*QUELQUES PROBLÈMES QUALITATIFS DE LA THÉORIE
DES ÉQUATIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES*

PAR

C. CORDUNEANU (JASSY)

Ce travail concerne des systèmes d'équations intégral-différentielles de la forme

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t)) + \int_0^t k(t, s, x(s)) ds$$

où x , f et k sont des fonctions vectorielles ayant leurs valeurs dans l'espace euclidien à n dimensions R^n . Il sera question plus particulièrement des propriétés de stabilité de la solution nulle et des autres propriétés asymptotiques.

Le système (1) peut être considéré comme perturbé du système différentiel ordinaire

$$(2) \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad f(t, 0) \equiv 0,$$

le terme perturbateur lui conférant le caractère de système à retardement. Cependant, en ce qui concerne le problème de Cauchy, le système (1) se comporte comme un système différentiel ordinaire, c'est-à-dire une solution est uniquement déterminée par la condition initiale

$$(3) \quad x(0) = x_0, \quad x_0 \in R^n.$$

On pourrait considérer des systèmes plus généraux, à savoir

$$(4) \quad \dot{x}(t) = f\left(t, x(t), \int_0^t k(t, s, x(s)) ds\right).$$

Il est aisé de voir que le système (4), avec la condition (3), a une solution unique définie dans un intervalle $[0, h]$, où $h > 0$, lorsque les fonctions $k(t, s, x)$ et $f(t, x, y)$ satisfont aux conditions du type classique (continuité, condition de Lipschitz par rapport à x pour la fonction k et par rapport à x et y pour f).

Un aperçu sur le développement de la théorie des équations intégrales-différentielles au cours des dernières années a été publié par Vainberg [18]. On y trouve plusieurs renseignements concernant les équations intégrales-différentielles de Volterra.

Dans l'étude des systèmes de la forme (1), certains résultats et méthodes de la théorie des équations différentielles ordinaires ou intégrales seront appliqués, notamment la technique de comparaison (voir Conti [3] et Corduneanu [4]), la théorie de Massera et Schäffer (voir [13] et [14]) et la méthode fréquentielle de Popov (voir [15] et [16]). Les résultats du présent travail pourront présenter un intérêt même pratique, vu que les équations intégrales-différentielles interviennent dans l'étude de plusieurs problèmes applicatifs, en particulier, dans la théorie du réglage automatique.

1. Stabilité asymptotique exponentielle. Considérons le système (1) et le système non-perturbé (2). Admettons que la solution nulle du système (2) est asymptotiquement stable du type exponentiel, c'est-à-dire que

$$(5) \quad \|x(t; t_0, x_0)\| \leq A \|x_0\| \exp\{-\alpha(t-t_0)\}, \quad t \geq t_0,$$

où A et α sont des constantes positives.

Alors, en admettant la continuité de $f(t, x)$ dans l'ensemble

$$(4) \quad 0 \leq t < +\infty, \quad \|x\| < a \leq +\infty$$

et la condition de Lipschitz par rapport à x

$$(6) \quad \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|$$

dans le même ensemble, on peut construire (voir Yoshizawa [21]) une fonction de Liapounoff $V(t, x)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

$$(7) \quad \|x\| \leq V(t, x) \leq K \|x\|,$$

$$(8) \quad |V(t, x) - V(t, y)| \leq K \|x - y\|,$$

$$(9) \quad V'(t, x) \leq -\lambda V(t, x), \quad \lambda > 0.$$

De plus, la fonction $V(t, x)$ est localement lipschitzienne par rapport à (t, x) .

La même fonction $V(t, x)$ sera utilisée pour le système (1) en vue de déduire des propriétés asymptotiques des solutions de ce système.

Admettons que la fonction vectorielle $k(t, s, x)$ est définie dans l'ensemble

$$(I) \quad 0 \leq s \leq t < +\infty, \quad \|x\| < a \leq +\infty$$

et qu'elle y satisfait aux conditions assurant l'existence d'une solution du système (1) avec la condition initiale (3). De plus, admettons que

$$(10) \quad \|k(t, s, x)\| \leq k(t, s)F(s, \|x\|)$$

où la fonction $k(t, s)$ est continue non-négative dans l'ensemble $0 \leq s \leq t < +\infty$, la fonction $F(t, r)$ l'est dans l'ensemble

$$(E) \quad 0 \leq t < +\infty, \quad \|x\| < Ka \leq +\infty,$$

elle y est non-décroissante par rapport à r et $F(t, 0) = 0$.

