by u. On the other hand, $\{f_n; n = 1, 2, \ldots\}$ is a linearly independent system by one of the remarks in section 2. Contradiction. Hence, L must be of finite dimension.

References

[1] H. Freudenthal, *Teilweise geordnete Moduln*, Proc. Acad. Amsterdam 39 (1936), p. 641-651.

[2] S. Kakutani, *Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem*, Annals of Math. 42 (1941), p. 523-537.

[3] — *Concrete representation of abstract (M)-spaces*, ibidem 42 (1941), p. 994-1024.

[4] L. V. Kantorovitch, *Sur les propriétés des espaces semiordonnés linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris 202 (1936), p. 813-816.

[5] — *Linear partially ordered spaces*, Mat. Sbornik (N. S.) (2) 44 (1937), p. 121-168.

[6] H. Nakano, *Teilweise geordnete Algebra*, Japanese J. Math. 17 (1941), p. 425-511.

[7] — *Eine Spektraltheorie*, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan (3) 23 (1941), p. 485-511.

[8] — *Stetige lineare Funktionale auf dem teilweise geordneten Modul*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1, 4 (1942), p. 201-382.

[9] T. Ogasawara, *Theory of vector lattices I, II*, J. Sci. Hiroshima Univ. A 12 (1942), p. 37-100, and A 13 (1944), p. 41-161 (in Japanese).

[10] F. Riesz, *Sur la décomposition des opérations fonctionnelles linéaires*, Atti del. Congr. Internaz. dei Mat., Bologna 1928, 3 (1930), p. 143-148; *Oeuvres complètes II*, Budapest 1960, p. 1097-1102.

[11] — *Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires*, Annals of Math. 41 (1940), p. 174-206.

[12] B. Z. Vulikh, *Introduction to the theory of partially ordered spaces*, Moscow 1961; English translation — Groningen 1967.

[13] K. Yosida, *Vector lattices and additive set functions*, Proc. Imp. Acad. Tokyo 17 (1940), p. 228-232.

[14] — *On the representation of the vector lattice*, ibidem 18 (1942), p. 339-342.

LEIDEN UNIVERSITY

Reçu par la Rédaction le 22. 2. 1968

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXI. (1968)

Invariante Masse positiver Kontraktionen in $C(X)$

von

T. ANDO* (Tübingen und Sapporo)

Herrn Professor Stanisław Mazur
und Herrn Professor Władysław Orlicz
zum 40. Jubiläum ihrer wissenschaftlichen Forschung
in Verehrung gewidmet

1. Einleitung. Wir betrachten einen kompakten Hausdorffraum X, der quasi-stonesch ist, d.h. der Banachverband $C(X)$ ist bedingt σ-ordnungsvollständig, und einen positiven Operator T in $C(X)$, der konstante Funktionen invariant lässt (einen Markov-operator). Bekanntlich erscheinen solche Voraussetzungen oft in der Theorie der messbaren Abbildungen und in der Theorie der Markov-prozesse, wenn man den Körper aller messbaren Mengen (modulo Nullmengen) mit dem Körper aller offen-abgeschlossenen Teilmengen eines kompakten Hausdorffraumes identifiziert.

Extremalpunkte der Menge aller T^*-invarianten Wahrscheinlichkeitsmasse sind sogenannte ergodische Masse. Ein ergodisches Mass mit minimalem Träger ist von Interesse in Zusammenhang mit der letzten Arbeit von Schaefer [4]. Zunächst stellen wir die Frage: Wieviele ergodische Masse können mit einem gegebenen minimal-ergodischen Mass gemeinsamen Träger haben? Hierfür stellt Theorem 1 die “1 oder ∞” Regel auf.

In bezug auf die σ-Ordnungsvollständigkeit von $C(X)$ zeichnen sich ordnungsstetige Masse und Operatoren aus, die wir σ-additiv nennen. Wir stellen dann die Frage: Wann sind alle invariante Masse eines σ-additiven Operators σ-additiv? Theorem 2 antwortet darauf mit dem Mittelergodensatz und der endlichen Dimension der Menge aller invarianten Funktionen.

Umgekehrt behandeln wir auch die Frage: Wann kann kein σ-additives Mass invariant sein? Eine Antwort darauf ergibt sich aus der Charakterisierung (Theorem 3) des von allen σ-additiven, invarianten Massen annullierten Bandes. Aus Theorem 3 folgt auch die von Ito [2] bewiesene

* Forschungsstipendiat der Alexander von Humboldt-Stiftung.

Bedingung für die Existenz eines strikt positiven, σ-additiven, invarianten Masses.

Die Abschnitte 2 und 3 enthalten die wichtigsten Definitionen und Hilfsmittel.

2. Quasi-stonesche Räume. X sei ein kompakter Hausdorffraum, und $C(X)$ bezeichne den Banachraum aller stetigen, reellen Funktionen auf X. $C(X)$ bildet dann einen Verband bezüglich der natürlichen Ordnung, wobei Norm und Ordnung durch die folgende Beziehung verbunden sind: $\|f\| \leqslant 1$ und $-1 \leqslant f \leqslant 1$ sind gleichbedeutend, wenn 1 die konstante Funktion mit dem Wert 1 bezeichnet. Das Infimum g einer Folge $\{f_n\}$ in $C(X)$ wird, wenn es existiert, durch die Eigenschaft $g(x) = \inf f_n(x)$ bis auf einer Menge der ersten Kategorie charakterisiert.

X heisst *quasi-stonesch*, wenn der Banachverband $C(X)$ bedingt σ-ordnungsvollständig ist, d.h. wenn jede beschränkte Folge ein Infimum (und ein Supremum) besitzt. Ist X quasi-stonesch, kann man in $C(X)$ für jede beschränkte Folge $\{f_n\}$ den Oberlimes (o)-$\overline{\lim} f_n$ und Unterlimes (o)-$\underline{\lim} f_n$ einführen:

$$(\mathrm{o})\text{-}\overline{\lim} f_n = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{k=n}^{\infty} f_k \quad \text{und} \quad (\mathrm{o})\text{-}\underline{\lim} f_n = \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{k=n}^{\infty} f_k .$$

Stimmen beide überein, so wird der gemeinsame Limes mit (o)-$\lim f_n$ bezeichnet.

