Let π be the natural homomorphism of B onto B/R. The proof of Lemma 2.2 gives the continuity of the involution in B/R. Therefore $\pi(u_n)\pm i\pi(v_n)\to\pi(u)\pm i\pi(v)$. Hence $\pi(u-u_n)\to 0$, where $\pi(u-u_n)$ is self-adjoint in B/R. Formula (2.3) then shows that $T^{\#}[\pi(u-u_n)]\to 0$. Consequently $T(u_n)\to T(u)$. Likewise $T(v_n)\to T(v)$.

2.6. COROLLARY. *Let E be a B^*-algebra. Suppose that, for some integer n, $T(h^n)\geqslant 0$ in E for all $h\in H$. Then T is continuous.*

Proof. Let $u,v\in H$. Then ([1], p. 15)

$$\|T(u^n+v^n)\|\geqslant\|T(v^n)\|$$

and we may apply Theorem 2.5. In particular, if f is any linear functional on B with $f(h^2)\geqslant 0$ for all $h\in H$, we have f continuous.

Theorem 2.5 shows the continuity of T in other situations as well. Let S denote the cone in B consisting of all finite sums of the form $\sum h_j^2$, where each $h_j\in H$. Let T be a linear map of B into $L([0,1])$, say. Then T is continuous if $T(g)\geqslant 0$ almost everywhere for each $g\in S$.

References

[1] J. Dixmier, *Les C*-algèbres et leurs représentations*, Paris 1964.

[2] J. W. M. Ford, *A square root lemma for Banach (*)-algebras*, J. London Math. Soc. 42 (1967), p. 521-522.

[3] B. E. Johnson, *The uniqueness of the (complete) norm topology*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), p. 537-539.

[4] C. E. Rickart, *The singular elements of a Banach algebra*, Duke Math. J. 14 (1947), p. 1063-1077.

[5] — *General theory of Banach algebras*, Princeton 1960.

[6] E. Størmer, *Positive linear maps of operator algebras*, Acta Math. 110 (1963), p. 233-278.

UNIVERSITY OF OREGON, EUGENE, OREGON, U. S. A.

Reçu par la Rédaction le 2. 3. 1968

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXI. (1968)

Über nukleare Folgenräume

von

GOTTFRIED KÖTHE (Frankfurt – College Park)

T. und Y. Kōmura haben in [1] bewiesen, daß jeder nukleare Raum eingebettet werden kann in einen Raum $(s)^{A}$, s der Raum der schnell fallenden Folgen, A eine genügend große Indexmenge. Ihr Verfahren läßt sich für nukleare Folgenräume so vereinfachen, daß gleichzeitig eine zusätzliche Einsicht in die Struktur der nuklearen Folgenräume gewonnen werden kann.

Es sei P eine Menge von Folgen $a=(a_n)\geqslant 0$ (d.h. alle $a_n\geqslant 0$) mit den Eigenschaften: a) zu jedem n gibt es ein $a\in P$ mit $a_n\neq 0$, b) P ist gerichtet, d.h. zu $a^{(1)},\ldots,a^{(k)}$ in P gibt es stets ein $a\in P$ und ein $M>0$ mit $a^{(i)}\leqslant Ma$, d.h. $a_n^{(i)}\leqslant Ma_n$ für alle i und n.

Für gegebenes P ist $\lambda(P)$ der Raum aller Folgen $x=(x_n)$ mit $p_a(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n|x_n|<\infty$ für alle $a\in P$. Die $p_a(x)$ sind die Halbnormen der auf $\lambda(P)$ definierten Topologie T.

Ist M eine Menge von Folgen $b=(b_n)$, so besteht die normale Hülle von M aus allen Folgen $y=(y_n)$ mit $|y_n|\leqslant|b_n|$, für alle n für ein geeignetes $b\in M$. Eine Menge heißt *normal*, wenn sie mit ihrer normalen Hülle zusammenfällt.

