

$$(3.17) \quad \operatorname{re}[\beta L(f^*)] \geq 0.$$

Étant donné (3.12), nous avons donc l'inégalité

$$(3.18) \quad \operatorname{re} \left\{ \beta \sum_{k=0}^n [p_k \varphi_\zeta^{(k)}(\zeta, z) + \overline{q_k \varphi_\zeta^{(k)}(\zeta, z)}] \right\} \geq 0.$$

En exprimant les dérivées $\varphi_\zeta^{(k)}(\zeta, z)$ par les dérivées des fonctions $\psi^*(\zeta, z)$ et $\sigma^*(\zeta, z)$ nous donnerons à l'inégalité (3.18) la forme suivante:

$$(3.19) \quad \operatorname{re} \left\{ \beta \sum_{k=0}^n [p_k (-\alpha \psi_\zeta^{*(k)}(\zeta, z) + \alpha \mu^2(z) \sigma_\zeta^{*(k)}(\zeta, z) + \bar{\alpha} \bar{\mu}^2(z) \sigma_\zeta^{*(k)}(\zeta, 1/\bar{z}))] + \right. \\ \left. + [q_k (-\bar{\alpha} \psi_\zeta^{*(k)}(\zeta, z) + \bar{\alpha} \bar{\mu}^2(z) \sigma_\zeta^{*(k)}(\zeta, z) + \alpha \mu^2(z) \sigma_\zeta^{*(k)}(\zeta, 1/\bar{z}))] \right\} \geq 0.$$

Remplaçons ici les termes, dans lesquels figure le facteur $\bar{\alpha}$, par l'expression conjuguée et tenons compte des premières des notations (3.4). Nous obtiendrons alors l'inégalité

$$\operatorname{re} a \left\{ \sum_{k=0}^n [-\alpha_k \psi_{\zeta}^{*(k)}(\zeta, z) + \alpha_k \mu^2(z) \sigma_{\zeta}^{*(k)}(\zeta, z) + \bar{\alpha}_k \mu^2(z) \overline{\sigma_{\zeta}^{*(k)}(\zeta, 1/\bar{z})}] \right\} \geq 0,$$

à laquelle, vu (3.2) et (3.5), nous pouvons donner la forme

$$(3.20) \quad \operatorname{re} a[-M(w) + \mu^2(z)N(z)] \geq 0.$$

Étant donné que le nombre a est arbitraire, nous obtiendrons de là l'égalité

$$(3.21) \quad -M(w) + \mu^2(z)N(z) = 0.$$

Divisant les deux membres de (3.21) par $\mu^2(z)$, nous obtenons les équations (3.1), ce qui termine la démonstration.

§ 4. Dans la théorie des équations différentielles dans le domaine complexe, on démontre que la solution $w = f(z)$ de l'équation de la forme $X(w)w'^2 = Y(z)$, où $X(w)$ et $Y(z)$ sont des fonctions rationnelles de leurs arguments, peut avoir uniquement des singularités algébriques. Par conséquent, les fonctions frontales par rapport à la fonctionnelle (1.3) dans la famille S_c transforment le cercle $|z| < 1$ en domaines dont les frontières sont analytiques par intervalles.

THÉORÈME 4. *Toute fonction frontale $w = f^*(z)$ par rapport à la fonctionnelle (1.3) déterminée dans la famille S_c , représente le cercle $|z| < 1$ en domaine obtenu en éliminant du plan un nombre fini d'arcs analytiques, dont au moins un passe par le point $w = \infty$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que la fonction frontale arbitraire $f^*(z)$ transforme le cercle en un domaine qui n'a pas de points extérieurs. Supposant pour la démonstration le contraire, désignons par b un point extérieur du domaine, en lequel la fonction $f^*(z)$ transforme le cercle $|z| < 1$. En vertu du théorème 2, la variation de la fonction $f^*(z)$ est alors déterminée par la formule (2.14). D'après ce qui précède

$$(4.1) \quad \Delta f^{*(k)} = \varepsilon \varphi_{\zeta}^{*(k)}(\zeta) + o(\varepsilon), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

où

$$(4.2) \quad \varphi^*(\zeta) = abv \frac{(v-2d)b+d^2}{(v-b)(d-b)^2}.$$

La fonction frontale doit satisfaire à la condition (3.18), où il faut remplacer $\varphi(\zeta, z)$ par $\varphi(\zeta)$. Alors la condition (3.18) prendra la forme

$$(4.3) \quad \operatorname{re} \left\{ \beta \sum_{k=0}^n [\alpha p_k \gamma^{(k)}(\zeta) + \bar{\alpha} q_k \overline{\gamma^{(k)}(\zeta)}] \right\} \geq 0,$$

où

$$\gamma(\xi) = bv \frac{(v-2d)b + d^2}{(v-b)(d-b)^2}.$$

Remplaçant dans (4.3) les termes, qui contiennent le facteur $\bar{a}$ par les expressions conjuguées, nous obtiendrons l'inégalité

$$(4.4) \quad \operatorname{re} a \left[\sum_{k=0}^n a_k \gamma^{(k)}(\xi) \right] \geq 0.$$

L'expression entre crochets est différente de zéro pour un b donné et des b' proches de b , a étant dans ce cas un nombre arbitraire. On peut donc choisir son argument de telle façon que

$$\operatorname{re} a \left[\sum_{k=0}^n a_k \gamma^{(k)}(\xi) \right] < 0.$$

ce qui est impossible, puisque $f^*(z)$ est par hypothèse une fonction frontale. D'après ce qui précède, la supposition que la fonction $f^*(z)$ transforme le cercle $|z| < 1$ en domaine ayant des points extérieurs, est fausse. Ainsi le théorème est prouvé.

Désignons par B_0 le domaine en lequel la fonction frontale $f^*(z)$ transforme le cercle $|z| < 1$ et par L_0 sa frontière. Soient $L_0^{(1)}, \dots, L_0^{(p)}$, $1 \leq p < \infty$, des arcs analytiques qui forment la frontière L_0 . Nous appellerons le point $w = \infty$ extrémité de chacun des arcs $L_0^{(k)}$, $1 \leq k \leq p$, qui contient ce point. Si $w = w(t^*)$, $a \leq t^* \leq b$, est l'équation d'un quelconque des arcs $L_0^{(1)}, \dots, L_0^{(p)}$, alors le point $w(t^*)$, où $a < t^* < b$, n'appartient à aucun des arcs restants. Si le point $w(a)$ ou $w(b)$ appartient à deux ou plusieurs arcs, nous l'appellerons extrémité de chacun d'eux. Si $w(a) \neq \infty$ ($w(b) \neq \infty$) et $w(a)$ ($w(b)$) appartient uniquement à un seul arc, alors nous appellerons $w(a)$ ($w(b)$) origine de cet arc. La frontière L_0 a au moins une origine.

L'équation de la frontière L_0 du domaine B_0 peut être mise sous la forme

$$w = w(t^*), \quad 0 \leq t^* \leq \infty,$$

où $w(t^*)$ est une fonction analytique par intervalles de l'argument t^* . Si t^* augmente de 0 à ∞ , alors $w(t^*)$ décrit tous les arcs $L_0^{(1)}, \dots, L_0^{(p)}$ et de telle façon que la courbe $L_t \subset L_0$ d'équation $w = w(t^*)$, $t \leq t^* \leq \infty$, où $t > 0$ soit la frontière du domaine B_t , $B_t \supset B_0$, dont les propriétés sont analogues à celles du domaine B_0 .

Soit w_0 l'origine d'un des arcs $L_0^{(k)}$, formant la frontière du domaine B_0 . Désignons par z_0 le point de la circonférence $|z| = 1$ où $f^*(z_0) = w_0$. Comme la fonction $f^*(z)$ est double sur l'arc de la circonférence $|z| = 1$ appartenant à l'entourage suffisamment petit du point z_0 , alors la dérivée de la fonction $f^*(z)$ existe en ce point et elle est égale à zéro: $f'^*(z_0) = 0$.

§ 5. Nous étudierons maintenant certaines propriétés de l'équation (3.1) et nous en tirerons des conclusions relatives à la frontière L_0 .

Suivant la position des points c et ζ nous distinguerons les cas suivants:

1. $c \neq 0$, $\zeta \neq c$. De (3.5) et (3.6) il résulte directement que dans ce cas analysé $N(z)$ est le quotient d'un polynôme

$$s_0 z^{2n+6} + \dots + s_{2n+5} z + s_{2n+6}$$

de degré $k \leq 2n+6$ et du polynôme

$$(z-\zeta)^{n+1} \left(z - \frac{1}{\bar{\zeta}}\right)^{n+1} (z-c)^2 \left(z - \frac{1}{\bar{c}}\right)^2.$$

En vertu de (3.3), $M(0) = 0$. Comme les quotients z/w et zw'/w prennent au point $w = 0$ des valeurs finies, $z = 0$ est racine de la fonction $N(z)$, d'où $s_{2n+6} = 0$. Il résulte de (3.5) que

$$(5.1) \quad N(z) = \overline{N(1/\bar{z})}.$$

d'où, étant donné $s_{2n+6} = 0$, nous obtenons $s_0 = 0$. Vu ce qui précède, la fonction $N(z)$ peut être représenté sous la forme

$$(5.2) \quad N(z) = \frac{z(s_1 z^{2n+4} + \dots + s_{2n+5})}{(z-\zeta)^{n+1} (z-1/\bar{\zeta})^{n+1} (z-c)^2 (z-1/\bar{c})^2}.$$

La frontière L_0 du domaine B_0 a au moins une origine w_0 . Au point $z_0 = f^{*-1}(w_0)$ la dérivée $f^{*'}(z_0) = 0$. Comme la dérivée $w' = f^{*'}(z)$ figure dans l'équation (3.1) au carré, z_0 est une racine double de la fonction $N(z)$. Donc, la frontière L_0 peut avoir tout au plus $n+2$ origines. Par conséquent la frontière est composée tout au plus de $n+2$ arcs analytiques ayant une extrémité commune $w = \infty$.

2. $c \neq 0$, $\zeta = c$. $N(z)$ est alors le quotient d'un polynôme

$$t_0 z^{2n+4} + t_1 z^{2n+3} + \dots + t_{2n+3} z + t_{2n+4}$$

de degré $k \leq 2n+4$ et du polynôme

$$(z-c)^{n+2} (z-1/\bar{c})^{n+2}.$$

Comme précédemment $M(0) = 0$, donc, vu (5.1), $N(z)$ peut être présenté sous la forme

$$(5.3) \quad N(z) = \frac{z(t_1 z^{2n+2} + \dots + t_{2n+3})}{(z-c)^{n+2} (z-1/\bar{c})^{n+2}}.$$

La frontière L_0 a donc l origines, où $1 \leq l \leq n+1$, et elle se compose tout au plus de $n+1$ arcs analytiques passant par le point $w = \infty$.

3. $c = 0$, $\zeta \neq c$. Dans ce cas

$$(5.4) \quad N(z) = \frac{u_1 z^{2n+2} + \dots + u_{2n+2}}{(z-\zeta)^{n+1} (z-1/\bar{\zeta})^{n+1}},$$

où le numérateur est un polynôme de degré tout au plus $2n+2$. La frontière du domaine B_0 a m , $1 \leq m \leq n+1$ origines, donc se compose tout au plus de $n+1$ arcs analytiques ayant une extrémité commune $w = \infty$.

Dans les paragraphes suivants nous allons déterminer le domaine de variabilité de la fonctionnelle

$$(5.5) \quad F(f) = F(f(\zeta), \overline{f(\zeta)}).$$

§ 6. Soit $c = 0$, $\zeta \neq c$.