Ein Unterraum J von $C(X)$ heisst *Ideal*, wenn aus $|g| \leqslant |f|, f \in J$, stets $g \in J$ folgt. Jedes abgeschlossene Ideal J hat die Gestalt

$$J = \{f \mid f(x) = 0 \text{ für alle } x \in Y\}$$

mit einer eindeutig durch J bestimmten, kompakten Teilmenge Y von X. Y heisst *Träger* des Ideals J. Ausserdem ist bekannt, dass der Quotienten-Banachverband $C(X)/J$ dem Banachverband $C(Y)$ isometrisch-isomorph ist. Jedem Ideal J entspricht das Ideal

$$J^{\perp} = \{g \mid |g| \wedge |f| = 0 \text{ für alle } f \in J\}.$$

Gilt $C(X) = J + J^{\perp}$, so ist das Ideal J ein *Band*. Offenbar ist ein abgeschlossenes Ideal genau dann ein Band, wenn sein Träger eine offene Menge ist.

Ein *Mass* auf X ist eine stetige Linearform auf $C(X)$. Ein Mass φ heisst *possitiv* (bzw. *strikt positiv*), wenn für jedes $0 < f \in C(X)$ stets $0 \leqslant \varphi(f)$ (bzw. $0 < \varphi(f)$) gilt. Unter diesem Positivitätsbegriff bildet der Raum $M(X)$ aller Masse einen Banachverband, in dem das Infimum von $\varphi, \psi \in M(X)$ wie folgt eindeutig bestimmt ist: Für jedes $0 \leqslant f \in C(X)$

$$(1) \qquad (\varphi \wedge \psi)(f) = \inf\{\varphi(f-g) + \psi(g) \mid 0 \leqslant g \leqslant f\}.$$

Zwei Masse φ und ψ heissen *disjunkt*, wenn $|\varphi| \wedge |\psi| = 0$. Ein positives Mass mit Norm 1 nennt man *Wahrscheinlichkeitsmass*. Das einfachste Beispiel dafür liefert das *Diracmass* δ_x mit $\delta_x(f) = f(x)$ für ein $x \in X$. Für jedes Mass φ bezeichnet man mit J_φ das Ideal aller $f \in C(X)$ mit $|\varphi|(|f|) = 0$ und nennt den Träger von J_φ den Träger von φ.

Nun sei X quasi-stonesch. Ein Mass φ heisst *σ-additiv*, wenn für jede absteigende Folge $\{f_n\}$ mit $\bigwedge_n f_n = 0$ stets $\inf |\varphi|(f_n) = 0$ gilt. Dann gilt für jedes positive σ-additive Mass φ und jede beschränkte Folge $\{f_n\}$,

$$(2) \qquad \varphi\big((\mathrm{o})\text{-}\underline{\lim} f_n\big) \leqslant \underline{\lim}\, \varphi(f_n) \leqslant \overline{\lim}\, \varphi(f_n) \leqslant \varphi\big((\mathrm{o})\text{-}\overline{\lim} f_n\big) \leqslant \inf_n \sum_{k=n}^{\infty} \varphi(|f_k|).$$

Ein Mass heisst *rein endlich-additiv*, wenn es zu allen σ-additiven Massen disjunkt ist. Die Menge M_σ aller σ-additiven Masse und die Menge M_r aller rein endlichadditiven Masse zusammen spannen $M(X)$ auf, d.h. $M(X) = M_\sigma + M_r$. Also hat jedes positive Mass φ eine eindeutige Zerlegung: $\varphi = \varphi_\sigma + \varphi_r$ mit positivem, σ-additivem φ_σ und positivem, rein endlich-additivem φ_r.

Nun besitze X ein strikt positives, σ-additives Mass φ. Dann ist $C(X)$ sogar bedingt ordnungsvollständig, d.h. jede beschränkte Teilmenge von $C(X)$ hat ein Infimum (und ein Supremum), denn zu jeder nach oben gerichtete, beschränkte Teilmenge $\{f_\lambda\}$ existiert eine steigende Teilfolge $\{f_{\lambda_n}\}$ mit

$$\sup_\lambda \varphi(f_\lambda) = \sup_n \varphi(f_{\lambda_n})$$

und man kann leicht zeigen, dass $\bigvee_n f_{\lambda_n}$ auch das Supremum von $\{f_\lambda\}$ ist. Für jedes σ-additive Mass ψ ist J_ψ ein Band, denn zu jedem $0 \leqslant f$ existiert das Supremum h der Menge $\{g \mid 0 \leqslant g \leqslant f \text{ und } g \in J_\psi\}$ und stimmt mit dem Supremum einer Teilfolge überein. Also gehört auch h zu J_ψ wegen der σ-Additivität von $|\psi|$, und offenbar gehört $f-h$ zu $J_\psi^{\perp}$. Man kann ebenfalls beweisen, dass für jede Teilmenge $\{\psi_\lambda\}$ von M_σ das Ideal $\bigcap_\lambda J_{\psi_\lambda}$ ein Band ist.

LEMMA 1. *Es seien φ und ψ positive, disjunkte Masse auf einem quasi-stoneschen Raum X. Ist φ σ-additiv mit $\varphi(f) > 0$ für ein $f > 0$, existiert ein $0 < g \leqslant f$ mit $\varphi(g) > 0$ und $\psi(g) = 0$. Ist auch ψ σ-additiv, so kann zusätzlich die Beziehung $\varphi(g) = \varphi(f)$ verlangt werden.*

Beweis. Aus (1) folgt die Existenz einer Folge $\{g_n\}$ mit $0 \leqslant g_n \leqslant f$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{\varphi(f-g_n) + \psi(g_n)\} < \infty .$$

Da φ σ-additiv ist, folgt aus (2)

$$\varphi(f)-\varphi\big((\mathrm{o})\text{-}\underline{\lim}\, g_n\big) = \varphi\big((\mathrm{o})\text{-}\overline{\lim}\,(f-g_n)\big) = 0 .$$

Ist auch ψ σ-additiv, so folgt nochmals aus (2) $\psi\big((\mathrm{o})\text{-}\underline{\lim}\, g_n\big) = 0$, also kann man als g hier die Funktion $(\mathrm{o})\text{-}\underline{\lim}\, g_n$ nehmen. Allgemein gilt wegen der σ-Additivität von φ,

$$\varphi(f) = \sup_n \varphi\big(\bigwedge_{k=n}^{\infty} g_k\big).$$

Also ist für genügend grosses n

$$\varphi\big(\bigwedge_{k=n}^{\infty} g_k\big) > 0 \quad \text{und} \quad \psi\big(\bigwedge_{k=n}^{\infty} g_k\big) = 0,$$

und man kann als g die Funktion $\bigwedge_{k=n}^{\infty} g_k$ nehmen.