Bezeichnet λ' die normale Hülle der Menge, die aus allen positiven Vielfachen der Folgen aus P besteht, so ist λ' ein linearer Folgenraum. Aus der Definition von $\lambda(P)$ folgt, daß $\lambda(P)$ gleich $(\lambda')^{x}$ ist, dem a-dualen Raum zu λ' (vgl. [2], § 30). $\lambda(P)$ ist also ein vollkommener Folgenraum. Da für ein $u=(u_n)$ aus λ' stets $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n||x_n|<\infty$ für jedes x aus $\lambda(P)$ gilt, ist λ' ein normaler Teilraum von λ^{x}, braucht jedoch nicht mit λ^{x} zusammenzufallen. Die Topologie T von $\lambda(P)$, die auch durch alle $p_b(x)$, $b\geqslant 0$, aus λ' erzeugt werden kann, ist also im allgemeinen schwächer als die durch die positiven Elemente aus λ^{x} definierte normale Topologie.

Wie in [2], § 30, 4. (5) ist $\lambda(P)$ als projektiver Limes der durch die einzelnen a aus P definierten vollständigen Räume λ_a darstellbar, also vollständig in der Topologie T (vgl. [2], § 19, 10. (2)). Schließlich ergibt

[2], § 22, 6. (3), daß der duale Raum zu $\lambda(P)[T]$ mit dem eben definierten Raum λ' zusammenfällt.

Nach Grothendieck-Pietsch (vgl. [3], S. 88) ist $\lambda(P)$ genau dann nuklear, wenn es zu jedem $a \geqslant 0$ in λ' ein $b \geqslant 0$ in λ' gibt mit $a_n \leqslant b_n t_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = M < \infty$, also $t = (t_n)$ in l^1.

Es sei nun $\lambda(P)$ ein nuklearer Folgenraum und a, b, t wie eben. Wir setzen voraus, daß $a_n \neq 0$ für alle $n = 1, 2, \ldots$ gilt. Ordnet man die t_k absteigend, $t_{j_1} \geqslant t_{j_2} \geqslant \ldots$, so gilt $t_{j_k} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} t_n/k = M/k$. Es gibt also eine Permutation $\pi(k) = j_k$ der natürlichen Zahlen, so daß $t_{\pi(k)} \leqslant M/k$ für alle k gilt. Aus $a_n \leqslant b_n t_n$ folgt daher $b_{\pi(k)} \geqslant a_{\pi(k)} k/M$. Da mit b auch Mb in λ' liegt und λ' normal ist, liegt auch die Folge $(ka_{\pi(k)})$ in λ'; diese Bezeichnung ist hier und im folgenden so zu verstehen: das $\pi(k)$-te Element der Folge ist $ka_{\pi(k)}$. Da π eine Permutation der natürlichen Zahlen ist, sind die Glieder der Folge für alle natürlichen Zahlen als Indizes definiert.

Damit sieht unser Ergebnis so aus: Es gibt zu $a \geqslant 0$ in λ' eine Permutation π_1, so daß die Folge $a^{(1)} = (ka_{\pi_1(k)})$ ebenfalls in λ' liegt. Dies ist der Fall $p = 1$ des folgenden Satzes:

(1) *Es gibt eine Permutation $\pi^{(p)}$, so daß mit a auch die Folge $(k^p a_{\pi^{(p)}(k)})$ in λ' liegt, $p \geqslant 1$ eine vorgegebene natürliche Zahl.*

Durch Wiederholung des obigen Schlusses finden wir Permutationen $\pi_2, \ldots, \pi_p$ und Folgen $a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ in λ', so daß $a^{(r)} = (ka^{(r-1)}_{\pi_r(k)})$ in λ' ist für $r = 2, \ldots, p$. Wir definieren nun die Permutation $\pi^{(p)}$ durch die folgende Anordnung der natürlichen Zahlen

$$\pi_1(1), \pi_2(1), \ldots, \pi_p(1), \ldots, \pi_1(n), \pi_2(n), \ldots, \pi_p(n), \ldots,$$