Dans ce cas on définit $N(z)$ par la formule (5.4), où $n = 0$. Le numérateur est un polynôme du 2^e degré, donc la frontière L_0 est un arc analytique. Désignant l'origine de cet arc par w_0 et posant $z_0 = f^{*-1}(w_0)$, on peut mettre l'équation (3.1) sous la forme

$$(6.1) \quad \frac{w'^2}{w^2} \cdot \frac{\alpha_0 v^2}{w-v} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{p(z-z_0)^2}{(z-\zeta)(z-1/\bar{\zeta})}, \quad |z_0| = 1,$$

où $p \neq 0$. De la condition $w(0) = 0$ on tire

$$(6.2) \quad -\alpha_0 v = p z_0^2 \frac{\bar{\zeta}}{\zeta}.$$

En vertu de (5.1) nous obtenons

$$(6.3) \quad p = \bar{p} \frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \bar{z}_0^2.$$

Multipliant membre à membre les expressions (6.2) et (6.3) nous avons

$$(6.3') \quad \bar{p} = -\alpha_0 v, \quad p = -\bar{\alpha}_0 \bar{v}.$$

Vu (6.2) et (6.3'), l'équation (6.1) est équivalente à l'équation

$$(6.4) \quad \gamma^2 \frac{w'^2}{w^2} \cdot \frac{v}{v-w} = \frac{z_0^2}{z^2} \cdot \frac{(z\bar{z}_0-1)^2}{(z-\zeta)(z-1/\bar{\zeta})},$$

où

$$(6.5) \quad \gamma = (\alpha_0 v / \bar{\alpha}_0 \bar{v})^{1/2}, \quad \operatorname{re} \gamma \geq 0.$$

Dans la suite nous prendrons γ comme paramètre. Il s'exprime, en vertu de (6.5) par α_0 et $\bar{\alpha}_0$. En substituant γ de (6.5) dans (6.3) nous exprimerons z_0 par γ

$$(6.6) \quad z_0 = \varepsilon \gamma \frac{|\zeta|}{\bar{\zeta}}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Intégrons maintenant l'équation (6.4). Soit

$$(6.7) \quad w = tv, \quad u = (1-t)^{1/2},$$

$$(6.8) \quad \xi = (z-\zeta)/(z-1/\bar{\zeta}), \quad s = \xi^{1/2},$$

où $u = u(t)$ et $s = s(\xi)$ sont des fonctions uniformes qui remplissent les conditions $u(0) = 1$ et $s(|\zeta|^2) = |\zeta|$. La transformation (6.8), $w = f^*(z)$ et (6.7) définissent une fonction $u(s)$ qui est holomorphe et univalente dans le cercle $|s| < |\zeta|$. A l'aide des substitutions (6.7) et (6.8) nous donnons à l'équation (6.4) une forme contenant uniquement les variables u et s .

Comme

$$(6.9) \quad \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{du} \cdot \frac{du}{ds} \cdot \frac{ds}{dz},$$

on a

$$\frac{dw}{dz} = \frac{u}{s} (1-s^2)^2 \frac{v\bar{\zeta}}{1-|\zeta|^2} \cdot \frac{du}{ds}.$$

Vu ce qui précède, l'équation (6.4) prend la forme

$$\gamma^2 \frac{1}{(1-u^2)^2} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 = \frac{[(\bar{z}_0 - \bar{\zeta})s^2 + \bar{\zeta}(1 - \zeta\bar{z}_0)]^2}{(1-s^2)^2(s^2 - |\zeta|^2)^2} z_0^2.$$

D'où, en extrayant les racines, nous obtenons l'équation

$$(6.10) \quad \gamma \frac{1}{1-u^2} \cdot \frac{du}{ds} = \eta \frac{(\bar{z}_0 - \bar{\zeta})s^2 + \bar{\zeta}(1 - \zeta\bar{z}_0)}{(1-s^2)(s^2 - |\zeta|^2)} z_0, \quad \eta = \pm 1.$$

On peut présenter le second membre de l'équation (6.10) sous la forme

$$\frac{A}{1-s^2} + \frac{B}{s^2 - |\zeta|^2}.$$

Calculant le résidu de cette fonction, nous avons

$$A = \bar{z}_0, \quad B = \bar{\zeta}.$$

Intégrant l'équation (6.10) nous arrivons à l'équation

$$(6.11) \quad \gamma \log \frac{1+u}{1-u} = \eta \log \frac{1+s}{1-s} + \eta z_0 \frac{\bar{\zeta}}{|\zeta|} \log \frac{|\zeta| - s}{|\zeta| + s},$$

où les branches des logarithmes sont choisies de telle façon que les logarithmes figurant dans (6.11) prennent en même temps la valeur zéro pour $s = 0$ et $u = 0$.

Soit $z \rightarrow 0$. Alors $s \rightarrow |\zeta|$ et $u \rightarrow 1$. Vu (6.6), on a donc $\eta = -\varepsilon$. De (6.11), nous tirons donc la relation

$$(6.12) \quad \gamma \log \frac{du}{ds} \Big|_{s=|\zeta|} = \varepsilon \log \frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|} - \gamma \log |\zeta|.$$

De (6.9) il s'ensuit

$$(6.13) \quad \frac{du}{ds} \Big|_{s=|\zeta|} = \frac{|\zeta|}{v\bar{\zeta}(1-|\zeta|^2)}.$$

En substituant la dérivée du (6.13) à (6.12) nous exprimerons v

$$(6.14) \quad v = \zeta \frac{(1-|\zeta|)^{\delta-1}}{(1+|\zeta|)^{\delta+1}}, \quad \delta = \varepsilon\bar{\gamma}.$$

Nous avons ainsi démontré le

THÉOREME 5. *La frontière du domaine de variabilité de la fonctionnelle (5.5), lorsque $c = 0$ et $\zeta \neq c$, est déterminée par l'équation*

$$\Omega = F(v, \bar{v})$$

où v est défini par (6.14).

Le théorème 5 constitue une généralisation des résultats établis dans les notes [5] et [2].

§ 7. Soit $c \neq 0$ et $\zeta = c$.

Dans ce cas $N(z)$ est déterminé par la formule (5.3), où $n = 0$. Le numérateur est un polynôme du 3^e degré, prenant au point $z = 0$ la valeur zéro. La frontière L_0 du domaine B_0 est par conséquent un arc analytique. Désignant l'origine de cet arc par w_0 et posant $z_0 = f^{*-1}(w_0)$, on peut mettre l'équation (3.1) sous la forme:

$$(7.1) \quad -\frac{w'^2}{w^2} \cdot \frac{a_0 d^2 w}{(w-d)^2} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{pz(z-z_0)^2}{(z-c)^2(z-1/\bar{c})^2}, \quad |z_0| = 1,$$

où $p \neq 0$. De la condition $w(0) = 0$ nous tirons

$$(7.2) \quad -a_0 a_1 = pz_0^2(\bar{c}/c)^2,$$

où $a_1 = f^{*'}(0)$. En vertu de (5.1) nous avons

$$(7.3) \quad p = \bar{p}z_0^2(c/\bar{c})^2.$$

Multipliant membre à membre (7.2) et (7.3) il vient

$$(7.4) \quad \bar{p} = -a_0 a_1, \quad p = -\bar{a}_0 \bar{a}_1.$$

Vu (7.4), l'équation (7.1) est équivalente à l'équation

$$(7.5) \quad \gamma^2 \frac{w'^2}{w} \cdot \frac{d^2}{(w-d)^2} = \frac{a_1 z_0^2}{z} \cdot \frac{(z\bar{z}_0-1)^2}{(z-c)^2(z-1/\bar{c})^2},$$

où

$$(7.6) \quad \gamma = (a_0 a_1 / \bar{a}_0 \bar{a}_1)^{1/2}, \quad \operatorname{re} \gamma \geq 0.$$

De (7.3), en tenant compte de (7.4) et (7.6), nous tirons

$$(7.7) \quad z_0 = \varepsilon \gamma \frac{c}{\bar{c}}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

L'équation (7.5) prendra la forme

$$(7.8) \quad \frac{w'^2}{w} \cdot \frac{d^2}{(w-d)^2} = \frac{c^2}{\bar{c}^2} \cdot \frac{a_1}{z} \cdot \frac{(z\bar{z}_0-1)^2}{(z-c)^2(z-1/\bar{c})^2}.$$

Intégrons à présent l'équation (7.8). Soit

$$(7.9) \quad u = \left(\frac{w}{d}\right)^{1/2}, \quad s = \left(\frac{z}{c}\right)^{1/2},$$

où $u = u(w)$ et $s = s(z)$ sont des fonctions uniformes qui remplissent les conditions $u(d) = 1$ et $s(c) = 1$. Les transformations (7.9) avec $w = f^*(z)$ définissent une fonction $u(s)$ holomorphe et univalente dans le cercle $|s| < 1/|c|^{1/2}$.

A l'aide de la substitution (7.9), nous transformerons l'équation (7.8) à la forme, dans laquelle interviennent uniquement les variables u et s .

Come

$$(7.10) \quad \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{du} \cdot \frac{du}{ds} \cdot \frac{ds}{dz},$$

on a

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d}{c} \cdot \frac{u}{s} \cdot \frac{du}{ds}.$$

Vu ce qui précède, l'équation (7.8) prendra la forme

$$\frac{1}{ca_1} \cdot \frac{1}{(1-u^2)^2} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 = \frac{(c\bar{z}_0s^2-1)^2}{(1-s^2)^2(1-|c|^2s^2)^2}.$$

D'où, en extrayant les racines, nous obtenons l'équation

$$(7.11) \quad \sqrt{\frac{d}{ca_1}} \cdot \frac{1}{1-u^2} \cdot \frac{du}{ds} = \eta \frac{c\bar{z}_0s^2-1}{(1-s^2)(1-|c|^2s^2)}, \quad \eta = \pm 1.$$

On peut présenter le second membre de l'équation (7.11) sous la forme

$$\frac{A}{1-s^2} + \frac{B}{1-|c|^2s^2}.$$

Calculant les résidus de cette fonction, nous avons

$$(7.12) \quad A = \frac{c\bar{z}_0-1}{1-|c|^2}, \quad B = c\bar{z}_0\bar{A}.$$

Intégrant l'équation (7.11) nous arrivons à l'équation

$$(7.13) \quad \sqrt{\frac{d}{ca_1}} \log \frac{1+u}{1-u} = \eta \left[A \log \frac{1+s}{1-s} + \frac{B}{|c|} \log \frac{1+|c|s}{1-|c|s} \right].$$

Les branches des logarithmes yont été choisies de telle façon que les logarithmes figurant dans (7.13) prennent en même temps la valeur zéro pour $s = 0$ et $u = 0$.

De (7.8) nous obtenons, lorsque $z \rightarrow c$,

$$\frac{d}{ca_1} = \frac{(c\bar{z}_0 - 1)^2}{(1 - |c|^2)^2}.$$

Désignant par $(d/ca_1)^{1/2}$ celle des racines du nombre d/ca_1 dont la partie réelle est non négative, nous aurons

$$(7.14) \quad \left(\frac{d}{ca_1} \right)^{1/2} = \lambda \frac{c\bar{z}_0 - 1}{1 - |c|^2},$$

où $\lambda = \pm 1$.

