STUDIA MATHEMATICA. T. XXXI. (1968)

Über die Limitierungsumkehrsätze vom Typ o

von

W. MEYER-KÖNIG (Milwaukee) und H. TIETZ (Stuttgart)

1. Einleitung. Ausgangspunkt der folgenden Untersuchungen ist

SATZ 1.1. *Ist V ein permanentes, additives Verfahren zur Summierung unendlicher Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit komplexen Gliedern, und ist*

(1) $$na_n = o(1) \quad \text{für } n \to \infty$$

eine Tauber-Bedingung für V, so ist auch

(2) $$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} ka_k = o(1) \quad \text{für } n \to \infty$$

eine Tauber-Bedingung für V.

Dies wurde von den Verfassern in [10] bewiesen. Desgleichen machte B. Kwee auf diesen Zusammenhang aufmerksam ([9], S. 1038; Linearität der betrachteten Transformation oder auch eine schwächere Eigenschaft, z.B. Subtraktivität, wird dort stillschweigend vorausgesetzt). Die in beiden Beweisen verwendete Formel findet sich schon bei Tauber [12], der jedoch noch nicht den bestmöglichen Gebrauch von ihr machte. Wir wiederholen hier den Beweis von Satz 1.1 in einer Fassung, die uns von Herrn K. Zeller mitgeteilt wurde und die durch Herausstellung des Hilfssatzes 1.1 das Wesentliche des Sachverhaltes besonders deutlich erkennen lässt.

Ehe wir Hilfssatz 1.1 formulieren, treffen wir einige Vereinbarungen. Wenn nichts anderes gesagt ist, durchläuft der Folgenindex n die Zahlen $0, 1, \ldots$, beziehen sich die Symbole o und O auf $n \to \infty$ (auf $x \to \infty$ in Nr. 4), steht $\sum$ für $\sum_{n=0}^{\infty}$, lim für $\lim_{n\to\infty}$ (für $\lim_{x\to\infty}$ in Nr. 4). Tauber-Bedingung wird mit TB abgekürzt. Ein Summierungsverfahren V heisst *additiv*, wenn $V\text{-}\Sigma a_n = s$ und $V\text{-}\Sigma b_n = t$ stets $V\text{-}\Sigma(a_n + b_n) = s+t$ zur Folge hat. Ferner sei

(3) $$s_n = a_0 + \ldots + a_n, \qquad \delta_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} ka_k.$$

Hilfssatz 1.1. *Genügt die Folge* $\{a_n\}$ *der Bedingung* $\delta_n = o(1)$, *so gestatten die* a_n *eine Zerlegung*

$$(4) \qquad a_n = b_n + c_n \quad \text{mit } nb_n = o(1) \text{ und } \Sigma c_n = 0.$$

Beweis. Für $n = 1, 2, \ldots$ ist $na_n = (n+1)\delta_n - n\delta_{n-1}$, also

$$a_n = \frac{1}{n}\delta_n + (\delta_n - \delta_{n-1}).$$

Setzen wir $b_0 = a_0$, $b_n = \delta_n/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $c_0 = 0$, $c_n = \delta_n - \delta_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, so ist (4) erfüllt.

Um Satz 1.1 zu beweisen, nehmen wir an, V sei ein permanentes, additives Verfahren mit (1) als TB. Weiter sei V-$\Sigma a_n = s$ und (2) erfüllt. Zu beweisen ist nun $\Sigma a_n = s$. Eine Zerlegung der Form (4) liege vor. Aus V-$\Sigma a_n = s$ und V-$\Sigma(-c_n) = 0$ folgt dann V-$\Sigma b_n = s$. Daraus schliesst man auf $\Sigma b_n = s$, und dies wiederum hat $\Sigma a_n = s$ zur Folge.

Hilfssatz 1.1 kann offenbar etwas allgemeiner so formuliert werden: Dann und nur dann genügt die Folge $\{a_n\}$ der Bedingung $\delta_n = o(1)$, wenn die a_n eine Zerlegung der Form $a_n = b_n + c_n$ mit $nb_n = o(1)$ und $\Sigma c_n = 0$ (oder auch: mit $nb_n = o(1)$ und konvergenter Reihe Σc_n) gestatten.