En désignant par $D\varphi(t)$ le nombre dérivé supérieur à droite de la fonction $\varphi(t)$ au point t , on aura pour toute solution $x(t)$ du système (1) avec $\|x_0\|$ assez petit

$$DV(t; x(t)) \leq -\lambda V(t, x(t)) + K \int_0^t \|k(t, s, x(s))\| ds,$$

ce qui nous donne, en tenant compte des relations (10) et (7),

$$(11) \quad DV(t, x(t)) \leq -\lambda V(t, x(t)) + K \int_0^t k(t, s)F(s, V(s, x(s))) ds.$$

L'inégalité intégrale (11) pour la fonction $V(t, x(t))$ permettra d'obtenir une limitation utile dans la suite. Il convient de transformer l'inégalité (11) en inégalité intégrale, ce qui est possible en intégrant de 0 à t les deux membres multipliés au préalable par $\exp(\lambda t)$. Il vient, en appliquant la formule de Dirichlet pour l'intégrale double dans un domaine triangulaire

$$(12) \quad V(t, x(t)) \leq V_0 \exp(-\lambda t) + K \int_0^t h(t, s)F(s, V(s, x(s))) ds,$$

où $V_0 = V(0, x_0)$ et

$$(13) \quad h(t, s) = \int_s^t k(\tau, s) \exp\{-\lambda(t-\tau)\} d\tau.$$

Considérons maintenant l'équation de comparaison

$$(14) \quad v(t) = V_0 \exp(-\mu t) + K \int_0^t h(t, s)F(s, v(s)) ds,$$

où $0 < \mu < \lambda$. On sait [2] que

$$(15) \quad V(t, x(t)) \leq v(t),$$

dans l'intervalle commun de définition des deux fonctions. Par conséquent, la stabilité asymptotique exponentielle de la solution nulle du système (1) sera assurée, dès que l'équation (14) aura une solution à décroissance exponentielle (car $\|x\| \leq V(t, x)$).

Remarque 3. L'hypothèse de la stabilité asymptotique exponentielle de la solution nulle du système (2) est assez restrictive, bien qu'elle apparaisse souvent dans les applications. En admettant seulement la stabilité asymptotique uniforme de la solution nulle du système (2), il existe (voir Corduneanu [4]) une fonction de Liapounoff $V(t, x)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

$$(22) \quad a(\|x\|) \leq V(t, x) \leq K\|x\|,$$

$$(23) \quad |V(t, x) - V(t, y)| \leq K\|x - y\|,$$

$$(24) \quad V'(t, x) \leq -V(t, x),$$

où $a(r)$ est une fonction continue dans l'intervalle $[0, a)$, s'annulant pour $r = 0$ et strictement croissante. Le même procédé que plus haut conduit à une équation intégrale de comparaison qui est toutefois plus compliquée que l'équation (14). Une condition de stabilité asymptotique de la solution nulle du système (1) sera, évidemment, $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$, où $v(t)$ est la solution de la nouvelle équation intégrale de comparaison. Le lecteur voudra lui-même achever les calculs et formuler les conditions.

Remarque 4. Dans le cas où $k(t, s, x) \equiv k(s, x)$, un autre procédé peut être utilisé. En désignant le terme perturbateur par $v(t)$, le système (1) revient dans ce cas à

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + v(t), \quad \dot{v}(t) = k(t, x(t)).$$

La technique de comparaison est applicable, en utilisant cette fois les théorèmes généraux de Ważewski [19] sur les systèmes d'inégalités différentielles.

2. Comportement global dans le cas où $f(t, x) = A(t)x$. Considérons maintenant les systèmes de la forme

$$(25) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + \int_0^t k(t, s, x(s))ds,$$

auxquels on peut appliquer la théorie de Massera et Schäffer (voir leurs travaux [13] et [14]). Remarquons que le terme perturbateur peut être conçu comme un opérateur de $x(t)$, dépendant aussi du paramètre t . En posant

$$(26) \quad f(t; x) = \int_0^t k(t, s, x(s))ds,$$

le système (25) prend la forme

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t; x)$$

qui est celle d'un système étudié par plusieurs auteurs (voir Corduneanu [5], Hartman et Onuchic [12], Massera et Schäffer [13]). Il reste seulement à formuler des conditions convenables pour pouvoir appliquer les résultats des travaux précités. Formulons-en un seul résultat, d'ailleurs assez général et qui est un cas particulier du Théorème I établi dans [5].