Si $z \rightarrow c$, alors $s \rightarrow 1$ et $u \rightarrow 1$. En vertu de (7.14) nous avons donc, vu (7.12), $\eta = \lambda$. L'équation (7.13) sera donc équivalente à

$$(7.15) \quad A \log \frac{1+u}{1-u} \cdot \frac{1-s}{1+s} = \frac{B}{|c|} \log \frac{1+|c|s}{1-|c|s}.$$

De (7.10), nous tirons

$$\left. \frac{du}{ds} \right|_{s=1} = \frac{c}{d}$$

et de (7.15) nous obtenons

$$A \log \left. \frac{ds}{du} \right|_{s=1} = \frac{B}{|c|} \log \frac{1+|c|}{1-|c|}.$$

Donc

$$(7.16) \quad A \log \frac{d}{c} = \frac{B}{|c|} \log \frac{1+|c|}{1-|c|}.$$

Divisant les deux membres de l'équation (7.16) par A , nous en obtiendrons, vu (7.7) et (7.14), une équation à partir de laquelle nous déterminerons d :

$$(7.17) \quad \log \frac{d}{c} = \beta \log \frac{1+|c|}{1-|c|},$$

où β , $|\beta| = 1$, est un paramètre. Il s'exprime à l'aide de α_0 et $\bar{\alpha}_0$ moyennant l'équation:

$$\beta = \varepsilon \frac{\bar{c}}{c} \cdot \frac{\bar{\alpha}_1}{a_1} \left(\frac{\bar{\alpha}_0 d}{\alpha_0 \bar{d}} \right)^{1/2},$$

où $\varepsilon = \pm 1$ et $\left(\frac{\bar{\alpha}_0 d}{\alpha_0 \bar{d}}\right)^{1/2}$ désigne une racine du nombre $\frac{\bar{\alpha}_0 d}{\alpha_0 \bar{d}}$ dont la partie réelle est non négative. Moyennant (7.17) nous exprimons d . Nous obtenons ainsi

$$(7.18) \quad d = c \left(\frac{1+|c|}{1-|c|} \right)^{\beta}.$$

Nous avons donc le

THÉORÈME 6. *La frontière du domaine de variabilité de la fonctionnelle (5.5), lorsque $c \neq 0$ et $\zeta = c$ est déterminée par l'équation*

$$\Omega = F(d, \bar{d}),$$

où d est défini par (7.18).

De (7.18) résulte directement la conclusion:

CONCLUSION. *Si la fonction*

$$f(z) = b_0 + b_1(z-c) + b_2(z-c)^2 + \dots$$

appartient à la classe S_c , alors

$$(7.19) \quad |c| \frac{1-|c|}{1+|c|} \leq |b_0| \leq |c| \frac{1+|c|}{1-|c|}$$

et

$$(7.20) \quad \left| \arg \frac{b_0}{c} \right| \leq \log \frac{1+|c|}{1-|c|}.$$

L'égalité a lieu dans (7.19) et (7.20) pour les fonctions

$$f_a(z) = \frac{(1-ce^{ia})^3}{1+ce^{ia}} \cdot \frac{z}{(1-e^{ia}z)^2}$$

respectivement pour $a = -\arg c + \pi$ et $a = -\arg c$, où $-\pi < \arg c \leq \pi$.

§ 8. Soit $c \neq 0$ et $\zeta \neq c$.

Dans ce cas $N(z)$ est déterminé par la formule (5.2), où $n = 0$. Le numérateur est un polynôme tout au plus du 5^e degré, prenant au point $z = 0$ la valeur zéro. La frontière L_0 se compose donc tout au plus de deux arcs analytiques, ayant une extrémité commune $w^* = \infty$. Ainsi, la frontière L_0 a une seule origine w_0 ou bien deux origines. Dans ce cas désignons par w_0 l'une quelconque de ces origines.

Soit $z_0 = f^{*-1}(w_0)$. On peut donc mettre l'équation (3.1) sous la forme

$$(8.1) \quad \alpha_0 v w \frac{(v-2d)w+d^2}{(w-v)(w-\bar{d})^2} \cdot \frac{w'^2}{w^2} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{z(z-z_0)^2(pz^2+qz+r)}{(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5)^2(z-z_6)^2},$$

où $z_3 = \zeta$, $z_4 = 1/\bar{\zeta}$, $z_5 = c$, $z_6 = 1/\bar{c}$, et p , q et r sont des nombres tels que, où $|p|^2 + |q|^2 + |r|^2 > 0$. Le nombre p est différent de zéro.

Supposant le contraire, nous aurions alors en vertu de (5.1) $r = 0$. Dans ce cas le second membre de (8.1) prendrait au point $z = 0$ une valeur finie, tandis que le membre gauche serait égal à ∞ . Donc $p \neq 0$ et l'équation (8.1) peut être présentée sous forme

$$(8.2) \quad \alpha_0 v w \frac{(v-2d)w+d^2}{(w-v)(w-d)^2} \cdot \frac{w'^2}{w^2} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{pz(z-z_0)^2 L_2(z)}{(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5)^2(z-z_6)^2},$$

où $L_2(z)$ est un polynôme du 2^e degré; en outre $\frac{1}{2}L_2''(0) = 1$.

Nous démontrerons le

THÉOREME 7. I. *Il existe des nombres z_1 et z_2 , $0 < |z_1| \leq 1$, $|z_2| \geq 1$, tels que l'équation (8.2) prend l'une des formes suivantes:*

Si $v \neq 2d$

$$(A) \quad kw \frac{w-\tilde{w}}{(w-v)(w-d)^2} \cdot \frac{w'^2}{w^2} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{pz(z-z_0)^2(z-z_1)(z-z_2)}{(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5)^2(z-z_6)^2},$$

où $0 < |z_1| < 1$, $z_2 = 1/\bar{z}_1$, ou bien

$$(B) \quad kw \frac{w-\tilde{w}}{(w-v)(w-d)^2} \cdot \frac{w'^2}{w^2} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{pz(z-z_0)^2(z-z_1)(z-z_2)}{(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5)^2(z-z_6)^2},$$

où $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$, $z_1 \neq z_2$, ou bien

$$(C) \quad kw \frac{w-\tilde{w}}{(w-v)(w-d)^2} \cdot \frac{w'^2}{w^2} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{pz(z-z_0)^2(z-z_1)^2}{(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5)^2(z-z_6)^2},$$

où $|z_1| = 1$, $z_1 \neq z_0$, ou enfin

$$(D) \quad kw \frac{w-\tilde{w}}{(w-v)(w-d)^2} \cdot \frac{w'^2}{w^2} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{pz(z-z_0)^4}{(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5)^2(z-z_6)^2};$$

$$k = \alpha_0 v(v-2d), \quad \tilde{w} = \frac{d^2}{2d-v}.$$

Si $v = 2d$, l'équation (8.1) est de la forme

$$(E) \quad \frac{lw}{(w-v)(w-d)^2} \cdot \frac{w'^2}{w^2} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{pz(z-z_0)^2(z-z_1)^2}{(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5)^2(z-z_6)^2};$$

où $|z_1| = 1$, $z_1 \neq z_0$, ou bien

$$(F) \quad \frac{lw}{(w-v)(w-d)^2} \cdot \frac{w'^2}{w^2} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{pz(z-z_0)^4}{(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5)^2(z-z_6)^2};$$

$$l = \alpha_0 v d^2.$$

II. *La frontière du domaine B_0 , en lequel les fonctions frontales transforment le cercle $|z| < 1$, est 1^o un arc analytiques ou 2^o un arc analytique par intervalles, composé de deux arcs analytiques, formant les angles $2\pi/3$ et $4\pi/3$ ou, 3^o un arc analytique par intervalles, composé de 3 arcs analytiques formant des angles égaux ou 4^o deux arcs analytiques d'extrémité au point $w^* = \infty$.*

Dans le premier cas l'équation (3.1) prend l'une des formes: (A), (B), (D) ou (F), dans le second et le troisième — (C) et dans le dernier — la forme (E).

Démonstration. En premier lieu remarquons que les nombres 0, ζ et c ne peuvent être racines du polynôme $Q(z) \equiv pz^2 + qz + r$. Supposant que $Q(0) = 0$ nous aurions $r = 0$, d'où $p = 0$; or nous savons que c'est impossible. Si $Q(\zeta) = 0$, alors également $Q(1/\bar{\zeta}) = 0$, donc le second membre (8.2) prendrait au point ζ une valeur finie, tandis que le premier membre serait égal à ∞ . Pareillement, l'hypothèse $Q(c) = 0$ mène aussi à une contradiction.

Désignons par z_1 et z_2 les racines du polynôme $L_2(z)$. Étudions successivement tous les cas possible à priori et, en même temps, les cas qui s'excluent mutuellement, suivant les valeurs z_1 et z_2 ($z_m \neq 0$, $z_m \neq \zeta$, $z_m \neq c$, $m = 1, 2$).

1. $z_1 \neq z_2$ et $|z_1| < 1$. Vu (5.1), on a $z_2 = 1/\bar{z}_1$. Comme $z_1 \neq 0$ et $|z_1| < 1$, il existe pour $v \neq 2d$ un point $\hat{w}$, $\hat{w} \neq 0$, $\hat{w} \in B_0$, tel que $\hat{w} = f^*(z_1)$. Comme $w'(z_1) \neq 0$, en tenant compte de $L_2(z_1) = 0$, nous obtenons $M(\hat{w}) = 0$. L'unique racine non nulle de la fonction $M(w)$, lorsque $v \neq 2d$, étant le nombre $\tilde{w}$, on a $\hat{w} = \tilde{w}$. L'équation (8.2) peut donc avoir la forme (A). La frontière L_0 est dans ce cas un arc analytique.

Si $v = 2d$, alors $M(w) \neq 0$ pour $w \neq 0$, donc $L_2(z)$ ne se décompose pas en facteurs $(z - z_1)(z - z_2)$, où $z_1 \neq z_2$ et $|z_1| < 1$.

2. $z_1 \neq z_2$, $|z_1| = 1$. Dans ce cas $|z_2| = 1$, sinon le nombre $z'_2 = 1/\bar{z}_2$ serait également une racine du polynôme $L_2(z)$, ce qui est impossible. Les cas suivants peuvent se présenter:

a. z_1 et z_2 sont des points réguliers de la fonction $f^*(z)$. z_1 et z_2 sont des racines simples de la fonction $N(z)$, donc $w'^2(z_1) \neq 0$ et $w'^2(z_2) \neq 0$. Comme $|z_1| = |z_2| = 1$, il existe pour $v \neq 2d$ un point $\hat{w}$, $\hat{w} \neq 0$, $\hat{w} \in L_0$ tel que $\hat{w} = f^*(z_1) = f^*(z_2)$. L'unique racine de la fonction $M(w)$ non nulle, lorsque $v \neq 2d$, étant le nombre $\tilde{w}$, on a $\hat{w} = \tilde{w}$. L'équation (8.2) peut donc prendre la forme (B). La frontière L_0 du domaine B_0 est dans ce cas un arc analytique. Si $v = 2d$, le polynôme $L_2(z)$ ne peut pas avoir de racines distinctes de modules égaux à 1, car $M(w) = 0$ seulement lorsque $w = 0$.

b. z_1 et z_2 sont des points algébriques de ramification de la fonction $f^*(z)$. Comme dans le cas précédent, on prouve qu'il existe un point $\hat{w}$, $\hat{w} \neq 0$, $\hat{w} \in L_0$ tel que $\hat{w} = f^*(z_1) = f^*(z_2)$. Étant donné que $z_1 \neq z_2$, donc la frontière L_0 a une seule origine. Par hypothèse la dérivée de la fonction $f^*(z)$ n'existe pas aux points z_1 et z_2 , donc le point $\hat{w}$, $\hat{w} \neq \infty$, est l'extrémité de deux arcs analytiques $L_0^{(1)}$ et $L_0^{(2)}$ qui forment la frontière L_0 . Soient γ_1 , et γ_2 , où $\gamma_1 + \gamma_2 = 2\pi$, les mesures des angles entre les arcs $L_0^{(1)}$ et $L_0^{(2)}$, $K(0, 1)$ et $K(z_m, \varrho)$ et $K^*(0, 1)$ et $K^*(z_m, \varrho)$ — respectivement

les cercles et les circonférences de centres $z = 0$ et $z = z_m$ et de rayons $r = 1$ et $r = \varrho$, où $0 < \varrho < |z_m - z_0|$, $m = 1, 2$.