In Nr. 2 übertragen wir Satz 1.1 auf den Fall der TB $\lambda_n a_n = o(1)$ bzw. der daraus durch arithmetische Mittelbildung entstehenden Bedingung. Eine hierbei über die λ_n gemachte Voraussetzung erweist sich als in der Natur der Sache liegend. Anwendungen (vor allem auf die logarithmischen Summierungsverfahren) und Varianten (z.B. Ersetzung der arithmetischen durch bewichtete Mittelbildung) bringt Nr. 3. Unsere Untersuchungen lassen sich übertragen auf Verfahren zur Summierung uneigentlicher Integrale; eine Probe in dieser Richtung bringt Nr. 4. Die Beweise aller dem Satz 1.1 entsprechenden Sätze sind nach dem Muster des in Nr. 1 gegebenen Beweises angelegt.

2. Summierung unendlicher Reihen. Wie in Satz 1.1 betrachten wir Verfahren V zur Summierung unendlicher Reihen mit komplexen Gliedern. An die Stelle von (1) lassen wir jetzt die Bedingung $\lambda_n a_n = o(1)$ treten, an die Stelle der abgeschwächten Form (2) von (1) die entsprechend abgeschwächte Bedingung $\delta_n^{(\lambda)} = o(1)$, wobei

$$(5) \qquad \delta_n^{(\lambda)} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k$$

gesetzt ist. Hierbei, wie stets im folgenden, sei $\{\lambda_n\}$ eine vorgegebene reelle Zahlenfolge, die

$$(6) \qquad \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots \text{ und } \lambda_n \to \infty \text{ für } n \to \infty$$

erfüllt. (Einige Anfangsglieder der Folge $\{\lambda_n\}$ dürfen negativ sein, was jedoch unwesentlich ist.) Es zeigt sich, dass Satz 1.1 auf diesen allgemeinen Fall nicht ohne zusätzliche Voraussetzungen über die λ_n übertragen werden kann.

Satz 2.1. *Die Folge* $\{\lambda_n\}$ *erfülle die Voraussetzungen*

$$(7) \qquad \frac{n}{\lambda_n} = O(1),$$

$$(8) \qquad \frac{n}{\lambda_n} \text{ monoton von einer Stelle an.}$$

Ist dann V *permanent und additiv, und ist*

$$(9) \qquad \lambda_n a_n = o(1)$$

eine TB für V, *so ist auch*

$$(10) \qquad \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k = o(1)$$

eine TB für V.

Bedingung (8) soll heissen, dass n/λ_n entweder von einer Stelle an nichtabnehmend oder von einer Stelle an nichtzunehmend ist. Wir beweisen zunächst den zu Hilfssatz 1.1 analogen

Hilfssatz 2.1. *Die Folge* $\{\lambda_n\}$ *erfülle die Voraussetzungen* (7) *und* (8). *Genügt dann die Folge* $\{a_n\}$ *der Bedingung* $\delta_n^{(\lambda)} = o(1)$, *so gestatten die* a_n *eine Zerlegung*

$$(11) \qquad a_n = b_n + c_n \quad \text{mit } \lambda_n b_n = o(1) \text{ und } \Sigma c_n = 0.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\lambda_0 > 0$. Für $n = 1, 2, \ldots$ ist $\lambda_n a_n = (n+1)\delta_n^{(\lambda)} - n\delta_{n-1}^{(\lambda)}$, also

$$(12) \qquad a_n = \frac{\delta_n^{(\lambda)}}{\lambda_n} + \frac{n}{\lambda_n}(\delta_n^{(\lambda)} - \delta_{n-1}^{(\lambda)}) \equiv b_n + c_n.$$

Nach dem Konvergenzkriterium von Abel konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c$, so ist der Hilfssatz bewiesen, wenn wir noch $b_0 = a_0 + c$, $c_0 = -c$ setzen.

Der Beweis von Satz 2.1 ergibt sich mit Hilfssatz 2.1 genau so wie der Beweis von Satz 1.1 mit Hilfssatz 1.1.

