

UN PROBLÈME DE VIBRATIONS NON LINÉAIRES

PAR

I. BARBĂLAT ET A. HALANAY (BUCAREST)

Considérons le système

$$(1) \quad \begin{aligned} m_2 \ddot{x}_2 + F(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_2(x_2 - x_1) &= 0, \\ m_1 \ddot{x}_1 - F(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - c_2(x_2 - x_1) &= c_1[h(t) - x_1] + k_1[\dot{h}(t) - \dot{x}_1] \end{aligned}$$

où  $m_i, k_1$  et  $c_i$  sont des constantes positives,  $h$  est une fonction deux fois dérivable, bornée ainsi que ses deux dérivées premières dans l'ensemble  $R$  des nombres réels,  $F(z) = k_2 z + k_2 \Phi(z)$ ,  $k_2$  étant une constante positive,  $\Phi$  étant une fonction dérivable et telle que  $\Phi(0) = 0$  et  $0 \leq \Phi'(z) \leq \mu_0$ .

Ce système intervient dans l'étude de la suspension des automobiles; le modèle linéaire (où  $\Phi \equiv 0$ ) a été étudié par Mitschke (voir [2]).

Nous allons montrer que le système (1) a une solution unique bornée dans  $R$ , exponentiellement stable; si la fonction  $h$  est périodique, cette solution est périodique; si  $h$  et  $\dot{h}$  sont presque-périodiques, cette solution est presque-périodique.

Nous obtiendrons également des évaluations pour

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \ddot{x}_2^2 dt, \quad \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}_2^2 dt, \\ \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1)^2 dt \quad \text{et} \quad \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 dt. \end{aligned}$$

Ces évaluations peuvent être d'un certain intérêt dans l'étude des suspensions des automobiles; la première est liée au confort de ces voitures.

Un modèle non-linéaire à 1 degré de liberté a été étudié par nous, Filotti et Gündisch dans la communication [1].

**1.** Posons  $y_2 = x_2, y_1 = x_2 - x_1, c_2/m_1 = \alpha, c_2/m_2 = \beta, c_1/m_1 = \delta, k_2/m_1 = \mu\alpha, k_2/m_2 = \mu\beta, k_1/m_1 = \mu\gamma, \mu = k_2/c_2$ ; le système (1) prend

alors la forme

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 + \mu(\alpha + \beta + \gamma)\dot{y}_1 - \mu\gamma\dot{y}_2 + (\alpha + \beta + \delta)y_1 - \delta y_2 + \mu(\alpha + \beta)\Phi(\dot{y}_1) \\ = -\delta h - \mu\gamma\dot{h}, \\ (2) \quad \ddot{y}_2 + \mu\beta\dot{y}_1 + \mu\beta\Phi(\dot{y}_1) + \beta y_1 = 0. \end{aligned}$$

Posons encore

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \mu(\alpha + \beta + \gamma) & -\mu\gamma \\ \mu\beta & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha + \beta + \delta & -\delta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, \\ b = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \beta \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} -\delta h - \mu\gamma\dot{h} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le système (2) devient alors  $\dot{y} + Ay + \mu b\Phi(a^*y) + By = p(t)$ .  
Soient

$$u = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ -B & -A \end{pmatrix}$$

où  $E_2$  est la matrice unité de dimension 2,

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}.$$

Alors  $u$  satisfait au système

$$(3) \quad du/dt = Uu - \mu\tilde{b}\Phi(\sigma) + \tilde{p}(t), \quad \sigma = \tilde{a}^*u.$$

Appliquons au système (3) un théorème de Yakubovič ([3], p. 1022). Vu que la matrice  $U$  est stable (ses valeurs propres sont dans le demi-plan  $\text{Re } z < 0$ ) et que  $\Phi$  est croissante, ce théorème assure l'existence d'une solution bornée unique et exponentiellement stable (qui dans le cas périodique est périodique et dans le cas presque-périodique est presque-périodique) lorsque la condition de Popov

$$(4) \quad \frac{1}{\mu_0} + \text{Re } \tilde{a}^*(U - i\omega E_4)^{-1}(-\mu\tilde{b}) > 0$$

est satisfaite. Or la condition (4) se réduit à

$$[(\alpha + \beta)^2 + \gamma\alpha]\omega^4 - \beta\omega^2[2(\alpha + \beta)\delta - \mu^2\beta\gamma^2] + \beta^2\delta^2 > 0$$

et elle est vérifiée quelles que soient les constantes positives  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  et  $\mu$ .

2. Soit  $h_0 = \delta h + \mu\gamma\dot{h}$ . On déduit du système (2) l'égalité

$$\begin{aligned} (5) \quad & \frac{\mu(\alpha + \gamma)}{T} \int_0^T \dot{y}_1^2 dt + \frac{\mu\alpha}{T} \int_0^T \Phi(\dot{y}_1)\dot{y}_1 dt + \frac{\mu\gamma}{T} \int_0^T \dot{y}_2^2 dt \\ & = \frac{2\mu\gamma}{T} \int_0^T \dot{y}_1\dot{y}_2 dt + \frac{1}{T} \int_0^T h_0\dot{y}_2 dt - \frac{1}{T} \int_0^T h_0\dot{y}_1 dt + \varepsilon(T) \end{aligned}$$

où  $\lim_{T \rightarrow \infty} \varepsilon(T) = 0$ .