Posons

$$G_{m\varrho} = K(0, 1) \cap K(z_m, \varrho), \\ C_m = K(0, 1) \cap K^*(z_m, \varrho)$$

et désignons par z'_m et z''_m les points d'intersection de l'arc C_m avec la circonférence $K^*(0, 1)$. Posons, en outre $w'_m = f^*(z'_m)$, $w''_m = f^*(z''_m)$ et soient $L_{0m}^{(1)}$ et $L_{0m}^{(2)}$ des arcs partiels des arcs $L_0^{(1)}$ et $L_0^{(2)}$, déterminés respectivement par les points w'_m et $\hat{w}$ et $\hat{w}$ et w''_m . La fonction $f^*(z)$ transforme d'une façon univalente le domaine $G_{m\varrho}$ en un domaine $B_0^{(m)}$, borné par les arcs $L_{0m}^{(1)}$, $L_{0m}^{(2)}$ et L_m , où $L_m = f^*(C_m)$, et la fonction de la forme

$$\xi(w) = (w - \hat{w})^{\pi/\gamma_m}$$

(où l'on a pris la branche principale de la puissance) transforme d'une façon univalente le domaine $B_0^{(m)}$ en un domaine $D_0^{(m)}$ du demi-plan $\text{im } \xi > 0$, dont la frontière contient un segment correspondant de l'axe réel. D'après qui précède, la fonction composée

$$(8.3) \quad \xi(f^*(z)) = (f^*(z) - \hat{w})^{\pi/\gamma_m}$$

transforme d'une façon univalente le domaine $G_{m\varrho}$ en un domaine $D_0^{(m)}$. En appliquant au domaine $G_{m\varrho}$ et à la fonction (8.3) le principe de la symétrie, on peut prolonger analytiquement cette fonction sur un certain entourage du point z_m et la développer dans cet entourage en série entière:

$$(f^*(z) - \hat{w})^{\pi/\gamma_m} = c_{m1}(z - z_m) + \dots, \quad \text{où } c_{m1} \neq 0.$$

Donc

$$(8.4) \quad f^*(z) = \hat{w} + [\xi(f^*(z))]^{\gamma_m/\pi} = \hat{w} + (z - z_m)^{\gamma_m/\pi} [d_{m1} + d_{m2}(z - z_m) + \dots],$$

où $d_{m1} \neq 0$.

Dérivant (8.4) nous obtiendrons

$$(8.5) \quad f^{*'}(z) = (z - z_m)^{\gamma_m/\pi - 1} [e_{m1} + e_{m2}(z - z_m) + \dots],$$

où $e_{m1} \neq 0$.

En vertu de (8.4) et (8.5) l'équation (8.2) prendra dans l'entourage du point z_m la forme suivante

$$(8.6) \quad k_0 \{s \hat{w} + d^2 + s d_{m1}(z - z_m)^{\gamma_m/\pi} [1 + O(z - z_m)]\} (z - z_m)^{2\gamma_m/\pi - 3} \\ = \frac{p(z - z_0)^2(z - z_n)}{R(z)},$$

où $k_0 \neq 0$, $s = v - 2d$, $n = 1, 2$, $n \neq m$, $R(z) = z(z - z_3)(z - z_4)(z - z_5)^2 \times \times (z - z_6)^2$.

Le premier membre de l'équation (8.6) est différent de zéro au point $z = z_m$, par conséquent il en est de même du second: il doit être différent de zéro au point z_m .

Donc: 1° $2\gamma_m/\pi - 3 = 0$ ou bien 2° $s\hat{w} + d^2 = 0$ et $3\gamma_m/\pi - 3 = 0$. Dans le premier cas nous obtenons $\gamma_1 = 3\pi/2$ et $\gamma_2 = 3\pi/2$, ce qui est impossible. Dans le second cas la première condition donne $\hat{w} = \tilde{w}$, la seconde $\gamma_1 = \gamma_2 = \pi$, par conséquent la frontière L_0 est, contrairement à l'hypothèse, un arc analytique au point $\tilde{w}$. Dans cette situation le cas 2b ne peut avoir lieu.

3. $z_2 = z_1$, $z_1 \neq z_0$. Si les racines z_1 et z_2 avaient des modules différents de 1, alors, en vertu de (5.1), le polynôme $L_2(z)$ aurait encore une racine, ce qui n'est pas possible. Donc $|z_1| = |z_2| = 1$. A priori les cas suivants sont possibles:

a. z_1 est un point régulier de la fonction $f^*(z)$. Etant donné qu'au point z_1 la dérivée de la fonction $f^*(z)$ existe et que z_1 est une racine double de la fonction $N(z)$, on a $f^*(z_1) = 0$. Soit $w_1 = f^*(z_1)$. La fonction $f^*(z)$ se développe dans un certain entourage du point z_1 en une série entière de la forme

$$(8.7) \quad f^*(z) = w_1 + (z - z_1)^2 [g_1 + g_2(z - z_1) + \dots], \quad \text{où } g_1 \neq 0,$$

donc

$$(8.8) \quad f^{*'}(z) = (z - z_1) [h_1 + h_2(z - z_1) + \dots], \quad \text{où } h_1 \neq 0.$$

En vertu de (8.7) et (8.8) l'équation (8.2) prendra dans l'entourage du point z_1 la forme suivante

$$(8.9) \quad k_1 [sw_1 + d^2 + sg_1 O((z - z_1)^2)] = \frac{p(z - z_0)^2}{R(z)}, \quad k_1 \neq 0.$$

Comme le premier membre (8.9) est différent de zéro pour $z = z_1$ on a: 1° $s = 0$, ou bien 2° $s \neq 0$ et $sw_1 + d^2 \neq 0$. Dans le premier cas $v = 2d$ et l'équation (8.2) prend la forme (E). La frontière L_0 se compose alors de deux arcs analytiques qui passent par le point $w = \infty$. Dans le second cas on a $\tilde{w} \neq w_1$. Démontrons qu'on a également $\tilde{w} \neq w_0$. Dans ce but développons la fonction $f^*(z)$ et sa dérivée $f^{*'}(z)$ en séries entières dans un certain entourage du point z_0 . Nous aurons

$$(8.10) \quad f^*(z) = w_0 + (z - z_0)^2 [q_1 + O(z - z_0)],$$

et

$$(8.11) \quad f^{*'}(z) = (z - z_0) [t_1 + O(z - z_0)],$$

où $q_1 \neq 0$ et $t_1 \neq 0$.

Vu (8.10) et (8.11), on peut présenter l'équation (8.2) dans l'entourage du point z_0 sous la forme

$$(8.12) \quad k_2 [w_0 - \tilde{w} + O((z - z_0)^2)] = \frac{p(z - z_1)^2}{R(z)},$$

où $k_2 \neq 0$. Pour $z = z_0$ le second membre de l'équation (8.12) est différent de zéro, donc il en est de même du premier membre, ce qui est possible uniquement dans le cas où $\tilde{w} \neq w_0$.

Comme $\tilde{w} \neq w_1$ et $\tilde{w} \neq w_0$, $\tilde{w}$ est un point intérieur de la frontière L_0 . Distinguons les cas suivants:

α . La frontière L_0 est analytique au point $\tilde{w}$. Dans ce cas $f^{*-1}(f^{*-1}(w)) \neq 0$, donc la condition $M(\tilde{w}) = 0$ entraîne $\tilde{w} = w_1$ ou bien $\tilde{w} = w_0$, ce qui n'est pas possible.

β . La frontière L_0 n'est pas analytique au point $\tilde{w}$. En vertu de l'hypothèse sus-mentionnée et du fait que dans le cas 3a la frontière L_0 a deux origines, le point $\tilde{w}$ est l'extrémité des trois arcs $L_0^{(1)}$, $L_0^{(2)}$ et $L_0^{(3)}$. Désignons par γ_k ($k = 1, 2, 3$) l'angle entre les arcs $L_0^{(k+1)}$ et $L_0^{(k+2)}$ ($L_0^{(4)} \equiv L_0^{(1)}$, $L_0^{(5)} \equiv L_0^{(2)}$).

Soient $z^{(m)}$ ($m = 1, 2, 3$) les points de la circonférence $|z| = 1$, pour lesquels $f^*(z^{(m)}) = \tilde{w}$. Procédant d'une façon analogue au cas 2b nous aurons l'équation

$$k_3[1 + O((z - z^{(m)}))]^{\gamma_m/\pi} (z - z^{(m)})^{3\gamma_m/\pi - 2} = \frac{p(z - z_0)^2(z - z_1)^2}{R(z)},$$

où $k_3 \neq 0$. D'où $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 2\pi/3$. L'équation (8.2) peut donc avoir la forme (C). Dans ce cas la frontière du domaine B_0 se compose de 3 arcs analytiques ayant une extrémité commune $\tilde{w} \neq \infty$. Ces arcs forment entre eux des angles égaux.

b . z_1 est un point algébrique de ramification de la fonction $f^*(z)$. Soit $w_1 = f^*(z_1)$. En vertu de l'hypothèse, la frontière L_0 possède maintenant une seule origine. Etant donné que la dérivée $f'(z)$ n'existe pas au point z_1 , $w_1 \neq \infty$ est l'extrémité de deux arcs analytiques $L_0^{(1)}$ et $L_0^{(2)}$ qui forment la frontière L_0 . Désignons, comme dans le cas 2b, par γ_1 et γ_2 ($\gamma_1 + \gamma_2 = 2\pi$) les mesures des angles que forment entre eux les arcs $L_0^{(1)}$ et $L_0^{(2)}$ et soit z^* , $z^* \neq z_1$, le point de la circonférence $|z| = 1$ pour lequel $f^*(z^*) = w_1$. Procédant d'une façon analogue au cas 2b, nous aurons les équations:

$$(8.13) \quad k_4\{sw_1 + d^2 + sc_1(z - z_1)^{\gamma_1/\pi}[1 + O(z - z_1)]\}(z - z_1)^{2\gamma_1/\pi - 4} = \frac{p(z - z_0)^2}{R(z)}$$

et

$$(8.14) \quad k_5\{sw_1 + d^2 + sd_1(z - z^*)^{\gamma_2/\pi}[1 + O(z - z^*)]\}(z - z^*)^{2\gamma_2/\pi - 2} = \frac{p(z - z_0)^2(z - z_1)^2}{R(z)},$$

où $k_4 \neq 0$, $k_5 \neq 0$, $c_1 \neq 0$ et $d_1 \neq 0$.

Si $s \neq 0$, et par suite $v \neq 2d$, alors de (8.13) et (8.14) nous obtiendrons $\gamma_1 = 4\pi/3$ et $\gamma_2 = 2\pi/3$. L'équation (8.2) peut donc avoir la forme (C).

La frontière du domaine B_0 se compose de 2 arcs analytiques qui forment au point $\tilde{w}$ les angles $4\pi/3$ et $2\pi/3$.

Si $s = 0$, alors nous obtenons $\gamma_1 = 2\pi$, ce qui n'est pas possible.