Ausser der Normtopologie führt man zwei andere lineare Topologie in $M(X)$ ein: die eine ist die *schwach**-Topologie, die von allen Linearformen $\varphi \to \varphi(f)$ erzeugt wird, wobei f ganz $C(X)$ durchläuft. Die andere ist die *schwache* Topologie, die von allen stetigen Linearformen auf $M(X)$ erzeugt wird. Bekanntlich ist die Einheitskugel von $M(X)$ schwach*-kompakt.

3. Kontraktionen in $C(X)$. X sei ein kompakter Hausdorffraum und T ein linearer Operator in $C(X)$. Eine Funktion f (bzw. ein Masss φ) heisst *invariant*, wenn $Tf = f$ (bzw. $T^*\varphi = \varphi$, wo T^* den adjungierten Operator von T bezeichnet). Mit N_T (bzw. N_{T^*}) wird die Menge aller invarianten Funktionen (bzw. aller invarianten Masse) bezeichnet. Ein Unterraum M von $C(X)$ (bzw. von $M(X)$) heisst ebenso invariant, wenn $TM \subseteq M$ (bzw. $T^*M \subseteq M$). Für jeden invarianten Unterraum M von $C(X)$ ist seine *polare* Menge

$$M^0 = \{\varphi \mid \varphi(f) = 0 \text{ für alle } f \in M\}$$

ein schwach*-abgeschlossener, invarianter Unterraum von $M(X)$.

Ein linearer Operator T mit $\|T\| \leqslant 1$ heisst *Kontraktion*. T_n bezeichnet das arithmetische Mittel von $T^0, T^1, \ldots, T^{n-1}$, d.h.

$$T_n = n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1} T^j.$$

Zugleich mit T ist auch jedes T_n eine Kontraktion, und jede Folge $\{T_n^*\varphi\}$ besitzt mindestens einen schwach*-Häufungspunkt, der immer invariant ist.

Lemma 2. *X sei ein quasi-stonescher Raum und T eine Kontraktion in $C(X)$. Für ein Mass φ folgt die Normkonvergenz der Folge $\{T_n^*\varphi\}$ aus der schwach*-Konvergenz irgendeiner Teilfolge $\{T_{n_k}^*\varphi\}$.*

Beweis. Nach einem Satz in meiner früheren Arbeit [1] (siehe auch [5]) folgt aus der schwach*-Konvergenz einer Folge in $M(X)$ sogar die schwache Konvergenz. Nun ergibt sich die Behauptung durch Anwendung des Mittelergodensatzes (siehe [6], VIII—3).

Lemma 3. *X sei ein quasi-stonescher Raum und T eine Kontraktion in $C(X)$. Ist M ein schwach*-abgeschlossener, invarianter Unterraum von $M(X)$ mit* $\dim(M \cap N_{T^*}) < \infty$, *so gilt die Normkonvergenz der Folge $\{T_n^*\varphi\}$ für jedes $\varphi \in M$.*

Beweis. Da der abgeschlossene Unterraum

$$G = \{f \mid \psi(f) = 0 \text{ für alle } \psi \in M \cap N_{T^*}\}$$

endliche Kodimension in $C(X)$ hat, existiert ein endlich dimensionaler Unterraum H mit $C(X) = G+H$. Wegen der endlichen Dimension von H kann man solch eine Teilfolge $\{T_{n_k}^*\varphi\}$ wählen, dass für jedes $h \in H$ die Folge $\{T_{n_k}^*\varphi(h)\}$ konvergiert. Andererseits ist jeder Häufungspunkt der Folge $\{T_{n_k}^*\varphi(g)\}$ für jedes $g \in G$ gleich $\psi(g)$, wobei ψ ein schwach*-Häufungspunkt der Folge $\{T_{n_k}^*\varphi\}$ ist. Da M ein schwach*-abgeschlossener, invarianter Unterraum ist, folgt $\psi \in M \cap N_{T^*}$, also $\psi(g) = 0$. Dies bedeutet aber, dass die Folge $\{T_{n_k}^*\varphi(g)\}$ Null als den einzigen Häufungspunkt hat. Also konvergiert sie gegen 0. Aus der Beziehung $C(X) = G+H$ kann man die schwach*-Konvergenz der Folge $\{T_{n_k}^*\varphi\}$ folgern. Nun folgt die Behauptung aus Lemma 2.

Ein linearer Operator T in $C(X)$ heisst *positiv* (bzw. *strikt positiv*), wenn für jedes $f > 0$ stets $Tf \geqslant 0$ (bzw. $Tf > 0$) gilt. Einen positiven Operator T mit $T\mathbf{1} = \mathbf{1}$ nennt man *Markov-operator*. Ein Markov-operator ist eine besondere Kontraktion, die die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmasse invariant lässt. Zugleich mit T ist jedes arithmetische Mittel T_n wieder ein Markov-operator. Jede stetige Abbildung τ von X in sich erzeugt einen Markov-operator: $Tf(x) = f(\tau x)$ für $x \in X$ und $f \in C(X)$.