Précisons tout d'abord les notations, qui sont dues à Massera et Schäffer (voir [13] et [14]).

$L(J, R^n)$ désigne l'espace des fonctions localement sommables dans $J = [0, +\infty)$ et ayant leurs valeurs dans R^n ; la topologie localement convexe dans $L(J, R^n)$ sera définie par la famille de semi-normes

$$|f|_n = \int_0^n \|f(t)\| dt \quad \text{où} \quad n = 1, 2, \dots$$

C désigne l'espace (de Banach) des fonctions vectorielles, continues et bornées dans J , avec la topologie de convergence uniforme donnée à l'aide de la norme

$$|f| = \sup \|f(t)\| \quad \text{pour} \quad t \in J.$$

D désigne un espace de Banach de fonctions vectorielles continues dans J , avec une topologie plus forte que celle de $L(J, R^n)$. On prendra, par exemple, $D = C_g$, l'espace C_g étant défini dans [8]. La norme dans D sera désignée par $|f|_D$.

L'ensemble des D -solutions du système homogène

$$(27) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t),$$

c'est-à-dire de celles appartenant à l'espace D , est une variété linéaire dans D et les valeurs initiales (pour $t = 0$) de ces solutions constituent un sous-espace de R^n . Soit P l'opérateur de projection de R^n sur ce sous-espace.

THÉOREME 2. *Admettons sur le système (25) les conditions suivantes:*

1. *la matrice $A(t)$ est localement sommable dans J ;*
2. *quel que soit $f(t) \in C$, le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t)$ a au moins une D -solution;*
3. *la fonction vectorielle $k(t, s, x)$ est continue dans l'ensemble $0 \leq s \leq t < +\infty$, $x \in R^n$ et*

$$(28) \quad \int_0^t k(t, s, x(s)) ds \in C \quad \text{pour} \quad x(t) \in D,$$

$$(29) \quad \|k(t, s, x(s)) - k(t, s, y(s))\| \leq k(t, s) |x - y|_D \quad \text{pour} \quad x, y \in D,$$

où $k(t, s)$ est une fonction continue telle que

$$(30) \quad \int_0^t k(t, s) ds \leq \gamma < +\infty \quad \text{pour} \quad t \in J.$$

Alors le système (25) a une D -solution unique $x(t)$ satisfaisant à la condition initiale

$$(31) \quad Px(0) = \xi_0,$$

dès que γ est assez petit.

En effet, les conditions exigées dans l'énoncé du Théorème I du travail [5] sont satisfaites par l'opérateur $f(t; x)$ défini par la formule (26), compte tenant des conditions (28)-(30).

Il est aisé de voir que la condition 3 de l'énoncé du théorème 2 peut être affaiblie, en utilisant des conditions du type de Carathéodory.

Remarquons aussi que des résultats analogues au théorème 2 peuvent être déduits à l'aide des théorèmes établis dans le travail [12] de Hartman et Onuchie.

3. Stabilité absolue des systèmes à retardement de la théorie du réglage. Dans la théorie du réglage automatique on rencontre des systèmes de la forme

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b\varphi(\sigma(t)) \quad \text{où} \quad \sigma = \langle c, x \rangle.$$

Plusieurs auteurs (Halanay et Popov [11], Razumihin [17] et Yakubovič [20]) ont envisagé des systèmes d'une forme analogue, dans lesquels intervient le retardement. Considérons le système

$$(32) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + \int_0^t b(t-s)\varphi(\sigma(s))ds \quad \text{où} \quad \sigma = \langle c, x \rangle$$

dans lequel A est une matrice carrée du type $n \times n$, $b(t)$ est une fonction vectorielle à n composantes et c est un vecteur constant. La fonction scalaire $\varphi(\sigma)$ est appelée la *caractéristique du servo-moteur* et doit satisfaire à certaines conditions qui seront formulées dans la suite. Notre but est l'étude de la stabilité asymptotique globale de la solution nulle de ce système, pour toute fonction $\varphi(\sigma)$ appartenant à une classe donnée. On parviendra aux résultats à l'aide d'une équation intégrale pour la fonction $\sigma(t)$ et à laquelle on pourra appliquer certains théorèmes établis dans les travaux [6] et [7].