Wir untersuchen die Bedingungen (7) und (8). Bedingung (8) fordert ein gewisses reguläres Verhalten der Vergleichsfolge $\{\lambda_n\}$ und ist nicht schwerwiegend. Wesentlich erscheint dagegen (7), und es fragt sich, ob diese Bedingung in der Natur der Sache liegt. Dies ist der Fall. Zunächst zeigt das Beispiel des Borel-Verfahrens B, dass die Behauptung von Satz 2.1 ohne irgendwelche zusätzliche Anforderung an die λ_n nicht gilt: Bekanntlich ist $\sqrt{n}a_n = o(1)$ eine TB für B; jedoch ist, wie Gaier ([3], S. 333) gezeigt hat,

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}a_k = o(n),$$

sogar

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}|a_k| = o(n),$$

keine TB für B. Die Verneinung von (7), unter Aufrechterhaltung von (8), lautet: $n/\lambda_n \to \infty$. Satz 2.2 zeigt nun weiter, dass die Behauptung von Satz 2.1 nicht mehr richtig ist, wenn $n/\lambda_n \to \infty$ strebt.

Satz 2.2. *Die Folge $\{\lambda_n\}$ (mit $\lambda_0 > 0$) erfülle die Voraussetzung*

$$\frac{n}{\lambda_n} \to \infty. \tag{13}$$

Dann gibt es eine permanente Folge-Folge-Matrix A mit den Eigenschaften

$$\lambda_n a_n = o(1) \text{ ist TB für } A, \tag{14}$$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k = o(1) \text{ ist nicht TB für } A. \tag{15}$$

Beweis. Es sei $k_0 = 0$ und

$$k_{n+1} = k_n + \mu_n \quad \text{mit } \mu_n = [\lambda_n]+1. \tag{16}$$

Die n-te Zeile von A werde wie folgt gebildet:

$$a_{nk} = \begin{cases} 1/\mu_n & \text{für } k_n \leqslant k < k_{n+1}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar ist A permanent. Auch (14) gilt: Es sei $A\text{-}\Sigma a_n = s$ und $\lambda_n a_n = o(1)$. Dann ist $a_k = \bar{\varepsilon}_k/\lambda_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ mit $\bar{\varepsilon}_k \to 0$ für $k \to \infty$. Setzen wir $\varepsilon_n = \max_{k \geqslant n} |\bar{\varepsilon}_k|$, so haben wir $\varepsilon_n \downarrow 0$ für $n \to \infty$ und

$$|a_k| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{\lambda_k} \quad \text{für } k \geqslant n. \tag{17}$$

Zu jedem festen k gibt es genau ein $n = n(k)$ mit $k_n \leqslant k < k_{n+1}$. Setzen wir noch

$$t_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu,$$

so ist

$$t_n - s_k = \frac{1}{\mu_n}\sum_{\nu=k_n}^{k_{n+1}-1} (s_\nu - s_k).$$

Für $k_n \leqslant \nu < k_{n+1}$ ist

$$|s_\nu - s_k| \leqslant |a_{k_n+1}| + \ldots + |a_{k_{n+1}-1}|,$$

daher wegen (17) und (16)

$$|s_\nu - s_k| \leqslant (k_{n+1} - k_n - 1)\frac{\varepsilon_{k_n+1}}{\lambda_{k_n+1}} \leqslant \varepsilon_{k_n}\frac{\lambda_n}{\lambda_{k_n}} \leqslant \varepsilon_{k_n},$$

also

$$|t_n - s_k| \leqslant \frac{1}{\mu_n}(k_{n+1} - k_n)\varepsilon_{k_n} = \varepsilon_{k_n}. \tag{18}$$

Lassen wir nun k die Zahlen $0, 1, \ldots$ durchlaufen, so strebt $n = n(k)$, und damit auch k_n, gegen Unendlich. Da nach Voraussetzung $t_n \to s$ strebt für $n \to \infty$, folgt aus (18), dass auch $s_k \to s$ strebt für $k \to \infty$. Nachweis von (15): Setzen wir $a_n = (-1)^n$, so ist die (divergente) Reihe Σa_n mit Hilfe von A zum Wert $\frac{1}{2}$ summierbar; es ist nämlich stets entweder $t_n = \frac{1}{2}$ oder $t_n = \frac{1}{2} + o(1)$. Die Reihe erfüllt aber wegen (13) die Beziehung aus (15), denn es ist

$$\Big|\sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k\Big| = \Big|\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \lambda_k\Big| \leqslant \lambda_n.$$