Nun sei X quasi-stonesch. Ein positiver Operator T heisst *σ-additiv*, wenn für jede absteigende Folge $\{f_n\}$ mit $\bigwedge_n f_n = 0$ stets $\bigwedge_n Tf_n = 0$ gilt. Zugleich mit T auch jedes T_n σ-additiv. Für jeden σ-additiven Operator T und jede beschränkte Folge $\{f_n\}$ gilt:

$$(3) \qquad T\big((\mathrm{o})\text{-}\underline{\lim}\, f_n\big) \leqslant (\mathrm{o})\text{-}\underline{\lim}\, Tf_n \leqslant (\mathrm{o})\text{-}\overline{\lim}\, Tf_n \leqslant T\big((\mathrm{o})\text{-}\overline{\lim}\, f_n\big).$$

Jeder σ-additive Operator lässt die Menge aller σ-additiven Masse invariant. Umgekehrt charakterisiert diese Eigenschaft die σ-Additivität eines positiven Operators, wenn X ein strikt positives, σ-additives Mass zulässt.

Jedes Band J von $C(X)$ bestimmt eindeutig eine positive Projektion P_J mit der Eigenschaft: $P_J f = f$ für alle $f \epsilon J$ und $P_J g = 0$ für alle $g \epsilon J^{\perp}$. Offenbar erhält die Projektion P_J σ-Verbandsoperationen, d.h. für jede beschränkte Folge $\{f_n\}$ gilt

$$(4)\qquad P_J\big(\bigvee_n f_n\big) = \bigvee_n P_J f_n \quad \text{und} \quad P_J\big(\bigwedge_n f_n\big) = \bigwedge_n P_J f_n.$$

Lemma 4. *X sei ein quasi-stonescher Raum mit einem strikt positiven, σ-additiven Mass, und T eine positive Kontraktion in $C(X)$. Ist ψ ein σ-additives, positives, invariantes Mass, so existiert* (o)-$\lim PT_n f$ *zu jedem $f \epsilon C(X)$, wo P die $J_\psi^{\perp}$ entsprechende Projektion ist.*

Beweis. Den Operator PT kann man als eine Kontraktion in $C(Y)$ und ψ als ein strikt positives, σ-additives Mass auf Y ansehen, wobei Y der Träger von ψ ist. Nach dem Ergodensatz von Chacon-Ornstein (siehe [6], XIII—2) existiert zu jedem $g \epsilon C(Y)$ der Limes

$$\text{(o)-}\lim_n n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1}(PT)^j g.$$

Andererseits ist das Ideal J_ψ invariant, denn aus $\psi(|f|) = 0$ folgt

$$0 \leqslant \psi(|Tf|) \leqslant \psi(T|f|) = \psi(|f|) = 0.$$

Auf Grund dieser Invarianz kann man durch Induktion zeigen, dass

$$PT_n = n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1}(PT)^j P \quad \text{für alle } n,$$

also existiert (o)-$\lim PT_n f$ zu jedem $f \epsilon C(X)$.

4. Minimal-ergodische Masse. X sei ein kompakter Hausdorffraum und T ein Markov-operator in $C(X)$. Dann ist N_{T^*} ein Unterverband von $M(X)$. Ein invariantes Mass heisst *ergodisch*, wenn es ein Extremalpunkt der Menge aller invarianten Wahrscheinlichkeitsmasse ist. Ein ergodisches Mass φ heisst *minimal*, wenn es kein ergodisches Mass mit kleinerem Träger als φ gibt. Die Träger von zwei verschiedenen minimal-ergodischen Massen sind entweder gleich oder disjunkt (siehe [4]).

Schaefer [4] zeigte: Gilt für jedes $f \epsilon C(X)$ stets die Normkonvergenz der Folge $\{T_n f\}$, so ist jedes ergodische Mass minimal und zwei verschiedene ergodische Masse haben verschiedene Träger.

Theorem 1. *X sei ein quasi-stonescher Raum und T ein Markov-operator in $C(X)$. Ist φ ein minimal-ergodisches Mass mit Träger Y, so ist die Anzahl der verschiedenen ergodischen Masse mit Träger Y entweder 1 oder ∞.*

Beweis. Angenommen, die Anzahl sei weder 1 noch ∞, d.h. genau die ergodischen Masse $\varphi_1(=\varphi), \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ $(m > 1)$ haben den Träger Y. Wegen der Disjunktheit von φ und $\psi = \varphi_2 + \ldots + \varphi_m$ kann man nach (1) zwei Folgen $\{f_n\}$ und $\{g_n\}$ mit $0 \leqslant f_n \leqslant 1$, $f_n + g_n = 1$ und

$$\inf_n\{\varphi(f_n) + \psi(g_n)\} = 0$$

finden. Da φ und ψ invariant sind, gilt auch

$$\inf_n\{\varphi(T_k f_n) + \psi(T_k g_n)\} = 0 \quad \text{für alle } k.$$

Daraus folgt, weil φ und ψ strikt positive Masse auf Y sind,

$$\bigwedge_n (T_k f_n)^{\sim} = \bigwedge_n (T_k g_n)^{\sim} = 0 \quad \text{für alle } k,$$

wobei $\sim$ die Einschränkung auf Y bezeichnet. Dann gilt

$$\inf_n (T_k f_n)^{\sim}(y) = 0 \quad \text{für jedes } k$$

bis auf einer Menge der ersten Kategorie und ebenfalls für $\{T_k g_n\}$. Also existiert ein Punkt $x \epsilon Y$ mit der Eigenschaft:

$$\inf_n T_k f_n(x) = \inf_n T_k g_n(x) = 0 \quad \text{für alle } k.$$

Das Diracmass δ_x gehört zu dem schwach*-abgeschlossenen Unterverband J_φ^0 von $M(X)$. Da jeder Extremalpunkt der Menge aller invarianten Wahrscheinlichkeitsmasse in J_φ^0 schon ergodisch ist, ergibt sich nach dem Satz von Krein-Milman (siehe [6], XII—1), dass $J_\varphi^0 \cap N_{T^*}$ die schwach*-abgeschlossene, lineare Hülle von $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ ist, also gilt $\dim(J_\varphi^0 \cap N_{T^*}) < \infty$. Nun normkonvergiert die Folge $\{T_n^* \delta_x\}$ nach Lemma 3, und der Limes hat die Gestalt

$$\sum_{j=1}^{m} a_j\varphi_j \quad \text{mit } a_j \geqslant 0 \text{ und } \sum_{j=1}^{m} a_j = 1,$$