Il résulte de (32) que la solution du système, assujettie à la condition $x(0) = x_0$, satisfait à l'équation

$$x(t) = \exp(At) \cdot x_0 + \int_0^t \exp\{A(t-\tau)\} \left[\int_0^\tau b(\tau-s)\varphi(\sigma(s))ds \right] d\tau.$$

En appliquant la formule de Dirichlet, il vient

$$x(t) = \exp(At) \cdot x_0 + \int_0^t \left\{ \int_s^t \exp\{A(t-\tau)\} \cdot b(\tau-s) d\tau \right\} \varphi(\sigma(s)) ds.$$

Or

$$\int_s^t \exp\{A(t-\tau)\} b(\tau-s) d\tau = \int_0^{t-s} \exp\{A(t-s-u)\} b(u) du.$$

En posant donc

$$(33) \quad k(t) = \left\langle c, \int_0^t \exp\{A(t-u)\} b(u) du \right\rangle,$$

$$(34) \quad f(t) = \langle c, \exp(At) \cdot x_0 \rangle,$$

on arrive à l'équation intégrale pour la fonction $\sigma(t)$:

$$(35) \quad \sigma(t) = f(t) + \int_0^t k(t-s) \varphi(\sigma(s)) ds.$$

C'est justement l'équation à laquelle seront appliqués les résultats obtenus par la méthode fréquentielle de Popov.

Le Théorème 3 établi dans [6] conduit au résultat suivant:

THÉORÈME 3. *Admettons que le système (32) satisfait aux conditions suivantes:*

1. *la matrice A est hurwitzienne, c'est-à-dire, ses racines caractéristiques ont leur partie réelle négative;*
2. *la fonction vectorielle $b(t)$ est définie pour $t \geq 0$ et*

$$(36) \quad b(t) \in L_1(0, +\infty) \cap L_2(0, +\infty);$$

3. *la fonction scalaire $\varphi(\sigma)$ est continue et bornée sur l'axe réel et, de plus, $\sigma \varphi(\sigma) > 0$ pour $\sigma \neq 0$;*

4. *il existe un $q \geq 0$ tel que*

$$(37) \quad \operatorname{Re}\{(1+i\omega q) \langle c, (i\omega E - A)^{-1} \tilde{b}(i\omega) \rangle\} \leq 0,$$

quel que soit ω réel, où

$$(38) \quad \tilde{b}(i\omega) = \int_0^\infty \exp(-i\omega t) b(t) dt.$$

Alors le système (32) est absolument stable (c'est-à-dire, toute solution de ce système tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, quelle que soit la fonction $\varphi(\sigma)$ satisfaisant à la condition 3 de l'énoncé).

En effet, les conditions 1-4 de l'énoncé ont pour conséquence

$$(39) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = 0.$$

On a donc $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(\sigma(t)) = 0$ et par conséquent

$$(40) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \int_0^t b(t-s) \varphi(\sigma(s)) ds \right\| = 0.$$

Vu la condition 1, on a

$$(41) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0,$$

pour toute solution $x(t)$ du système (32).

Remarquons que la transformée de Fourier de la matrice $\exp(At)$ est la matrice $(i\omega E - A)^{-1}$.

Un autre type de système qui se présente dans la théorie du réglage est le suivant:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b\varphi(\sigma(t)) \quad \text{où} \quad \dot{\xi} = \varphi(\sigma), \quad \sigma = \langle c, x \rangle - \gamma \xi, \quad \text{et} \quad \gamma > 0.$$

Le système analogue à retardement sera donc

$$(42) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + \int_0^t b(t-s) \varphi(\sigma(s)) ds, \quad \dot{\xi} = \varphi(\sigma), \quad \sigma = \langle c, x \rangle - \gamma \xi.$$

En appliquant le même procédé, on obtient pour la fonction $\sigma(t)$ une équation intégrale de la forme (35), où

$$(43) \quad k(t) = \left\langle c, \int_0^t \exp\{A(t-u)\} b(u) du \right\rangle - \gamma,$$

$$(44) \quad f(t) = \langle c, \exp(At) \cdot x_0 \rangle - \gamma \xi_0.$$

Cette fois on peut appliquer un résultat établi dans le travail [7].