Ein Seitenstück zu Satz 2.1 ist

Satz 2.3. *In Satz 2.1 kann man auf die Monotonievoraussetzung* (8) *verzichten, wenn die Folge $\{\lambda_n\}$ der Bedingung*

$$\frac{n(\lambda_{n+1} - \lambda_n)}{\lambda_{n+1}} = O(1) \tag{19}$$

genügt.

Der Beweis folgt aus einem zu Hilfssatz 2.1 analogen Hilfssatz 2.3, der entsteht, wenn (8) durch (19) ersetzt wird. Die (12) entsprechende Zerlegung hat dabei die Gestalt

$$a_n = \frac{(n+1)(\lambda_{n+1} - \lambda_n)}{\lambda_n \lambda_{n+1}}\delta_n^{(\lambda)} + \left(\frac{n+1}{\lambda_{n+1}}\delta_n^{(\lambda)} - \frac{n}{\lambda_n}\delta_{n-1}^{(\lambda)}\right). \tag{20}$$

Keiner der beiden Sätze 2.1 und 2.3 enthält den andern. Zwar folgt (19) aus (8), wenn es sich in (8) um monotones Wachsen handelt; jedoch folgt (19) nicht aus (8), wenn es sich in (8) um monotones Fallen handelt. Andererseits lässt sich auch (8) nicht aus (19) folgern.

3. Anwendungen und Varianten. Die in Satz 2.1 (ebenso wie die in Satz 2.3) über die λ_n gemachten Voraussetzungen sind z.B. erfüllt in den Fällen

$$\lambda_n = n\log n, \quad \lambda_n = n\log n \log\log n, \ldots$$

Hierbei sind die λ_n jeweils für einige Anfangsindizes nicht definiert; da es auf die Werte endlich vieler Anfangsglieder von $\{\lambda_n\}$ ohnehin nicht ankommt, spielt dies offenbar keine Rolle.

Die Sätze 2.1 und 2.3 verlieren an Interesse, sobald die λ_n so schnell wachsen, dass (9) trivialerweise TB ist. Aber natürlich erhalten wir auch dann noch Richtiges. Z.B. ergibt sich für $\lambda_n = n^2$: Ist V permanent und additiv, so ist

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k^2 a_k = o(1) \tag{21}$$

eine TB für V. Man bestätigt dazu leicht direkt, dass aus (21) allein (übrigens schon mit O anstatt o) die Konvergenz von Σa_n folgt.

Wir wenden Satz 2.1 auf die permanenten logarithmischen Verfahren l und L an (vgl. dazu etwa [7], S. 11, 18 und 21). Unter der l- bzw. L-Transformation der Folge $\{s_n\}$ verstehen wir die Folge $\{t_n\}$ bzw. die Funktion $t(x)$ mit

$$t_n = \frac{1}{\log(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\frac{s_k}{k+1}, \qquad t(x) = \frac{-1}{\log(1-x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1}s_k;$$

l-$\lim s_n = s$ bedeutet $\lim t_n = s$, L-$\lim s_n = s$ bedeutet Existenz von $t(x)$ für $0 < x < 1$ und $t(x) \to s$ für $x \to 1-$. Ishiguro [5], [6] hat gezeigt, dass $l \subset L$ (mit Verträglichkeit) gilt und dass $a_n = o(1/n\log n)$ eine TB für L (und also auch für l) ist. (Ohne dass dies im gegenwärtigen Zusammenhang von Bedeutung ist, sei der Vollständigkeit halber erwähnt: Dass schon $a_n = O(1/n\log n)$ eine TB für l ist, folgt aus einem Ergebnis von Davydov ([1], S. 523, Satz 3); darüber hinaus haben später Rangachari und Sitaraman ([11], S. 261, Theorem I(L)) gezeigt, dass $a_n = O(1/n\log n)$ — sogar die entsprechende einseitige Bedingung — eine TB für L ist.)