weil T ein Markov-operator ist. Dann gelten für genügend grosses k die Ungleichungen:

$$\Big|T_k f_n(x) - \sum_{j=1}^{m} a_j\varphi_j(f_n)\Big| < 1/2m^2$$

und

$$\Big|T_k g_n(x) - \sum_{j=1}^{m} a_j\varphi_j(g_n)\Big| < 1/2m^2.$$

Da man voraussetzen kann

$$\varphi(g_n),\ \varphi_j(f_n) > 1/m \quad \text{für } j = 2, \ldots, m \text{ und für alle } n,$$

ergibt sich
$$\alpha_1/m \leqslant \alpha_1 \varphi(g_n) \leqslant T_k g_n(x) + 1/2m^2$$
und
$$\alpha_j/m \leqslant \alpha_j \varphi_j(f_n) \leqslant T_k f_n(x) + 1/2m^2 \quad \text{für alle } n,$$
also auch für das Infimum bezüglich n. Dann gilt
$$\alpha_j \leqslant 1/2m \quad \text{für } j = 1, 2, \ldots, m,$$
was zum Widerspruch
$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j < 1$$
führt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

PROPOSITION 1. *X sei ein quasi-stonescher Raum und T der von einer stetigen Abbildung τ erzeugte Markov-operator in $C(X)$. Zu jedem minimal-ergodischen Mass φ, dessen Träger unendlich viele Punkte enthält, gibt es unendlich viele verschiedene, ergodische Masse mit einem mit φ gemeinsamen Träger.*

Beweis. x sei ein Punkt im Träger von φ. Alle $\tau^i x$ sind verschieden, denn anderenfalls würde aus $\tau^k x = \tau^j x$ mit $k < j$ folgen, dass
$$\psi_1 = (j-k)^{-1} \sum_{i=k}^{j-1} \delta_{\tau^i x}$$
ein invariantes Mass mit einem kleineren Träger als φ ist. Die Folge $\{T_n^* \delta_x\}$ kann nicht normkonvergieren, denn anderenfalls müsste der Limes ψ_2 die Gestalt
$$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \delta_{\tau^j x} \quad \text{mit } \alpha_j \geqslant 0 \text{ und } \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j = 1$$
haben. Aber aus $T^* \psi_2 = \psi_2$ würde $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots$ folgen, was widerspruchsvoll ist. Nun folgt aus Lemma 3
$$\dim(J_\varphi^0 \cap N_{T^*}) = \infty.$$

Da $J_\varphi^0 \cap N_{T^*}$ die schwach*-abgeschlossene, lineare Hülle der Menge aller ergodischen Masse mit dem mit φ gemeinsamen Träger ist, existieren unendlich viele solcher Masse.

Ein Spezialfall dieser Proposition wurde von Rudin [3] bewiesen.

5. Wann sind alle invarianten Masse σ-additiv? Da ein σ-additiver Operator die Menge aller σ-additiven Masse invariant lässt, interessiert uns der Fall, in dem sogar alle invarianten Masse σ-additiv sind. Das folgende Theorem zeigt, dass ein solcher Fall selten auftritt:

THEOREM 2. *X sei ein quasi-stonescher Raum und T ein σ-additiver Markov-operator in $C(X)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *Alle invarianten Masse sind σ-additiv.*

(b) *Für jedes $f \in C(X)$ normkonvergiert die Folge $\{T_n f\}$, und es ist* $\dim(N_T) < \infty$.

Beweis. Es sei (a) erfüllt. Angenommen, die Normkonvergenz gelte nicht allgemein. Dann kann man aus dem Mittelergodensatz (siehe [6], VIII—3) folgern, dass die algebraische Summe von N_T und dem Wertbereich des Operators $T-I$, wo I die Identität ist, nicht dicht in $C(X)$ ist. Der Satz von Hahn-Banach garantiert dann die Existenz eines auf der Summe verschwindenden, nichttrivialen Masses φ. Dies bedeutet aber, dass $\varphi \in N_{T^*}$ und $\varphi(f) = 0$ für jedes $f \in N_T$. Da N_{T^*} wegen der Markoveigenschaft von T ein Unterverband von $M(X)$ ist, so sind die beiden Masse φ^+ und φ^- invariant und ferner σ-additiv wegen (a). Da φ^+ und φ^- disjunkt sind, existiert nach Lemma 1 ein $0 \leqslant f \leqslant \mathbf{1}$ mit $\varphi^-(f) = 0$ und $\varphi^+(\mathbf{1}) = \varphi^+(f)$. Wegen der σ-Additivität von T und der Invarianz von φ^+ und φ^- ergibt sich auf Grund von (3) für die Funktion $g = (o)\text{-}\overline{\lim}\, T^n f$:
$$0 \leqslant g \leqslant Tg \leqslant \mathbf{1}, \quad \varphi^-(g) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi^+(\mathbf{1}) = \varphi^+(g).$$

Weiterhin besitzt die Funktion $h = \bigvee_n T^n g$ die Eigenschaft: $h \in N_T$, $\varphi^-(h) = 0$ und $\varphi^+(h) = \varphi^+(\mathbf{1})$. Daraus folgt
$$0 = \varphi(h) = \varphi^+(h) - \varphi^-(h) = \varphi^+(\mathbf{1}) = \|\varphi^+\|,$$
also wegen $\mathbf{1} \in N_T$
$$0 = -\varphi(\mathbf{1}) = \varphi^-(\mathbf{1}) = \|\varphi^-\|.$$

Hieraus folgt aber $\varphi = 0$, so dass damit die Konvergenzaussage bewiesen ist. Der Limes $Pf = \lim T_n f$ definiert eine positive Projektion auf N_T. Da das abgeschlossene Ideal $J = \{f \mid P|f| = 0\}$ invariant bezüglich P ist, so induziert P eine strikt positive Projektion $P^\sim$ in dem Banachverband $C(X)/J$. Gilt $P^\sim f^\sim = f^\sim$ und $P^\sim g^\sim = g^\sim$, wo $f^\sim$ und $g^\sim$ die kanonischen Bilder von f und g bezeichnen, ergibt sich wegen der Positivität von $P^\sim$
$$P^\sim(f^\sim \vee g^\sim) - f^\sim \vee g^\sim \geqslant 0,$$
und wegen der Idempotenz von $P^\sim$
$$P^\sim\big(P^\sim(f^\sim \vee g^\sim) - f^\sim \vee g^\sim\big) = 0.$$