THÉOREME 4. *Admettons sur le système (42) les conditions suivantes:*

1. *la matrice A est hurwitzienne;*
2. *la fonction vectorielle $b(t)$ satisfait à la condition (36);*
3. *la fonction $\varphi(\sigma)$ est continue sur l'axe réel et $\sigma\varphi(\sigma) > 0$ pour $\sigma \neq 0$;*
4. *il existe un $q \geq 0$ tel que*

$$(45) \quad \operatorname{Re}\{(1 + i\omega q)[\langle c, (i\omega E - A)^{-1} \tilde{b}(i\omega) \rangle - \gamma(i\omega)^{-1}]\} \leq 0,$$

quel que soit $\omega \neq 0$.

Alors le système (42) est absolument stable.

En effet, $\sigma(t)$ satisfait dans ces conditions à (39) et par conséquent on aura (41). De la dernière équation du système (42) on déduit encore $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$.

Notons pour terminer que les équations intégrales de la forme (35) ont fait l'objet de nombreux travaux. Mentionnons-en, par exemple,

ceux d'Albertoni et Szegö [1], de Friedman [9] et de Halanay [10]. On peut appliquer les résultats de ces travaux en vue d'établir de nouvelles conditions de stabilité absolue pour les systèmes de la forme (32) ou (42) ou bien pour d'autres systèmes à retardement que l'on rencontre dans la théorie du réglage automatique.

TRAVAUX CITÉS

- [1] S. Albertoni et G. P. Szegö, *Sur une équation intégrale de la théorie du réglage*, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, 261 (1965), p. 29-32.
- [2] Н. В. Азбелев и З. Б. Цалюк, *Об интегральных неравенствах, I*, Математический Сборник 56 (1962), p. 325-342.
- [3] R. Conti, *Sulla prolungabilità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie*, Bolletino della Unione Matematica Italiana 11 (1956), p. 510-514.
- [4] C. Corduneanu, *Применение дифференциальных неравенств к теории устойчивости*, Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza” din Iași 6 (1960), p. 47-58.
- [5] — *Sur certains systèmes différentiels non-linéaires*, ibidem, p. 257-260.
- [6] — *Sur une équation intégrale non-linéaire*, ibidem 9 (1963), p. 369-375.
- [7] — *Sur une équation intégrale de la théorie du réglage automatique*, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, 256 (1963), p. 3564-3567.
- [8] — *Problèmes globaux dans la théorie des équations intégrales de Volterra*, Annali di Matematica Pura ed Applicata (IV), 67 (1965), p. 349-364.
- [9] A. Friedman, *On integral equations of Volterra type*, Journal d'Analyse Mathématique 11 (1963), p. 381-413.
- [10] A. Halanay, *Абсолютная устойчивость некоторых нелинейных регулируемых систем с запаздыванием*, Автоматика и Телемеханика 25 (1964), p. 290-301.
- [11] — et V. М. Попов, *Об устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования с запаздыванием*, ibidem 23 (1962), p. 849-851.
- [12] Ph. Hartman and N. Onuchic, *On the asymptotic integration of ordinary differential equations*, Pacific Journal of Mathematics 13 (1963), p. 1193-1207.
- [13] J. L. Massera and J. J. Schäffer, *Linear differential equations and functional analysis, I*, Annals of Mathematics 67 (1958), p. 517-573.
- [14] — *Linear differential equations and functional analysis, IV*, Mathematische Annalen 139 (1960), p. 287-342.
- [15] V. М. Попов, *Critères de stabilité pour les systèmes non-linéaires du réglage automatique basés sur l'usage de la transformée de Laplace* (en roumain), Studii și cercetări, Energetică, 9 (1959), p. 119-135.
- [16] — *Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования*, Автоматика и телемеханика 22 (1961), p. 961-979.
- [17] В. С. Разумихин, *Устойчивость нелинейных регулируемых систем с запаздыванием*, Инженерный Сборник 29 (1960), p. 21-29.
- [18] М. М. Вайнберг, *Интегро-дифференциальные уравнения*, Академия Наук СССР, Институт Научной Информации, 1962, Итоги Науки, p. 5-37.
- [19] T. Ważewski, *Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 23 (1950), p. 112-196.

[20] В. А. Якубович, *Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. III. Абсолютная устойчивость систем с запаздыванием*, Автоматика и телемеханика 26 (1965), p. 753-763.

[21] T. Yoshizawa, *Stability of sets and perturbed systems*, Funkcialaj Ekvacioj 5 (1963), p. 31-69.

SÉMINAIRE MATHÉMATIQUE „A. MYLLER” UNIVERSITÉ DE JASSY

Reçu par la Rédaction le 21. 10. 1965