Kaufman [8] hat bewiesen, dass

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\log(k+1) = o(\log n) \tag{22}$$

eine TB für L ist und folgert hieraus (wegen $C_1 \subset l$ mit Verträglichkeit), dass auch

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)a_k\log(k+1) = o(n+1) \tag{23}$$

eine TB für L ist. Dieses letzte Ergebnis kann wegen der TB von Ishiguro für L nun auch aus Satz 2.1 gewonnen werden, wenn man dort $\lambda_k = (k+1)\log(k+1)$ setzt. Um Kaufmans erstes Ergebnis gleichfalls aus der Ishiguroschen TB abzuleiten, formulieren wir die folgende Variante zu Satz 2.1:

Satz 3.1. *Die Folge $\{\lambda_n\}$ erfülle die Voraussetzungen $\lambda_0 \geqslant 0$ und*

$$\lambda_n\frac{(n+1)\lambda_{n+1}-(n+2)\lambda_n}{(n+1)\lambda_{n+1}} = O(1). \tag{24}$$

Ist dann V permanent und additiv, und ist $\lambda_n a_n = o(1)$ eine TB für V, so ist auch

$$\frac{n}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_k}{k+1}a_k = o(1) \tag{25}$$

eine TB für V.

Nehmen wir hier $\lambda_n = (n+1)\log(n+1)$, so ergibt sich für das Verfahren L in der Tat die TB (22) von Kaufman aus der TB von Ishiguro. Zum Beweis von Satz 3.1 genügt es, den folgenden Hilfssatz 3.1 zu beweisen:

Hilfssatz 3.1. *Die Folge $\{\lambda_n\}$ erfülle die Voraussetzungen $\lambda_0 \geqslant 0$ und (24). Genügt dann die Folge $\{a_n\}$ der Bedingung (25), so gestatten die a_n eine Zerlegung*

$$a_n = b_n + c_n \text{ mit } \lambda_n b_n = o(1) \text{ und } \sum c_n = 0.$$

Beweis. Setzen wir (wegen (6) ist $\lambda_1 > 0$)

$$\bar{\delta}_n^{(\lambda)} = \frac{n+1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_k}{k+1}a_k \quad \text{für } n = 1, 2, \ldots,$$

so haben wir die Voraussetzung $\bar{\delta}_n^{(\lambda)} = o(1)$ zur Verfügung. Für $n = 2, 3, \ldots$ ist

$$\frac{\lambda_n a_n}{n+1} = \frac{\lambda_n\bar{\delta}_n^{(\lambda)}}{n+1} - \frac{\lambda_{n-1}\bar{\delta}_{n-1}^{(\lambda)}}{n},$$

$$a_n = \frac{(n+1)\lambda_{n+1}-(n+2)\lambda_n}{(n+1)\lambda_{n+1}}\bar{\delta}_n^{(\lambda)} + \left(\frac{(n+2)\lambda_n}{(n+1)\lambda_{n+1}}\bar{\delta}_n^{(\lambda)} - \frac{(n+1)\lambda_{n-1}}{n\lambda_n}\bar{\delta}_{n-1}^{(\lambda)}\right)$$
$$\equiv b_n + c_n.$$

Setzen wir

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n = c,$$

so ist der Hilfssatz bewiesen, wenn wir noch die Zerlegungen $a_0 = (a_0+c) + (-c)$ und $a_1 = a_1 + 0$ hinzufügen.

Eine andere Variante von Satz 2.1, deren Beweis nach dem Muster der bisherigen Beweise verläuft, ist

Satz 3.2. *Die Folge $\{\lambda_n\}$ erfülle die Voraussetzung $\lambda_n(\lambda_{n+1}-\lambda_n) = O(\lambda_{n+1})$. Ist dann V permanent und additiv, und ist $\lambda_n a_n = o(1)$ eine TB für V, so ist auch*

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k = o(\lambda_n)$$

eine TB für V.