4. $z_2 = z_1 = z_0$. L'équation (8.2) prend donc, en vertu de l'hypothèse, sus-mentionnée, la forme (D), dans le cas où $v \neq 2d$. Lorsque $v = 2d$, nous obtenons l'équation (F). Dans les deux cas la frontière L_0 est un arcs analytique. Lorsque $v \neq 2d$, le point $\tilde{w}$ est l'origine de l'arc L_0 .

§ 9. Entre les paramètres figurant dans l'équation (8.2) il existe certaines relations. Nous les obtiendrons en analysant cette équation dans l'entourage des points $z = 0$, $z = z_3$ et $z = z_5$.

Remarquons tout d'abord que les équations (A)-(F) peuvent être mises sous la forme

$$(9.1) \quad \alpha_0 v \frac{(v-2d)w+d^2}{(w-v)(w-d)^2} \cdot \frac{w}{z} \left(\frac{zw'}{w^2} \right)^2 = p \frac{(z-z_0)^2(z-z_1)(z-z_2)}{(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5)^2(z-z_6)^2}.$$

où $|z_1| \leq 1$ et $|z_2| \geq 1$ ($|z_1| < 1$ et $|z_2| = |1/\bar{z}_1| > 1$ ou bien $|z_1| = |z_2| = 1$), $p \neq 0$.

De la condition $w(0) = 0$ nous tirons

$$(9.2) \quad -\alpha_0 a_1 = p \frac{z_0^2 z_1 z_2}{z_3 z_4 z_5^2 z_6^2},$$

où $a_1 = f^{*'}(0)$.

En vertu de (5.1) nous avons

$$(9.3) \quad p z_0^2 z_1 z_2 = \bar{p} z_3 z_4 z_5^2 z_6^2.$$

Multipliant membre à membre les équations (9.2) et (9.3) nous obtenons

$$(9.4) \quad \bar{p} = -\alpha_0 a_1, \quad p = -\bar{\alpha}_0 \bar{a}_1,$$

donc l'équation (9.1) prendra la forme

$$(9.5) \quad -\frac{\bar{p}v}{p a_1} \cdot \frac{(v-2d)w+d^2}{(w-v)(w-d)^2} \cdot \frac{w}{z} \left(\frac{zw'}{w} \right)^2 = \frac{(z-z_0)^2(z-z_1)(z-z_2)}{(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5)^2(z-z_6)^2}.$$

Soit $z \rightarrow z_3$, alors $w \rightarrow v$ et $w' \rightarrow v'$, donc (9.1) entraîne

$$(9.6) \quad -\frac{\bar{p}v'z_3}{p a_1} = \frac{(z_3-z_0)^2(z_3-z_1)(z_3-z_2)}{(z_3-z_4)(z_3-z_5)^2(z_3-z_6)^2}.$$

Lorsque $z \rightarrow z_5$, alors $w \rightarrow d$ et $w' \rightarrow 1$, et (9.1) entraîne encore une relation entre les paramètres:

$$(9.7) \quad \frac{\bar{p}vz_5}{p a_1} = \frac{(z_5-z_0)^2(z_5-z_1)(z_5-z_2)}{(z_5-z_3)(z_5-z_4)(z_5-z_6)^2}.$$

Posons

$$(9.8) \quad \varrho_0 = |z_3|, \quad q_0 = z_3 \bar{z}_0 / \varrho_0,$$

$$(9.9) \quad r_0 = |z_5|, \quad s_0 = z_5 \bar{z}_0 / r_0.$$

Remarquons que des formules (9.8) et (9.9) résulte l'identité

$$(9.10) \quad z_3/\varrho_0 q_0 = z_5/r_0 s_0,$$

et que, en outre, $|q_0| = |s_0| = 1$.

Profitant des notations introduites et de l'identité (9.10) nous aurons

$$z_3 - z_4 = (\varrho_0^2 - 1)/\bar{z}_3, \quad z_3 - z_5 = z_3(\varrho_0 q_0 - r_0 s_0)/\varrho_0 q_0, \quad z_3 - z_6 = \varrho_0(\varrho_0 r_0 q_0 - s_0)/\bar{z}_3 r_0 q_0$$

et

$$z_5 - z_4 = (\varrho_0 r_0 s_0 - q_0)/\bar{z}_3 q_0, \quad z_5 - z_6 = (r_0^2 - 1)/\bar{z}_5.$$

Donc les équations (9.6) et (9.7) peuvent être mises respectivement sous la forme

$$(9.10') \quad -\frac{\bar{p}v'}{pa_1} \varrho_0^2 = \bar{z}_0^2 \bar{z}_3^2 r_0^2 \frac{(\varrho_0 q_0 - 1)^2 (z_3 - z_1)(z_3 - z_2)}{(\varrho_0^2 - 1)(\varrho_0 q_0 - r_0 s_0)^2 (\varrho_0 r_0 q_0 - s_0)^2}$$

et

$$(9.11) \quad \frac{\bar{p}v}{pa_1} \varrho_0 = \bar{z}_0 \bar{z}_5^2 r_0 \bar{s}_0 \frac{(r_0 s_0 - 1)^2 (z_5 - z_1)(z_5 - z_2)}{(r_0^2 - 1)^2 (r_0 s_0 - \varrho_0 q_0)(\varrho_0 r_0 s_0 - q_0)}.$$

Au moyen de l'équation (9.3) nous déterminerons le produit $z_1 z_2$:

$$z_1 z_2 = \frac{\bar{p}}{p} \bar{z}_0^2 z_3 z_4 z_5^2 z_6^2.$$

Comme

$$z_3 z_4 = z_0^2 q_0^2, \quad z_5 z_6 = z_0^2 s_0^2,$$

on a

$$(9.12) \quad z_1 z_2 = \frac{\bar{p}}{p} z_0^4 q_0^2 s_0^4.$$

Dans ce cas

$$(9.13) \quad (z_3 - z_1)(z_3 - z_2) = z_3^2 - (z_1 + z_2)z_3 + \frac{\bar{p}}{p} z_0^4 q_0^2 s_0^4.$$

Le produit $(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)$ peut être exprimé moyennant l'équation (9.10') par la formule

$$(9.14) \quad (z_3 - z_1)(z_3 - z_2) = -\frac{\bar{p}v'}{pa_1} \cdot \frac{\varrho_0^2 z_0^2 z_4^2}{r_0^2} \cdot \frac{(\varrho_0^2 - 1)(\varrho_0 q_0 - r_0 s_0)^2 (\varrho_0 q_0 r_0 - s_0)^2}{(\varrho_0 q_0 - 1)^2}.$$

En comparant les seconds membres de (9.13) et (9.14), nous obtenons l'équation

$$-\frac{\bar{p}v'}{pa_1} \cdot \frac{\varrho_0^2 z_0^2 z_4^2}{r_0^2} \cdot \frac{(\varrho_0^2 - 1)(\varrho_0 q_0 - r_0 s_0)^2 (\varrho_0 q_0 r_0 - s_0)^2}{(\varrho_0 q_0 - 1)^2} = z_3^2 - (z_1 + z_2)z_3 + \frac{\bar{p}}{p} z_0^4 q_0^2 s_0^4.$$

D'où

$$(9.15) \quad z_1 + z_2 = z_3 + \frac{\bar{p}}{p} \left[\frac{z_0^3 q_0 s_0^4}{\varrho_0} + \frac{v'}{a_1} \cdot \frac{z_0^2 z_4}{r_0^2} \cdot \frac{(\varrho_0^2 - 1)(\varrho_0 q_0 - r_0 s_0)^2 (\varrho_0 q_0 r_0 - s_0)^2}{(\varrho_0 q_0 - 1)^2} \right].$$

Si $|z_1| < 1$, alors $z_2 = 1/\bar{z}_1$. Dans ce cas $z_1 z_2 = e^{2i \arg z_1}$, $z_1 + z_2 = (|z_1| + 1/|z_1|) e^{i \arg z_1}$ et $\bar{z}_1 + z_2 = (|z_1| + 1/|z_1|) e^{-i \arg z_1}$. Lorsque $|z_1| = 1$, on a $|z_2| = 1$. Alors $\bar{z}_1 + z_2 = 1/z_1 + 1/z_2$, donc dans les deux cas il y a identité:

$$(9.16) \quad z_1 z_2 = \frac{z_1 + z_2}{\bar{z}_1 + z_2}.$$

En comparant les seconds membres des égalités (9.12) et (9.16) nous aurons la relation

$$(9.17) \quad p \bar{z}_0^2 \bar{q}_0 \bar{s}_0^2 (z_1 + z_2) = \bar{p} z_0^2 q_0 s_0^2 (\bar{z}_1 + z_2).$$

En substituant dans (9.17) au lieu de $z_1 + z_2$ l'expression (9.15), nous obtiendrons l'équation

$$\begin{aligned} p \bar{z}_0^2 \bar{q}_0 \bar{s}_0^2 \left\{ z_3 + \frac{\bar{p}}{p} \left[\frac{z_0^3 q_0 s_0^4}{\varrho_0} + \frac{v'}{a_1} \cdot \frac{z_0^2 z_4}{r_0^2} \cdot \frac{(\varrho_0^2 - 1)(\varrho_0 q_0 - r_0 s_0)^2 (\varrho_0 q_0 r_0 - s_0)^2}{(\varrho_0 q_0 - 1)^2} \right] \right\} \\ = \bar{p} z_0^2 q_0 s_0^2 \left\{ \bar{z}_3 + \frac{\bar{p}}{p} \left[\frac{\bar{z}_0^3 \bar{q}_0 \bar{s}_0^4}{\varrho_0} + \frac{\bar{v}'}{\bar{a}_1} \cdot \frac{\bar{z}_0^2 \bar{z}_4}{r_0^2} \cdot \frac{(\varrho_0^2 - 1)(\varrho_0 \bar{q}_0 - r_0 \bar{s}_0)^2 (\varrho_0 \bar{q}_0 r_0 - \bar{s}_0)^2}{(\varrho_0 \bar{q}_0 - 1)^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

De là, après quelques transformations nous aurons

$$(9.18) \quad p \varrho_0 \bar{z}_0 \bar{s}_0^2 + \bar{p} \frac{z_0 s_0^2}{\varrho_0} + \bar{p} \frac{v'}{a_1} \cdot \frac{z_0 \bar{s}_0^2}{r_0^2 \varrho_0} X = \bar{p} \varrho_0 z_0 s_0^2 + p \frac{\bar{z}_0 \bar{s}_0^2}{\varrho_0} + p \frac{\bar{v}'}{a_1} \cdot \frac{\bar{z}_0 s_0^2}{r_0^2 \varrho_0} \bar{X},$$

où

$$X = \frac{(\varrho_0^2 - 1)(\varrho_0 q_0 - r_0 s_0)^2 (\varrho_0 q_0 r_0 - s_0)^2}{(\varrho_0 q_0 - 1)^2}.$$

En rassemblant les termes qui contiennent respectivement les facteurs p et $\bar{p}$, nous obtiendrons

$$p \bar{z}_0 \left[\varrho_0 \bar{s}_0^2 - \frac{\bar{s}_0^2}{\varrho_0} - \frac{\bar{v}'}{\bar{a}_1} \cdot \frac{s_0^2}{r_0^2 \varrho_0} \bar{X} \right] = \bar{p} z_0 \left[\varrho_0 s_0^2 - \frac{s_0^2}{\varrho_0} - \frac{v'}{a_1} \cdot \frac{\bar{s}_0^2}{r_0^2 \varrho_0} X \right].$$