Soit

$$L_1^2 = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{y}_1^2 dt, \quad L_2^2 = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{y}_2^2 dt, \quad A_1^2 = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T h_0^2 dt.$$

Vu que  $\Phi(\dot{y}_1)\dot{y}_1 \geq 0$ , on conclut de (5) que  $\mu(\alpha + \beta)L_1^2 + \mu\gamma L_2^2 \leq 2\mu\gamma L_1 L_2 + A_1(L_1 + L_2)$ , ce qui conduit aux évaluations

$$L_1 \leq \frac{2 + \sqrt{2 + k_2/k_1}}{2k_2/k_1} \left( \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \left( \frac{c_1}{k_1} h + \dot{h} \right)^2 dt \right)^{1/2},$$

$$L_2 \leq \frac{k_2/k_1 + 2 + \sqrt{(k_2/k_1 + 2)^2 + k_2/k_1}}{2k_2/k_1} \left( \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \left( \frac{c_1}{k_1} h + \dot{h} \right)^2 dt \right)^{1/2}.$$

En effectuant les mêmes calculs pour le système qui résulte du système (2) par dérivation, on arrive aux évaluations

$$M_1 \leq \frac{2 + \sqrt{2 + k_2/k_1}}{2k_2/k_1} \left( \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{c_1}{k_1} \dot{h} + \ddot{h} \right)^2 dt \right)^{1/2},$$

$$M_2 \leq \frac{k_2/k_1 + 2 + \sqrt{(k_2/k_1 + 2)^2 + k_2/k_1}}{2k_2/k_1} \left( \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{c_1}{k_1} \dot{h} + \ddot{h} \right)^2 dt \right)^{1/2}$$

où

$$M_1^2 = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{y}_1^2 dt \quad \text{et} \quad M_2^2 = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{y}_2^2 dt.$$

Ces évaluations sont valables pour toutes les solutions du système (2) et elles ne dépendent pas des conditions initiales. Les constantes qui y interviennent peuvent être considérées comme caractéristiques pour toute la classe des systèmes (1) avec la fonction  $\Phi$  ayant les propriétés sus-indiquées.

Il est désirable, pour certaines raisons, que l'évaluation pour  $M_2$ , qui est la plus intéressante, du point de vue pratique, fasse intervenir toutes les constantes du système (1) et pas la fonction  $\dot{h}$ . Pour parvenir à une telle évaluation on n'a qu'à partir de la relation

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha + \beta}{T} \int_0^T \ddot{y}_2^2 dt - \frac{\mu\gamma\beta}{T} \int_0^T \dot{y}_1 \ddot{y}_2 dt + \frac{\beta\delta}{T} \int_0^T \dot{y}_1 \dot{y}_2 dt - \frac{\beta^2}{T} \int_0^T \dot{y}_1^2 dt - \frac{\beta\delta}{T} \int_0^T \dot{y}_2^2 dt \\ & = \frac{\beta}{T} \int_0^T h_0 \dot{y}_2 dt + \varepsilon(T), \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \varepsilon(T) = 0, \end{aligned}$$

qui s'ensuit facilement du système (2), et d'en tirer l'inégalité

$$(\alpha + \beta)M_2^2 \leq \mu\beta\gamma L_1 M_2 + \beta A_1 M_2 + \beta\delta L_1 L_2 + \beta^2 L_1^2 + \beta\delta L_2^2,$$

qui conduit à l'évaluation requise pour  $M_2$ .

Remarques. Pour aboutir à des conclusions plus intéressantes du point de vue pratique, il faudrait disposer des évaluations faisant intervenir plus d'informations sur la fonction  $\Phi$ ; de telles évaluations pourraient guider les constructeurs dans le choix du type de la suspension.

Au point de vue mathématique, il serait intéressant d'avoir des résultats analogues pour les systèmes d'une forme plus générale et de formuler des conditions permettant de remplacer dans les évaluations la limite supérieure par la limite.

#### TRAVAUX CITÉS

[1] I. Barbălat, I. Filotti, O. Gündisch et A. Halanay, *Un problème des vibrations non-linéaires de l'étude de la suspension de l'automobile* (en roumain), Conférence sur les mécaniques, Bucarest, Septembre 1965.

[2] M. Mitschke, *Schwingungsverhalten und Sicherheit eines Fahrzeugs*, Automobiltechnische Zeitschrift 60 (1958), p. 168-175.

[3] В. А. Якубович, *Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем*, I. Абсолютная устойчивость вынужденных колебаний, Автоматика и Телемеханика 25 (1964), p. 1017-1029.

Reçu par la Rédaction le 16. 12. 1965