Daraus folgt
$$P^\sim(f^\sim \vee g^\sim) = f^\sim \vee g^\sim,$$

weil $P^\sim$ strikt positiv ist. Dies zeigt, dass das kanonische Bild von N_T ein abgeschlossener Unterverband von $C(X)/J$ ist, der eine Ordnungseinheit enthält, weil es aus allen $f^\sim$ mit $P^\sim f^\sim = f^\sim$ besteht. Ferner ist es nach dem Satz von Kakutani (siehe [6], XII—5) zu einem Banachverband $C(Z)$ isometrisch-isomorph, wo Z ein kompakter Hausdorffraum ist. Andererseits findet die Normkonvergenz der Folge $\{Pf_n\}$ für jede beschränkte, absteigende Folge $\{f_n\}$ statt: Für jeden Punkt $x \in X$ ist nämlich das Mass $P^* \delta_x$ invariant und also σ-additiv wegen (a). Daraus folgt mit $f = \bigwedge_n f_n$

$$\lim P f_n(x) = Pf(x).$$

Daher folgt die besagte Konvergenz aus dem Satz von Dini. Dann gilt die Normkonvergenz für jede beschränkte, absteigende Folge $\{\tilde{f}_n\}$ (mit $f_n \geqslant 0$) in dem kanonischen Bild von N_T, denn die Folge $\{g_n\}$ mit

$$g_n = \bigwedge_{j=1}^{n} f_j$$

ist beschränkt und absteigend, also ist $\{Pg_n\}$ eine Cauchyfolge. Die Normkonvergenz von $\{\tilde{f}_n\}$ ergibt sich aus der Beziehung:

$$(Pg_n)^\sim = P^\sim \tilde{g}_n = \bigwedge_{j=1}^{n} P^\sim \tilde{f}_j = \tilde{f}_n.$$

Diese Konvergenz-eigenschaft in $C(Z)$ ist aber nur dann möglich, wenn $C(Z)$ endlich-dimensional ist. Schliesslich folgt die endliche Dimension von N_T aus der Eineindeutigkeit der kanonischen Abbildung auf N_T. Damit ist (b) bewiesen.

Umgekehrt sei (b) erfüllt. P bezeichne wieder die Projektion: $Pf = \lim T_n f$. Nach der Positivität von P und der endlichen Dimension von N_T hat P die Gestalt

$$Pf = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(f) g_j$$

mit $0 \leqslant g_j \in N_T$ und $0 \leqslant \varphi_j \in N_{T^*}$. Wegen der σ-Additivität von T gilt für jede absteigende Folge $\{f_n\}$ mit $\bigwedge_n f_n = 0$,

$$\inf_n T_k f_n(x) = 0 \quad \text{für alle } k,$$

bis auf eine Menge der ersten Kategorie, also auf einer dichten Menge von X. Nach Lemma 2 normkonvergiert jede Folge $\{T_n^* \delta_x\}$ gegen $P^* \delta_x$, weil für jedes f

$$\lim T_n f(x) = Pf(x)$$

gilt. Nun kann man wie im Beweis von Theorem 1 zeigen, dass $\inf_n Pf_n(x) = 0$ auf einer dichten Menge, also $\bigwedge_n Pf_n = 0$. Andererseits gilt

$$\bigwedge_n Pf_n \geqslant \sum_{j=1}^{m} \big(\inf_n \varphi_j(f_n)\big) g_j.$$

Hieraus folgt

$$\inf_n \varphi_j(f_n) = 0 \quad \text{für } j = 1, 2, \ldots, m,$$

d.h. alle φ_j sind σ-additiv. Nun folgt die Eigenschaft (a) daraus, dass $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ den Raum N_{T^*} aufspannen. Damit ist das Theorem bewiesen.

Ein positiver Operator heisst *irreduzibel*, wenn er kein echtes, abgeschlossenes Ideal invariant lässt. Jedes invariante Wahrscheinlichkeitsmass eines irreduziblen Operators ist strikt positiv. Für jeden irreduziblen Operator ist $\mathit{1}$ die bis auf einem Skalar einzige invariante Funktion (siehe [4]).

PROPOSITION 2. *X sei ein quasi-stonescher Raum mit einem σ-additiven Wahrscheinlichkeitsmass, und T ein irreduzibler Markov-operator in $C(X)$. Für jedes $f \in C(X)$ normkonvergiert die Folge $\{T_n f\}$.*

Beweis. Nach $\dim(N_T) = 1$ und dem Mittelergodensatz ist die besagte Normkonvergenz mit $\dim(N_{T^*}) = 1$ gleichbedeutend. Angenommen, es sei $\dim(N_{T^*}) > 1$. Da N_{T^*} ein Unterverband von $M(X)$ und T irreduzibel ist, gibt es zwei strikt positive, disjunkte, invariante Masse φ und ψ. φ hat die Zerlegung $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ mit σ-additivem φ_1 und rein endlich-additivem φ_2. Aus der Disjunktheit von φ und ψ folgt die von φ_1 und ψ. Nach Lemma 1 muss das zum strikt positivem Mass disjunkte σ-additive Mass φ_1 verschwinden, also ist das strikt positive Mass φ selbst schon rein endlich-additiv. Dies führt zum Widerspruch, da φ dann zum vorausgesetzten, σ-additiven Wahrscheinlichkeitsmass disjunkt ist. Damit ist die Proposition bewiesen.

Auf Grund der Propositionen 1 und 2 kann man zeigen, dass eine stetige Abbildung von X in sich kann nur dann einen irreduziblen Operator in $C(X)$ erzeugen, wenn X aus endlich vielen Punkten besteht, oder wenn X kein nichttriviales, σ-additives Mass zulässt. Man kann aber einen quasi-stoneschen Raum Y mit unendlich vielen Punkten und einen Homöomorphismus von Y angeben, der einen irreduziblen Operator erzeugt.