Après multiplication des deux membres de la dernière équation par la fraction $r_0^2 \varrho_0 / (\varrho_0^2 - 1)$, cette équation prendra définitivement la forme

$$(9.19) \quad p q_0 \bar{z}_3 (r_0^2 \bar{s}_0^2 - s_0^2 \bar{Y}) = \bar{p} \bar{q}_0 z_3 (r_0^2 s_0^2 - \bar{s}_0^2 Y),$$

où

$$(9.20) \quad Y = \frac{v'}{a_1} \left[\frac{(\varrho_0 q_0 - r_0 s_0)(\varrho_0 q_0 r_0 - s_0)^2}{\varrho_0 q_0 - 1} \right].$$

Si nous exprimons le produit $(z_5 - z_1)(z_5 - z_3)$ à partir de l'équation (9.11) et tenons compte de l'égalité

$$(z_5 - z_1)(z_5 - z_2) = z_5^2 - (z_1 + z_2)z_5 + \frac{\bar{p}}{p} z_0^4 q_0^2 s_0^4,$$

nous obtiendrons la relation

$$(9.21) \quad z_1 + z_2 = z_5 + \frac{\bar{p}}{p} \left[\frac{z_0^3 q_0^2 s_0^3}{r_0} - \frac{v}{a_1} \cdot \frac{q_0 s_0 z_0 z_5}{r_0^3} X_1 \right],$$

où

$$X_1 = \frac{(r_0^2 - 1)^2 (r_0 s_0 - q_0 q_0) (r_0 s_0 q_0 - q_0)}{(r_0 s_0 - 1)^2}.$$

Substituant dans (9.17) au lieu de $z_1 + z_2$ l'expression (9.21) nous obtiendrons, après transformations, l'équation

$$(9.21') \quad p(\bar{z}_5 \bar{q}_0 q_0 + q_0 \bar{Z}) = \bar{p}(z_5 q_0 q_0 + \bar{q}_0 Z),$$

où

$$(9.22) \quad Z = \frac{v}{a_1} \cdot \frac{(r_0 s_0 - q_0 q_0) (r_0 s_0 q_0 - q_0) (r_0^2 - 1)}{(r_0 s_0 - 1)^2}.$$

Les formules (9.19) et (9.21') serviront à exprimer l'équation de la frontière Γ du domaine des valeurs de la fonctionnelle étudiée.

§ 10. Les équations (6.11) et (7.11), obtenues comme résultat de l'intégration des équations (6.1) et (7.1), ont servi à déterminer la frontière du domaine des valeurs de la fonctionnelle analysée. Dans le cas étudié, lorsque $c \neq 0$ et $\zeta \neq c$, nous obtiendrons l'équation de la frontière Γ d'une façon différente, en combinant la méthode de la représentation paramétrique d'une certaine famille de fonctions univalentes ([7]) à la méthode des variations, en l'appliquant à la famille de fonctions correspondante. Les recherches dans cette direction ont été initiées par P. P. Kufareff ([6]) et sont actuellement développées surtout par I. A. Aleksandroff (voir p. ex. [1]).

Soit $w = f(z)$, $f(0)$, $f'(0) > 0$, une fonction holomorphe et univalente dans le cercle $|z| < 1$, transformant ce cercle en un domaine B_0 , obtenu en éliminant du plan (w) l'arc de Jordan L_0 d'équation $w = w(t^*)$, où $0 \leq t^* \leq \infty$, et $w(\infty) = \infty$. Pour $t \geq 0$ fixé, étudions le domaine B_t , dont la frontière est l'arc $L_t \subset L_0$, d'équation $w = w(t^*)$, $t \leq t^* \leq \infty$, et désignons par $g(z, t)$, $g(0, t) = 0$, $g'_z(0, t) > 0$, la fonction transformant d'une façon univalente le cercle $|z| < 1$ en le domaine B_t . Conformément à la définition de la fonction $g(z, t)$ et du domaine B_t on a $g(z, 0) = f(z)$. La dérivée $g'_z(0, t)$ est une fonction croissante de la variable t (voir [7]), donc en modifiant, en cas de nécessité, la paramétrisation de l'arc L_t , on peut admettre que $g'_z(0, t) = a_1 \cdot e^t$, où $a_1 = f'(0)$.

Comme la fonction $w = g(z, t)$ appartient à la famille $\tilde{S}$ (voir p. 172), il y a lieu d'appliquer à cette fonction la formule des variations (2.5). En remplaçant dans (2.5) $f(z)$ par $g(z, t)$, nous obtenons la formule des variations suivante:

$$(10.1) \quad \hat{g}_\varepsilon(z, t) = g(z, t) + \varepsilon \hat{\varphi}(z, a, t) + o(\varepsilon),$$

où

$$\hat{\varphi}(z, a, t) = a\hat{\psi}(z, a, t) + a\mu^2(a, t)\chi(z, a, t) + \bar{a}\bar{\mu}^2(a, t)\chi(z, 1/\bar{a}, t),$$

et

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(z, a, t) &= \frac{g^2(z, t)}{g(z, t) - g(a, t)}, \quad \mu(a, t) = \frac{g(a, t)}{ag'_z(a, t)}, \\ \chi(z, a, t) &= \frac{1}{2}zg'_z(z, t) \frac{a+z}{a-z}.\end{aligned}$$

Désignons par $B_{t\varepsilon}$ le domaine, en lequel la fonction $\hat{g}_\varepsilon(z, t)$ transforme le cercle $|z| < 1$, et soit $z = h(w, t)$ la fonction inverse de la fonction $g(z, t)$. Appliquant la formule des variations (10.1) lorsque $z = h(w, t)$, nous aurons la formule suivante

$$(10.2) \quad g_\varepsilon[h(w, t), t] = w + \varepsilon\hat{\varphi}_1(w, b, t) + o(\varepsilon),$$

où

$$\hat{\varphi}_1(w, b, t) = a\hat{\psi}_1(w, b, t) + a\mu_1^2(b, t)\chi_1(w, b, t) + \bar{a}\bar{\mu}_1^2(b, t)\chi_1(w, 1/\bar{b}, t),$$

et

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_1(w, b, t) &= \frac{w^2}{w-b}, \quad \mu_1(b, t) = \frac{bh'_w(b, t)}{h(b, t)}, \\ \chi(w, b, t) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{h(w, t)}{h'_w(w, t)} \cdot \frac{h(b, t) + h(w, t)}{h(b, t) - h(w, t)}, \quad b = g(a, t).\end{aligned}$$

La fonction $g_\varepsilon[h(w, t), t]$ transforme le domaine B_t en un domaine $B_{t\varepsilon}$, en particulier le domaine B_0 en le domaine $B_{0\varepsilon}$. Par conséquent, la fonction $\hat{f}_\varepsilon(z) = g_\varepsilon[h(f(z), t), t]$ transforme le cercle $|z| < 1$ en le domaine $B_{0\varepsilon}$. Pour cette fonction nous aurons, d'après (10.2), la formule des variations:

$$(10.3) \quad \hat{f}_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon\hat{\varphi}_2(z, a, t) + o(\varepsilon),$$

où

$$\hat{\varphi}_2(z, a, t) = a\hat{\psi}_2(z, a, t) + a\mu_2^2(a, t)\chi_2(z, a, t) + \bar{a}\bar{\mu}_2^2(a, t)\chi_2(z, 1/\bar{a}, t),$$

en outre

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_2(z, a, t) &= \frac{f(z)^2}{f(z) - g(a, t)}, \quad \mu_2(a, t) = \frac{g(a, t)}{ag'_z(a, t)}, \\ \chi_2(z, a, t) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{h[f(z), t]}{h'_w[f(z), t]} \cdot \frac{a + h[f(z), t]}{a - h[f(z), t]}.\end{aligned}$$

Soit $f(z)$ une fonction de la famille S_c . La fonction

$$(10.4) \quad f_\varepsilon(z) = \hat{f}_\varepsilon(z)/\hat{f}'_\varepsilon(c)$$

appartient également à la famille S_c et, vu (10.3), on a

$$(10.5) \quad \hat{f}'_\varepsilon(c) = 1 + \varepsilon\hat{\varphi}'_2(c, a, t) + o(\varepsilon).$$

En substituant $\hat{f}_s(z)$ et $\hat{f}'_s(c)$ respectivement de (10.3) et (10.5) dans (10.4), nous aurons, après avoir effectué les opérations, la formule des variations suivante:

$$(10.6) \quad f_s(z) = f(z) + \varepsilon \varphi(z, a, t) + o(\varepsilon),$$

où

$$\varphi(z, a, t) = \alpha \psi(z, a, t) + \alpha \mu^2(a, t) \sigma(z, a, t) + \bar{\alpha} \bar{\mu}^2(a, t) \sigma(z, 1/\bar{a}, t),$$

et

$$\begin{aligned} \psi(z, a, t) &= g(a, t) f(z) \frac{[f(z) - 2f(c)]g(a, t) + f(c)^2}{[f(z) - g(a, t)][f(c) - g(a, t)]^2}, \quad \mu(a, t) = \frac{g(a, t)}{ag'_s(a, t)}, \\ \sigma(z, a, t) &= \chi(z, a, t) - f(z) \chi'_z(c, a, t), \\ \chi(z, a, t) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{h[f(z), t]}{h'_w[f(z), t]} \cdot \frac{a + h[f(z), t]}{a - h[f(z), t]}. \end{aligned}$$

La dérivée $\chi'_z(c, a, t)$ s'exprime par la formule

$$\begin{aligned} \chi'_z(c, a, t) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{h'_w[f(c), t]^2 - h''_{ww}[f(c), t]h[f(c), t]}{h'_w[f(c), t]^2} \cdot \frac{a + h[f(c), t]}{a - h[f(c), t]} + \frac{2ah[f(c), t]}{a - h[f(c), t]} \right\}. \end{aligned}$$

La formule des variations (10.6) se réduit pour $t = 0$ à la formule (2.1). En outre

$$\begin{aligned} g(a, 0) &= f(a), \quad h[f(z), 0] = z, \\ h'_w[f(z), 0] &= [f'(z)]^{-1}, \quad h''_{ww}[f(z), 0] = -f''(z)[f'(z)]^{-3}. \end{aligned}$$

La propriété extrémale (1.5) des points du domaine $D_n(\zeta)$ permet d'obtenir outre la formule des variations (10.6), l'équation différentielle de la fonction $h(w, t)$ inverse de $g(z, t)$, $g(z, 0) = f^*(z)$.

Procédant comme au dans § 3, nous obtenons le théorème:

THÉOREME 8. *La fonction $h = h(w, t)$ inverse de $g(z, t)$, où $g(z, 0) = f^*(z)$, est une fonction frontale par rapport à la fonctionnelle (1.3); elle vérifie l'équation*

$$(10.7) \quad \left(\frac{1}{w}\right)^2 M(w) = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 N(h, t),$$

où

$$\begin{aligned} M(w) &= \sum_{k=0}^n a_k \psi_{\zeta}^{*(k)}(\zeta, w), \\ \psi^*(\zeta, w) &= vw \frac{(v - 2d)w + d^2}{(w - v)(w - d)^2}, \quad v = f^*(\zeta), \quad d = f^*(c), \\ a_k &= \beta p_k + \bar{\beta} \bar{q}_k, \quad p_k = F'_{v_k}(f^*), \quad q_k = F'_{\bar{v}_k}(f^*), \quad v_k = f^{*(k)}(\zeta), \\ N(h, t) &= \sum_{k=0}^n [a_k \sigma_{\zeta}^{*(k)}(\zeta, h, t) + \bar{a}_k \overline{\sigma_{\zeta}^{*(k)}(\zeta, 1/\bar{h}, t)}], \end{aligned}$$

$$\sigma^*(\zeta, h, t) = \chi^*(\zeta, h, t) - v\chi_{\zeta}^{*'}(c, h, t),$$

$$\chi^*(\zeta, h, t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{h[f^*(\zeta), t]}{h'_w[f^*(\zeta), t]} \cdot \frac{h(w, t) + h[f^*(\zeta), t]}{h(w, t) - h[f^*(\zeta), t]},$$

β , $|\beta| = 1$, est un paramètre.