Beim Übergang von (1) zu (2), oder von (9) zu (10), benützen wir arithmetische Mittelbildung. Statt dessen können wir auch andere Mittel, z.B. bewichtete Mittel, in Betracht ziehen. In dieser Richtung begnügen wir uns hier mit dem Satz 3.3, bei dem $\{p_n\}$ eine reelle, den Voraussetzungen

$$p_n > 0 \text{ von einer Stelle an}, \quad P_n = p_0 + \ldots + p_n \to \infty \text{ für } n \to \infty$$

genügende Folge ist.

Satz 3.3. *Die Folgen $\{\lambda_n\}$ und $\{p_n\}$ sollen die Voraussetzungen*

$$\frac{P_n}{p_{n+1}\lambda_{n+1}} = O(1), \tag{26}$$

$$\frac{P_n}{p_{n+1}\lambda_{n+1}} \text{ monoton von einer Stelle an} \tag{27}$$

erfüllen. Ist dann V permanent und additiv, und ist $\lambda_n a_n = o(1)$ eine TB für V, so ist auch

$$\sum_{k=0}^{n} p_k \lambda_k a_k = o(P_n)$$

eine TB für V.

Bedingung (27) lässt sich ersetzen durch

$$\lambda_n P_n \left(\frac{1}{p_n \lambda_n} - \frac{1}{p_{n+1}\lambda_{n+1}} \right) = O(1).$$

Die Beweise ergeben sich wie in den früheren Fällen.

4. Summierung uneigentlicher Integrale. Bei der Übertragung unserer Untersuchungen von Reihen auf Integrale, d. h. von Folgen auf Funktionen, begnügen wir uns mit einem Analogon zu Satz 1.1. Verschiedene Fassungen eines solchen Analogons sind möglich, je nach der Funktionenklasse, auf die das betrachtete Limitierungsverfahren angewandt wird. Wir arbeiten hier mit Funktionen von beschränkter Schwankung und (teilweise) mit Riemann-Stieltjes-Integralen.

Es sei daran erinnert, dass sich von jetzt an o und O auf $x \to \infty$ beziehen und lim für $\lim_{x\to\infty}$ steht. Die (komplexwertige) Funktion $s(x)$ gehöre zur Klasse BV, wenn sie für $x \geqslant 0$ definiert und für jedes $c > 0$ in $0 \leqslant x \leqslant c$ von beschränkter Schwankung ist. Wir betrachten Verfahren V zur Limitierung von Funktionen $s(x) \in \mathrm{BV}$, unter dem Gesichtspunkt $x \to \infty$. Permanenz und Additivität eines Verfahrens V verstehen wir in der üblichen Weise. Die (komplexwertige) Funktion $a(x)$ gehöre zur Klasse L, wenn sie für $x \geqslant 0$ definiert und für jedes $c > 0$ in $0 \leqslant x \leqslant c$ Lebesgue-integrierbar ist. Liegt ein Verfahren V und ein $a(x) \in L$ vor, so soll

$$\int_0^\infty a(x)\,dx = s$$

(im Sinne V) definitionsgemäss heissen, dass V-lim $s(x) = s$ ist. Hierbei ist zu beachten, dass stets

$$s(x) = \int_0^x a(t)\,dt \quad \text{für } x \geqslant 0 \tag{28}$$

sein soll, wenn ein $a(x) \in L$ vorliegt. Bei gegebenem V verstehen wir unter dem Verfahren V im engeren Sinn das vorstehend definierte Verfahren zur Summierung uneigentlicher Integrale $\int_0^\infty a(x)\,dx$ mit $a(x) \in L$. Den Ausdruck links in (2) ersetzen wir bei gegebenem $s(x) \in \mathrm{BV}$ durch

$$\delta(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t\,ds(t) \quad (x > 0). \tag{29}$$

Satz 4.1. *Ist V ein permanentes und additives Verfahren zur Limitierung von Funktionen der Klasse BV, und ist*

$$xa(x) = o(1) \tag{30}$$

eine TB für das Verfahren V im engeren Sinn, so ist

$$\delta(x) = o(1) \tag{31}$$

eine TB für V.