6. Wann sind alle invarianten Masse rein endlich-additiv? Nun wollen wir uns dem anderen Extremalfall zuwenden: Wann sind alle invarianten Masse rein endlich-additiv? Eine Antwort darauf gibt das folgende Theorem, das das Band $\bigcap J_\psi$ charakterisiert, wobei ψ die Menge aller σ-additiven, invarianten Masse durchläuft:

THEOREM 3. *X sei ein quasi-stonescher Raum mit einem strikt positiven, σ-additiven Mass, und T ein σ-additiver Markov-operator. Das kleinste Band J, das alle $f \in C(X)$ mit $(\mathrm{o})\text{-}\lim T_n|f| = 0$ enthält, stimmt mit dem Band $\bigcap J_\psi$ überein, wobei ψ die Menge aller σ-additiven, invarianten Masse durchläuft.*

Beweis. Für jedes σ-additive, invariante Mass ψ und jedes f mit $(\mathrm{o})\text{-}\lim T_n|f| = 0$ gilt wegen (2),

$$|\psi|(|f|) = \lim|\psi|(T_n|f|) = |\psi|\big((\mathrm{o})\text{-}\lim T_n|f|\big) = 0,$$

weil wegen der Markov-eigenschaft auch $|\psi|$ invariant ist. Also ist das Band J in dem Band $\bigcap J_\psi$ enthalten. Angenommen, die beiden stimmten nicht überein, d.h. es existiere ein $0 < g \in \bigcap J_\psi$, das zu jedem f mit $(\mathrm{o})\text{-}\lim T_n|f| = 0$ disjunkt sei. φ sei ein strikt positives, σ-additives Mass, und φ_1 irgendein schwach*-Häufungspunkt der Folge $\{T_n^*\varphi\}$. Es sei $\varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_3$ eine Zerlegung mit σ-additivem φ_2 und rein endlich-additivem φ_3, und ebenso sei $T^*\varphi_3 = \varphi_4 + \varphi_5$ mit σ-additivem φ_4 und rein endlich-additivem φ_5. Da φ_1 invariant und T σ-additiv ist, so ist

$$\varphi_1 = (T^*\varphi_2 + \varphi_4) + \varphi_5$$

ebenfalls eine Zerlegung von φ_1, wobei $T^*\varphi_2 + \varphi_4$ σ-additiv und φ_5 rein endlich-additiv ist. Also gilt

$$\varphi_2 = T^*\varphi_2 + \varphi_4,$$

wegen der Eindeutigkeit solcher Zerlegungen. Daraus folgt $\varphi_4 = 0$, weil φ_4 ein positives Mass mit $\varphi_4(\mathit{1}) = 0$ ist. Da nun φ_2 ein positives, σ-additives, invariantes Mass ist, ergibt sich $\varphi_2(g) = 0$. Da φ strikt positiv, σ-additiv und φ_3 rein endlich-additiv ist, existiert nach Lemma 1 ein $0 < h \leqslant g$ mit $\varphi_3(h) = 0$. Damit gilt sogar $\varphi_1(h) = 0$, weil

$$0 \leqslant \varphi_1(h) \leqslant \varphi_2(g) + \varphi_3(h) = 0.$$

Andererseits ist $\varphi_1(h)$ ein Häufungspunkt der Folge $\{\varphi(T_n h)\}$, also nach (2)

$$0 \leqslant \varphi\big((\mathrm{o})\text{-}\underline{\lim}\, T_n h\big) \leqslant \underline{\lim}\, \varphi(T_n h) \leqslant \varphi_1(h) = 0.$$

Hieraus folgt $(\mathrm{o})\text{-}\underline{\lim}\, T_n h = 0$ wegen der strikten Positivität von φ.

Es bleibt nun noch, die Existenz eines $0 < h' \leqslant h$ mit $(\mathrm{o})\text{-}\lim T_n h' = 0$ zu zeigen. Dafür genügt es zu beweisen, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $0 < h_\varepsilon \leqslant h$ mit $(\mathrm{o})\text{-}\overline{\lim}\, T_n h_\varepsilon \leqslant \varepsilon \mathit{1}$ und $\varphi(h_\varepsilon) > (1-\varepsilon)\varphi(h)$ existiert. Denn für die Funktion $h' = \bigwedge_{j=1}^{\infty} h_{2^{-j}}$ gilt

$$0 \leqslant (\mathrm{o})\text{-}\overline{\lim}\, T_n h' \leqslant \bigwedge_{j=1}^{\infty}\big((\mathrm{o})\text{-}\overline{\lim}\, T_n h_{2^{-j}}\big) = 0,$$

und wegen der σ-Additivität von φ und (2)

$$\varphi(h) - \varphi(h') \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(h - h_{2^{-j}}) < \varphi(h),$$

also $h' > 0$.

Die Existenz von h_ε wird nun wie folgt bewiesen. Mit $f = \varepsilon\mathit{1} - h$ und $S_n = nT_n$ gilt

$$f + T\Big(\bigvee_{j=1}^{n} S_j f\Big)^+ \geqslant \bigvee_{j=1}^{n} S_j f \quad \text{für alle } n,$$

weil

$$f + T(S_j f) = S_{j+1} f \quad \text{für alle } j.$$

Daraus folgt mit $g_n = \bigvee_{j=1}^{n} S_j f$,

$$\varepsilon\mathit{1} \geqslant h + g_n - T g_n^+,$$

also

$$\varepsilon\mathit{1} \geqslant h \wedge n g_n^+ + g_n^+ - T g_n^+ \quad \text{für alle } n.$$

Aus der Ungleichung

$$\begin{aligned} \varepsilon\mathit{1} = T_m(\varepsilon\mathit{1}) &\geqslant T_m(h \wedge n g_n^+) + T_m(I - T) g_n^+ \\ &= T_m(h \wedge n g_n^+) + m^{-1}(I - T^{m+1}) g_n^+ \end{aligned}$$

folgt

$$(\mathrm{o})\text{-}\overline{\lim}_m\, T_m(h \wedge n g_n^+) \leqslant \varepsilon\mathit{1} \quad \text{für alle } n.$$