L'analyse de l'équation (10.7) mène à des conclusions analogues à celles que nous avons obtenues en étudiant l'équation (3.1). En particulier, lorsque $n = 0$ et $c \neq 0$ et $\zeta \neq c$, l'équation (10.7), peut être présentée sous la forme

$$(10.8) \quad a_0 v \frac{(v-2d)w + d^2}{(w-v)(w-d)^2} \left(\frac{w}{h}\right) = p \left(\frac{wh'}{h}\right)^2 \frac{(h-\kappa^*)^2(h-h_1)(h-h_2)}{(h-h_3)(h-h_4)(h-h_5)^2(h-h_6)^2},$$

$$p \neq 0,$$

où $\kappa^* = \kappa^*(t)$, h_1 et h_2 sont les racines de la fonction $N(z, t)$, en outre $|\kappa^*| = 1$, $|h_1| \leq 1$ et $|h_2| \geq 1$ ($|h_1| < 1$ et $|h_2| = |1/\bar{h}_1| > 1$, ou bien $|h_1| = |h_2| = 1$) et

$$(10.9) \quad h_3 = h[f^*(\zeta), t], \quad h_5 = h[f^*(c), t], \quad h_4 = 1/\bar{h}_3, \quad h_6 = 1/\bar{h}_5.$$

On obtient ici les relations entre les paramètres de même qu'au § 9. Comme $h(w, t)$ se développe en une série de la forme

$$h(w, t) = a_1^{-1} e^{-t}(w + \dots),$$

où $a_1 = f^{*'}(0)$, de la condition $h(0, t) = 0$ nous tirons la relation

$$(10.10) \quad -a_0 a_1 e^t = p \frac{\kappa^{*2} h_1 h_2}{h_3 h_4 h_5^2 h_6^2}.$$

En tenant compte de (10.10) et de la propriété de la fonction $N(h, t)$:

$$N(h, t) = \overline{N(1/\bar{h}, t)},$$

nous aurons

$$(10.11) \quad \bar{p} = -a_0 a_1 e^t, \quad p = -\bar{a}_0 a_1 e^t.$$

En passant à la limite dans (10.8) avec w tendant vers v et d on obtient, vu (10.11), successivement les équations

$$(10.12) \quad -\frac{\bar{p} h'_3 h_3}{p a_1} = \frac{(h_3 - \kappa^*)^2 (h_3 - h_1)(h_3 - h_2)}{(h_3 - h_4)(h_3 - h_5)^2 (h_3 - h_6)^2},$$

$$(10.13) \quad \frac{\bar{p} v h_5}{p a_1} = \frac{(h_5 - \kappa^*)^2 (h_5 - h_1)(h_5 - h_2)}{(h_5 - h_3)(h_5 - h_4)(h_5 - h_6)^2},$$

où $h'_3 = h'_w[f^*(\zeta), t]^{-1}$.

On voit donc que les systèmes d'équations (10.12), (10.13) et (9.6) et (9.7) sont analogues. En remplaçant, dans le premier d'eux, κ^* , h_i ($i = 1, \dots, 5$) et h'_3 respectivement par z_0 , z_i et v' nous obtiendrons le second.

Posons

$$(10.14) \quad \varrho = |h_3|, \quad q = h_3 \bar{\kappa}^* / \varrho,$$

$$(10.15) \quad r = |h_5|, \quad s = h_5 \bar{\kappa}^* / r.$$

Remarquons que des égalités (10.14) et (10.15) il résulte une relation entre h_3 , h_5 , ϱ , q , r et s

$$(10.16) \quad h_3 / \varrho q = h_5 / rs,$$

en outre nous avons $|q| = |s| = 1$.

Procédant comme au § 9, on peut vu (10.14)-(10.16) mettre les équations (10.12) et (10.13) respectivement sous les formes suivantes

$$(10.17) \quad pq \bar{h}_3 (r^2 \bar{s}^2 - s^2 \bar{Y}) = \bar{p} \bar{q} h_3 (r^2 s^2 - \bar{s}^2 Y),$$

$$(10.18) \quad p (\bar{h}_5 \bar{q} \varrho + q \bar{Z}) = \bar{p} (h_5 q \varrho + \bar{q} Z),$$

où

$$(10.19) \quad Y = \frac{h_3'}{a_1} \left[\frac{(\varrho q - rs)(\varrho q r - s)}{\varrho q - 1} \right]^2,$$

et

$$(10.20) \quad Z = \frac{v}{a_1} \cdot \frac{(rs - \varrho q)(rs \varrho - q)(r^2 - 1)}{(rs - 1)^2}.$$

§ 11. Soit $\bar{S}$ la famille de toutes les fonctions $w = f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$, holomorphes et univalentes dans le cercle $|z| < 1$, transformant le cercle $|z| < 1$ en domaines obtenus du plan (w) en éliminant de ce plan un nombre fini d'arcs de Jordan. Comme précédemment, B_0 et L_0 signifieront respectivement le domaine sur lequel la fonction $f(z) \in \bar{S}$ transforme le cercle $|z| < 1$ et la frontière de ce domaine $g(z, t)$, $g(0, t) = 0$, $g'_z(0, t) = a_1 e^t$ — est la fonction qui transforme le cercle $|z| < 1$ en le domaine $B_t \subset B_0$ (voir p. 193) et $h(w, t)$ — la fonction inverse de $g(z, t)$.

Posons

$$(11.1) \quad f(z, t) = h[f(z), t].$$

D'après ce qui précède, nous avons

$$(11.2) \quad f(z, 0) = z.$$

On peut énoncer le résultat fondamental de la théorie de Löwner (voir [7]) sous la forme suivante:

THÉORÈME (Löwner). *Pour toute fonction $f(z)$ de la famille $\bar{S}$ il existe une fonction $k(t)$, $|k(t)| = 1$, continue dans l'intervalle $0 \leq t \leq \infty$ à l'exception d'un nombre fini de points de discontinuité de première espèce et telle que $f(z)$ puisse être représentée par la formule*

$$(11.3) \quad f(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} a_1 e^t f(z, t), \quad a_1 = f'(0).$$

La fonction $f = f(z, t)$ vérifie de plus l'équation

$$(11.4) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -f \frac{1+k(t)f}{1-\overline{k(t)f}}, \quad |z| < 1.$$

En outre

$$(11.5) \quad k(t)^{-1} = h(w_0, t),$$

où w_0 est l'origine de la frontière L_t du domaine B_t .

Nous pouvons maintenant déduire du théorème de Löwner quelques conséquences, que nous utiliserons dans la suite.

Divisant les deux membres (11.4) par $f = f(z, t)$, nous obtiendrons l'équation

$$(11.6) \quad \frac{\partial \log f(z, t)}{\partial t} = - \frac{1+k(t)f(z, t)}{1-\overline{k(t)f(z, t)}},$$

d'où, en séparant les parties réelles et les parties imaginaires, nous aurons

$$(11.7) \quad \frac{\partial |f(z, t)|}{\partial t} = -|f(z, t)| \frac{1-|f(z, t)|^2}{|1-\overline{k(t)f(z, t)}|^2}.$$

Le module de la fonction $f(z, t)$ est plus petit que 1, car $|h(w, t)| < 1$, donc, en vertu de (11.7), il diminue d'une façon monotone (z étant fixé), lorsque t augmente de 0 à ∞ . D'après ce qui précède, on peut prendre au lieu de t pour variable indépendante $|f(z, t)|$. Des formules (11.2) et (11.3) il résulte directement que $|f(z, 0)| = |z|$ et $f(z, \infty) = 0$. Par conséquent t , $k(t)$ et $f(z, t)$ sont des fonctions de l'argument $|f|$:

$$t = t(|f|), \quad k(t) = k[t(|f|)] = \tau(|f|), \quad f(z, t) = f[z, t(|f|)] = m(z, |f|).$$

Intégrant l'équation (11.6) dans l'intervalle $0 \leq t \leq \infty$, nous obtiendrons, après de simples transformations, en tenant compte de (11.3),

$$(11.8) \quad \log f(z) - \log a_1 e^t \cdot f(z, t) = -2 \int_t^\infty \frac{k(t)f(z, t)}{1-\overline{k(t)f(z, t)}} dt.$$

Dérivant ensuite l'équation (11.6) par rapport à z , nous aurons

$$\frac{\partial \log f'_z}{\partial t} = - \frac{1+2kf-k^2f^2}{(1-kf)^2}, \quad f'_z = \frac{\partial f(z, t)}{\partial z}.$$

D'où

$$(11.9) \quad \frac{\partial \log(a_1 e^t f'_z)}{\partial t} = -2 \frac{kf(2-kf)}{(1-kf)^2}.$$

Etant donné que $\lim_{t \rightarrow \infty} a_1 e^t f'_z = f'(z)$, nous aurons en intégrant (11.9) dans l'intervalle $0 \leq t \leq \infty$,

$$(11.10) \quad \log f'(z) - \log a_1 e^t f'_z(z, t) = -2 \int_t^\infty \frac{k(t)f(z, t)[2-\overline{k(t)f(z, t)}]}{[1-\overline{k(t)f(z, t)}]^2} dt.$$

Dans les intégrales dans les formules (11.8) et (11.10) nous procéderons à un changement de variable, en introduisant $|f(z, t)|$ au lieu de t . Comme

$$(11.11) \quad dt = - \frac{|1 - kf|^2}{|f|(1 - |f|^2)} d|f|,$$

alors les formules (11.8) et (11.10) prendront respectivement la forme

$$(11.12) \quad \log f(z) - \log a_1 e^{tf}(z, t) = 2 \int_{|f|}^0 \frac{kf - |f|^2}{|f|(1 - |f|^2)} d|f|,$$

$$(11.13) \quad \log f'(z) - \log a_1 e^{tf'_z}(z, t) = -2 \int_0^{|f|} \frac{(2 - kf)(kf - |f|)^2}{(1 - kf)|f|(1 - |f|^2)} d|f|.$$

Enfin de (11.11) nous obtenons

$$(11.14) \quad t = - \int_{|z|}^{|f|} \frac{|1 - kf|^2}{|f|(1 - |f|^2)} d|f|.$$

Le théorème de Löwner s'applique en particulier aux fonctions frontales $f^*(z)$, si nous admettons, que $a_1 > 0$, ce qui ne diminue pas la généralité. Désignons par $f^* = f^*(z, t)$ et $k^* = k^*(t)$ respectivement $h[f^*(z, t)]$ et la fonction $k(t)$ subordonnée, en vertu du théorème de Löwner, à la fonction frontale $f^*(z)$. Observons ensuite que si nous prenons pour variable indépendante $|f^*(\zeta), t|$ ou bien $|f^*(c), t|$, alors, vu (10.9), q et s , déterminés par les formules (10.14) et (10.15), sont des fonctions des variables respectivement q et r : $q = q(q)$, $s = s(r)$.