Wir geben eine Anwendung auf das Abel-Verfahren A zur Limitierung von Funktionen. A-lim $s(x) = s$ für ein $s(x) \in \mathrm{BV}$ heisse:

$$\int_0^\infty e^{-yt}\,ds(t) \quad \text{existiert für } y > 0,$$

$$\int_0^\infty e^{-yt}\,ds(t) \to s - s(0) \quad \text{für } y \to 0^+.$$

(30) ist eine TB für das A-Verfahren im engeren Sinn; somit ist (31) eine TB für A. Man vergleiche dazu Widder [13], S. 186-188: Der dortige Übergang von Theorem 3a zu Theorem 3b (genauer: zu der wesentlicheren Hälfte von Theorem 3b) ist also in Satz 4.1 enthalten (siehe auch Hardy [4], S. 152). Vgl. ferner Doetsch [2], Übergang von Satz 1 (S. 506) zu Hilfssatz 2 (S. 514).

Zum Beweis von Satz 4.1 stellen wir zunächst das folgende Analogon zu Hilfssatz 1.1 auf:

Hilfssatz 4.1. *Genügt die Funktion $s(x)\in BV$ der Bedingung $\delta(x) = o(1)$, so gestattet $s(x)$ eine Zerlegung*

$$s(x) = u(x)+v(x) \qquad (x \geqslant 0) \tag{32}$$

mit

$$u(x) = \int_0^x b(t)\,dt, \qquad b(x)\in L, \qquad xb(x) = o(1), \tag{33}$$

$$v(x)\in \mathrm{BV}, \qquad v(x) = o(1). \tag{34}$$

Beweis. Wir führen den Beweis in drei Teilen. In Teil a treffen wir eine Vorbereitung. In Teil b beweisen wir die Behauptung für Funktionen $s(x)\in\mathrm{BV}$, die

$$s(x) = 0 \qquad \text{für } 0 \leqslant x < 1 \tag{35}$$

erfüllen. In Teil c behandeln wir den allgemeinen Fall.

a. Gegeben sei die Funktion $s(x)\in\mathrm{BV}$, und es sei

$$\int_0^x t\,ds(t) = 0 \qquad \text{für } x \geqslant 0. \tag{36}$$

Wir zeigen: $s(x)$ ist konstant für $x > 0$. Aus (36) folgt durch partielle Integration

$$s(x) = \frac{1}{x}\int_0^x s(t)\,dt \qquad \text{für } x > 0.$$

Daraus liest man zunächst ab, dass $s(x)$ stetig, und weiter, dass $s(x)$ differenzierbar ist für $x > 0$, und zwar ist

$$s'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x s(t)\,dt + \frac{1}{x}s(x) = 0 \qquad (x > 0).$$

b. Gegeben sei die Funktion $s(x)\in\mathrm{BV}$, die $\delta(x) = o(1)$ und (35) erfüllt. Setzen wir noch $\delta(0) = 0$, so gilt $\delta(x)\in\mathrm{BV}$ und $\delta(x) = 0$ für $0 \leqslant x < 1$. Auf Grund von Teil a ist $s(x)$ durch $\delta(x)$ für $x > 0$ bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Nun verifiziert man unmittelbar, dass (29) mit der (für $0 \leqslant x < 1$ verschwindenden) Funktion

$$s(x) = \int_0^x \frac{\delta(t)}{t}\,dt + \delta(x) \qquad (x \geqslant 0) \tag{37}$$

identisch in x ($x > 0$) erfüllt ist. Also besitzt die zu Beginn gegebene Funktion $s(x)$ notwendig die Darstellung (37), womit die gewünschte Zerlegung von $s(x)$ hergestellt ist.

c. Gegeben sei die Funktion $s(x)\in\mathrm{BV}$, die $\delta(x) = o(1)$ erfüllt. Wir setzen $s^*(x) = 0$ für $0 \leqslant x < 1$, $s^*(x) = s(x)$ für $x \geqslant 1$. Wie in Teil b stellen wir die Zerlegung $s^*(x) = u^*(x)+v^*(x)$ mit den (33) und (34) entsprechenden Nebenbedingungen her, wobei noch $b^*(x) = u^*(x) = v^*(x) = 0$ ist für $0 \leqslant x < 1$. Abänderung lediglich von $v^*(x)$ im Intervall $0 \leqslant x < 1$ liefert die gewünschte Zerlegung von $s(x)$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Mit Hilfssatz 4.1 beweist man Satz 4.1 analog wie in den früheren Fällen.