Aus

$$\bigvee_{k=n}^{\infty} g_k^+ = \bigvee_{k=n}^{\infty} k\big(T_k(\varepsilon\mathit{1} - h)\big)^+ \geqslant \bigvee_{k=n}^{\infty} T_k(\varepsilon\mathit{1} - h) \geqslant \varepsilon\mathit{1} - (\mathrm{o})\text{-}\underline{\lim}\, T_n h = \varepsilon\mathit{1}$$

ergibt sich

$$\bigvee_{n=1}^{\infty} (h \wedge n g_n^+) = h.$$

Schliesslich gilt wegen der σ-Additivität von φ für genügend grosses n,

$$\varphi(h \wedge n g_n^+) > (1-\varepsilon)\varphi(h).$$

Man kann nun $h \wedge n g_n^+$ als h_ε nehmen, und die Behauptung ist bewiesen.

Aus diesem Theorem folgt leicht

PROPOSITION 3. *X sei ein quasi-stonescher Raum mit einem strikt positiven, σ-additiven Mass, und T ein σ-additiver Markov-operator in $C(X)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(A) *Alle invarianten Masse sind genau dann rein endlich-additiv, wenn zu jedem* $0 < f \in C(X)$ *ein* $0 < g \leqslant f$ *mit* $(\mathrm{o})\text{-}\lim T_n g = 0$ *existiert.*

(B) *Es existiert ein strikt positives, σ-additives, invariantes Mass genau dann, wenn aus* $(\mathrm{o})\text{-}\lim T_n |f| = 0$ *stets* $f = 0$ *folgt.*

Ito [2] bewies (B) neben vielen verschiedenen, äquivalenten Bedingungen für die Existenz eines strikt positiven, σ-additiven, invarianten Masses. Aus dem Beweis von Theorem 3 ist es klar, dass man in Theorem 3 und Proposition 3 $(\mathrm{o})\text{-}\lim T_n |f| = 0$ durch $(\mathrm{o})\text{-}\overline{\lim}\, T_n |f| = 0$ ersetzen kann. Der Übergang von $(\mathrm{o})\text{-}\underline{\lim}\, T_n h = 0$ zu $(\mathrm{o})\text{-}\overline{\lim}\, T_n h' = 0$ im Beweis von Theorem 3 stammt wesentlich von Ito [2]. Nach dem Ergodensatz (Lemma 4) kann man zusätzlich in (B) die Existenz von $(\mathrm{o})\text{-}\lim T_n g$ für jedes $g \in C(X)$ verlangen. Nun stellt sich die Frage: Wann existiert $(\mathrm{o})\text{-}\lim T_n f$ zu jedem $f \in C(X)$?

PROPOSITION 4. *X sei ein quasi-stonescher Raum mit einem strikt positiven, σ-additiven Mass, und T ein σ-additiver Markov-operator in $C(X)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Zu jedem* $f \in C(X)$ *existiert* $(\mathrm{o})\text{-}\lim T_n f$.

(ii) *Für jedes σ-additive Mass* φ *normkonvergiert die Folge* $\{T_n^* \varphi\}$.

Beweis. Es sei (i) erfüllt. Nach (2) findet die schwach*-Konvergenz der Folge $\{T_n^* \varphi\}$ für jedes positive, σ-additive Mass φ statt, also für jedes σ-additive Mass, weil es sich als Differenz von zwei positiven, σ-additiven Massen darstellen lässt. Die Normkonvergenz ergibt sich aus Lemma 2, und (ii) ist bewiesen.

Nun sei (ii) erfüllt. ψ bezeichne den Normlimes der Folge $\{T_n^* \varphi\}$, wo φ ein strikt positives, σ-additives Mass ist. Offenbar ist ψ ein positives, σ-additives, invariantes Mass. Zu jedem $f \in C(X)$ existiert nach Lemma 4 $(\mathrm{o})\text{-}\lim P T_n f$, wobei P die $J_\psi^\perp$ entsprechende Projektion ist. Da wegen (4)

$$P\big((\mathrm{o})\text{-}\overline{\lim}\, T_n f - (\mathrm{o})\text{-}\underline{\lim}\, T_n f\big) = (\mathrm{o})\text{-}\overline{\lim}\, P T_n f - (\mathrm{o})\text{-}\underline{\lim}\, P T_n f = 0$$

gilt, gehört die Funktion

$$g = (\mathrm{o})\text{-}\overline{\lim}\, T_n f - (\mathrm{o})\text{-}\underline{\lim}\, T_n f$$

zu dem Band J_ψ. Mit (3) kann man leicht zeigen, dass $Tg \geqslant g \geqslant 0$. Dann ist die Funktion $h = \bigvee_n T^n g$ invariant und gehört zu dem Band J_ψ. So ergibt sich

$$\varphi(h) = \lim \varphi(T_n h) = \psi(h) = 0,$$

also $h = g = 0$ wegen der strikten Positivität von φ. Dies besagt aber die Existenz von $(\mathrm{o})\text{-}\lim T_n f$, und (i) ist bewiesen.

Literaturnachweis

[1] T. Ando, *Convergent sequences of finitely additive measures*, Pacific J. Math. 11 (1961), S. 395-404.

[2] Y. Ito, *Invariant measures for Markov processes*, Trans. Amer. Math. Soc. 110 (1964), S. 152-184.

[3] W. Rudin, *Averages of continuous functions on compact spaces*, Duke Math. J. 25 (1958), S. 195-204.

[4] H. H. Schaefer, *Invariant ideals of positive operators in $C(X)$, I*, Ill. J. Math. 11 (1967), S. 703-715.

[5] Z. Semadeni, *On weak convergence of measures and σ-complete Boolean algebras*, Coll. Math. 12 (1964), S. 229-233.

[6] K. Yosida, *Functional analysis*, 1965.

FORSCHUNGSINSTITUT FÜR ANGEWANDTE ELEKTRIZITÄT
HOKKAIDO UNIVERSITÄT
SAPPORO, JAPAN

Reçu par la Rédaction le 23. 2. 1968