Posons dans les formules (11.12)-(11.14) $f = f^*$, $k = k^*$ et $z = \zeta$. Vu (10.14) et l'égalité $k^* = \bar{\kappa}^*$, nous aurons successivement

$$(11.15) \quad \log v - \log a_1 e^{tf^*}(\zeta, t) = 2 \int_q^0 \frac{q - q}{1 - q^2} dq,$$

$$(11.16) \quad \log v' - \log a_1 e^{tf^{*'}_z}(\zeta, t) = -2 \int_0^q \frac{(2 - eq)(q - q)}{(1 - eq)(1 - q^2)} dq,$$

et

$$(11.17) \quad t = \int_q^{|z|} \frac{(1 - eq)(q - q)}{eq(1 - q^2)} dq.$$

De même, en prenant dans (11.13) $z = c$, $f = f^*$ et $k = k^*$, nous aurons

$$(11.18) \quad \log a_1 e^{tf^{*'}_z}(c, t) = 2 \int_0^r \frac{(2 - rs)(s - r)}{(1 - rs)(1 - r^2)} dr.$$

Moyennant les formules (11.15) et (11.18) exprimons v par les intégrales correspondantes de la fonction $q = v(\varrho)$ et $r = r(s)$. Dans ce but nous poserons dans ces formules $t = 0$, en les ajoutant ensuite membre à membre. Nous obtiendrons successivement

$$(11.19) \quad \log v - \log a_1 \zeta = 2 \int_{|\zeta|}^0 \frac{q - \varrho}{1 - \varrho^2} d\varrho,$$

$$(11.20) \quad \log a_1 = 2 \int_0^{|\zeta|} \frac{(2 - rs)(s - r)}{(1 - rs)(1 - r^2)} dr,$$

$$(11.21) \quad v = \zeta \exp 2 \left[\int_{|\zeta|}^0 \frac{q - \varrho}{1 - \varrho^2} d\varrho + \int_0^{|\zeta|} \frac{(2 - rs)(s - r)}{(1 - rs)(1 - r^2)} ds \right].$$

Les fonctions $q = q(\varrho)$ et $r = r(s)$ sont exprimées par le système d'équations (10.16)-(10.18), dans lequel il y a lieu de remplacer h_3 , h_5 , h'_3 , a_1 et v par les expressions correspondantes, obtenues des formules (11.15)-(11.20). Ainsi, en ajoutant membre à membre (11.15) et (11.17), et en soustrayant ensuite des deux membres de l'équation obtenue (11.15), nous obtenons $f^*(\zeta, t)$, c'est-à-dire h_3 :

$$(11.22) \quad h_3 = f^*(\zeta, t) = \zeta \exp \int_{|\zeta|}^0 \frac{(q - \varrho)(1 + \varrho q)}{\varrho q(1 - \varrho^2)} d\varrho.$$

Posant dans les formules (11.12) et (11.14) $f = f^*(c, t)$ et procédant de façon analogue, nous exprimons $f^*(c, t)$, c'est-à-dire h_5 :

$$(11.23) \quad h_5 = f^*(c, t) = c \exp \int_{|c|}^r \frac{(s - r)(1 + rs)}{rs(1 - r^2)} dr.$$

Enfin, ajoutant membre à membre (11.17) et (11.16), nous exprimons $[a_1 f''_z(\zeta, t)]^{-1} f''(\zeta)$, c'est-à-dire h'_3/a_1 :

$$\frac{h'_3}{a_1} = \exp \left[\int_0^{|\zeta|} \frac{(1 - \varrho q)(q - \varrho)}{\varrho q(1 - \varrho^2)} d\varrho - 2 \int_0^0 \frac{(2 - \varrho q)(q - \varrho)}{(1 - \varrho q)(1 - \varrho^2)} d\varrho \right].$$

Récapitulant les résultats des considérations de ce paragraphe et du précédent, nous obtenons le théorème suivant:

THÉORÈME 9. *La frontière du domaine de variabilité de la fonctionnelle $F(f(\zeta), \bar{f}(\bar{\zeta}))$, lorsque $c \neq 0$ et $\zeta \neq c$, est déterminée par l'équation*

$$\Omega = F(v, \bar{v}),$$

où

$$v = \zeta \exp 2 \left[\int_{|c|}^0 \frac{q - \varrho}{1 - \varrho^2} d\varrho + \int_0^{|c|} \frac{(2 - rs)(s - r)}{(1 - rs)(1 - r^2)} ds \right].$$

Les fonctions $q = q(\varrho)$, $s = s(r)$, $|q(\varrho)| = 1$, $|s(r)| = 1$, sont déterminées par le système d'équations

$$\begin{aligned} h_3 rs &= h_5 \varrho q, \\ \bar{\alpha}_0 q \bar{h}_3 (r^2 \bar{s}^2 - s^2 \bar{Y}) &= \alpha_0 \bar{q} h_3 (r^2 s^2 - \bar{s}^2 Y), \\ \bar{\alpha}_0 (\bar{h}_5 \bar{q} \varrho + q \bar{Z}) &= \alpha_0 (h_5 q \varrho + \bar{q} Z), \end{aligned}$$

en outre

$$Y = \frac{h'_3}{a_1} \left[\frac{(\varrho q - rs)(\varrho q r - s)}{\varrho q - 1} \right]^2, \quad Z = \frac{v}{a_1} \cdot \frac{(rs - \varrho q)(rs \varrho - q)(r^2 - 1)}{(rs - 1)^2},$$

$$h_3 = \zeta \exp \int_{|c|}^0 \frac{(q - \varrho)(1 + \varrho q)}{\varrho q (1 - \varrho^2)} d\varrho, \quad h_5 = c \exp \int_{|c|}^r \frac{(s - r)(1 + rs)}{rs (1 - r^2)} dr,$$

$$\frac{h'_3}{a_1} = \exp \left[\int_{|c|}^0 \frac{(1 - \varrho q)(q - \varrho)}{\varrho q (1 - \varrho^2)} d\varrho - 2 \int_0^{|c|} \frac{(2 - \varrho q)(q - \varrho)}{(1 - \varrho q)(1 - \varrho^2)} d\varrho \right],$$

$$\frac{v}{a_1} = \zeta \exp 2 \int_{|c|}^0 \frac{q - \varrho}{1 - \varrho^2} d\varrho,$$

$$\alpha_0 = \beta p_0 + \bar{\beta} \bar{q}_0, \quad p_0 = F'_v(f^*), \quad q_0 = F'_v(f^*),$$

β est un paramètre de module 1.

§ 12. En terminant, revenons au problème de la détermination du domaine de variabilité de la fonctionnelle (5.5) dans les cas $c \neq 0$, $\zeta = c$ (voir § 7) et $c = 0$, $\zeta \neq c$ (voir § 6) et cherchons la solution de ce problème au moyen de la méthode présentée aux §§ 10 et 11.

1. Soit $c \neq 0$, $\zeta = c$. Les conditions (7.13') et (7.2) que nous avons obtenues en étudiant les équations différentielles (7.1) dans l'entourage des points $z = c$ et $z = 0$ peuvent être mises d'après (9.8), respectivement sous la forme

$$(12.1) \quad \frac{d}{ca_1} = \frac{(1 - \varrho_0 q_0)^2}{(1 - |c|^2)^2}$$

et

$$(12.2) \quad \frac{\alpha_0 a_1 c}{\bar{\alpha}_0 \bar{a}_1 \bar{c}} = \bar{q}_0^2.$$

De (12.1) nous tirons

$$(12.3) \quad \frac{\bar{a}_1 \bar{c}}{\bar{d}} = \frac{(1 - |c|^2)^2}{(1 - \varrho_0 \bar{q}_0)^2}.$$

En multipliant membre à membre (12.1) et (12.3) nous aurons

$$(12.4) \quad \frac{d\bar{a}_1\bar{c}}{\bar{d}a_1c} = \frac{(1 - \varrho_0q_0)^2}{(1 - \varrho_0\bar{q}_0)^2}.$$

Des égalités (12.2), (12.4) et $\bar{q}_0 = q^{-1}$, nous obtenons l'équation

$$\frac{(\varrho_0 - q_0)^2}{(1 - \varrho_0q_0)^2} = \eta^2,$$

où

$$\eta = \left(\frac{\bar{a}_0\bar{d}}{a_0d} \right)^{1/2}, \quad \operatorname{re} \eta \geq 0.$$

Par suite

$$\frac{q_0 - \varrho_0}{1 - \varrho_0q_0} = \delta,$$

où $\delta = \varepsilon\eta$, $\varepsilon = \pm 1$.

Une équation analogue est vérifiée par la fonction $q = q(\varrho)$, définie par la formule (10.4), où $\varrho = |h(f^*(o), t)|$ (voir (10.9)):

$$(12.5) \quad \frac{q - \varrho}{1 - \varrho q} = \lambda,$$

où λ , $|\lambda| = 1$, est un paramètre.

De (11.21) nous tirons

$$d = c \exp 2 \int_0^{|c|} \frac{q - \varrho}{(1 - \varrho q)(1 - \varrho^2)} d\varrho,$$

d'où, en tenant compte de (12.5) et en intégrant, nous exprimerons d :

$$d = c \left(\frac{1 + |c|}{1 - |c|} \right)^\lambda,$$

(voir (7.18)).

2. Soit $c = 0$, $\zeta \neq c$. La condition (6.2), que nous avons obtenue en étudiant l'équation différentielle (6.1) dans l'entourage du point $z = 0$, peut être présentée, vu (9.8), sous la forme

$$\bar{q}_0^2 = \frac{\alpha_0 v}{\bar{\alpha}_0 \bar{v}}.$$

Donc

$$(12.6) \quad q_0 = \delta,$$

où $\delta = \varepsilon\eta$, $\varepsilon = \pm 1$,

$$\eta = \left(\frac{\bar{\alpha}_0 \bar{v}}{\alpha_0 v} \right)^{1/2}, \quad \operatorname{re} \eta \geq 0.$$

Une équation analogue à (12.6) est vérifiée par la fonction $q = q(\varrho)$, définie par (10.4), où $\varrho = |h(f^*(\zeta), t)|$:

$$q = \lambda,$$

en outre λ , $|\lambda| = 1$, est un paramètre.

De (11.21) résulte

$$v = \zeta \exp 2 \int_{|\zeta|}^0 \frac{q - \varrho}{1 - \varrho^2} d\varrho,$$

donc

$$v = \zeta \frac{(1 - |\zeta|)^{\lambda-1}}{(1 + |\zeta|)^{\lambda+1}},$$

(voir (6.14)).

Travaux cités

- [1] И. А. Александров (Alexandroff), *Граничные значения функционала $I = I(f, \bar{f}, f', \bar{f}')$ на классе голоморфных однолистных в круге функций*, Сибир. Мат. Журнал 4 (1963), pp. 17-31.
- [2] Z. Charzyński et W. Janowski, *Domaine de variation des valeurs d'une fonction univalente bornée*, Bull. de la Soc. de Sciences et des Lettres de Łódź, Classe III, 10 (5) (1959), pp. 1-11.
- [3] Г. М. Голузин (Goluzin), *Метод вариаций в конформном отображении*, I, Мат. сб. 19 (1946), pp. 203-236.
- [4] — *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Москва 1952.
- [5] H. Grunsky, *Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche*, Math. Sem. Univ. Berlin, 1 (1932).
- [6] П. П. Куфарев (Kufareff), *Об одном методе исследования экстремальных задач теории однолистных функций*, ДАН 107 (1956), pp. 633-635.
- [7] K. Löwner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises*, Math. Ann. 89 (1923), pp. 103-121.
- [8] A. C. Schaeffer and D. C. Spencer, *Coefficient regions for schlicht function*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. Vol., 35 (1950), pp. X+311.
- [9] M. Schiffer, *A method of variation within the family of simple functions*, Proc. London Math. Soc. 44 (1938), pp. 432-449.

Reçu par la Rédaction le 4. 6. 1965