Auf ein kontinuierliches Analogon zu Satz 2.1 und weitere Bemerkungen zu dem angeschnittenen Fragenkreis werden die Verfasser zurückkommen.

Literaturnachweis

[1] Н. А. Давыдов, *Об одном свойстве методов Чезаро суммирования рядов*, Мат. сб. 38 (80) (1956), S. 509-524.

[2] G. Doetsch, *Handbuch der Laplace-Transformation.* Band I: Die theoretischen Grundlagen der Laplace-Transformation, Basel 1950.

[3] D. Gaier, *Über die Summierbarkeit beschränkter und stetiger Potenzreihen an der Konvergenzgrenze*, Math. Z. 56 (1952), S. 326-334.

[4] G. H. Hardy, *Divergent series*, Oxford 1949 (reprinted 1956).

[5] K. Ishiguro, *On the summability methods of logarithmic type*, Proc. Japan Acad. 38 (1962), S. 703-705.

[6] — *Tauberian theorems concerning the summability methods of logarithmic type*, ibidem 39 (1963), S. 156-159.

[7] — *On the summability methods of divergent series*, Acad. Roy. Belgique, Cl. Sci., Mém., Coll. 8° 35, Nr. 1 (1965).

[8] Б. Л. Кауфман, *О теоремах типа Таубера для логарифмических методов суммирования*, Изв. высш. учеб. зав., Матем. 1 (56) (1967), S. 57-62.

[9] B. Kwee, *On Perron's method of summation*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 63 (1967), S. 1033-1040.

[10] W. Meyer-König and H. Tietz, *On Tauberian conditions of type o*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), S. 926-927.

[11] M. S. Rangachari and Y. Sitaraman, *Tauberian theorems for logarithmic summability (L)*, Tôhoku Math. J., II ser., 16 (1964), S. 257-269.

[12] A. Tauber, *Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen*, Monatshefte f. Math. 8 (1897), S. 273-277.

[13] D. V. Widder, *The Laplace transform*, Princeton 1941.

Reçu par la Rédaction le 23. 2. 1968

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXI. (1968)

On duality between (L_1F)-spaces and (L_2F)-spaces*

by

W. ZAWADOWSKI (Warszawa)

Dedicated to Professors
Stanisław Mazur and Władysław Orlicz
on the 40-th anniversary
of their scientific carreer

The (L_1F)-spaces and (L_2F)-spaces are generalizations of the (LF)-spaces defined in [2]. The (L_1F)-spaces defined in this paper are a little more special than the (L_1F)-spaces defined in [11]. This difference is inessential and for easier references we prefer to keep the same name.

In this paper a theory of duality is presented for (L_1F)-spaces and (L_2F)-spaces, which is so conceived that it contains an essential part of Grothendieck duality theory for (F)-spaces and (DF)-spaces (cf. [3] and also [6]), and includes (LF)-spaces of Dieudonné and Schwarz [2]. We prove that the functor of taking the adjoint equipped with the strongest topology [9] carries the (L_1F)-class into the (L_2F)-class and vice versa, the class (L_2F) into the class (L_1F) (cf. Propositions 3.1 and 3.2). The space $\mathscr{D}$ of all distributions [8] is an (L_2F)-space, but it is not an (L_1F)-space. This is worth mentioning since the space $\mathscr{D}$ has so far stayed outside any reasonable classification.

The problem started its history with Grothendieck's question about a class of spaces which is closed under a number of operations and within which an analogue of the closed graph theorem is still valid (cf. [4], p. 18-19). A certain aspect of this was clarified in [10], and afterwards widely discussed by Raikov [7]. In connection with the closed graph theorem, Słowikowski started to investigate in [12] the so called (L_1F)-, and (L_2F)-inductive families. However, no definition of the corresponding (L_1F)- and (L_2F)-spaces as used in this paper was given. The definition of (L_1F)-space comes later in [10] and subsequently in [11] in a slightly different form which would be less convenient for our purpose. The

* Part of this work was done while the author was visiting The Mathematical Institute of Aarhus University.