wobei sich wiederholende Zahlen wegzulassen sind. Wir bemerken, daß $\pi^{(p)}(pn+l)$, $1 \leqslant l < p$, als Vorgänger mindestens alle $\pi_i(j)$ mit $i = 1, \ldots, p$ und $j \leqslant n$ hat. Das Glied $a_{\pi^{(p)}(pn+l)}$ der Folge a ist also keines der $a_{\pi_1(1)}, \ldots, \ldots, a_{\pi_1(n)}$. Dann ist aber $(n+1) a_{\pi^{(p)}(pn+l)} \leqslant a^{(1)}_{\pi^{(p)}(pn+l)}$. Wiederholung des Schlusses ergibt $(n+1)^p a_{\pi^{(p)}(pn+l)} \leqslant a^{(p)}_{\pi^{(p)}(pn+l)}$ für alle $n = 1, 2, \ldots$ und $1 \leqslant l < p$. Daraus folgt

$$(pn+l)^p a_{\pi^{(p)}(pn+l)} \leqslant \big(p(n+1)\big)^p a_{\pi^{(p)}(pn+l)} \leqslant p^P a^{(p)}_{\pi^{(p)}(pn+l)}$$

oder, einfacher geschrieben, $k^p a_{\pi^{(p)}(k)} \leqslant p^p a^{(p)}_{\pi^{(p)}(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$

Dies ist aber, da $a^{(p)}$ in dem Raum λ' und p^p eine Konstante ist, die Behauptung.

(2) *Es gibt sogar eine Permutation π, so daß alle Folgen $(k^p a_{\pi(k)})$, $p = 1, 2, \ldots$, in λ' liegen.*

Es seien nach (1) $\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \ldots$ Permutationen, so daß die Folgen $(k^p a_{\pi^{(p)}(k)})$ in λ' liegen. Die Permutation π wird nun durch die folgende Anordnung der natürlichen Zahlen definiert, wobei sich wiederholende Zahlen wieder wegzulassen sind:

$$\pi^{(1)}(1), \pi^{(2)}(1), \pi^{(2)}(2), \pi^{(1)}(2), \pi^{(3)}(1), \pi^{(3)}(2), \pi^{(3)}(3), \pi^{(2)}(3), \pi^{(1)}(3), \ldots$$

(das Prinzip wird sofort klar, wenn man die $\pi^{(i)}(j)$, $i, j = 1, 2, \ldots$, als Elemente einer Matrix auffaßt).

Wir behaupten, daß für $m = p^2+1, p^2+2, \ldots$, stets $m^{p/2} a_{\pi(m)} \leqslant \leqslant n^p a_{\pi^{(p)}(n)}$ gilt, wobei $\pi(m) = \pi^{(p)}(n)$ ist. Da die Folge $(n^p a_{\pi^{(p)}(n)})$ nach Voraussetzung in λ' liegt und es auf die p^2 Glieder mit den Indizes $\pi(1), \ldots \ldots, \pi(p^2)$ nicht ankommt, liegt auch die Folge $(m^{p/2} a_{\pi(m)})$ in λ'. Durchläuft p alle geraden Zahlen, so folgt daraus die Behauptung.

Zum Beweis überlegen wir uns, durch welche der Zahlen $\pi^{(p)}(n)$ die $\pi(m)$ mit $m > p^2$ dargestellt werden. Ist $m > p^2$, so liegen nach Konstruktion von π alle natürlichen Zahlen, die durch ein $\pi^{(p)}(n)$ mit $n^2 < m$ dargestellt werden, links von $\pi(m)$. Also ist $\pi(m)$ ein $\pi^{(p)}(n)$ mit $n \geqslant \sqrt{m}$. Daraus folgt $m^{p/2} \leqslant n^p$ und $m^{p/2} a_{\pi(m)} = m^{p/2} a_{\pi^{(p)}(n)} \leqslant n^p a_{\pi^{(p)}(n)}$. Damit ist (2) bewiesen.

(2) besagt, daß λ' mit $a \geqslant 0$ einen Teilraum $\lambda'(a)$ enthält, der durch die Permutation π und die durch $(a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, \ldots) \to (1, 1, \ldots)$ erklärte Diagonaltransformation in den Raum s' übergeht, den dualen Raum von s; s' ist der durch die Folgen $s^{(p)} = (k^p)$, $p = 1, 2, \ldots$, erzeugte Stufenraum.

Unsere Überlegungen gelten unter der Voraussetzung, daß alle Koordinaten von a von Null verschieden sind. Ist $a \geqslant 0$ beliebig in λ', so zerfällt die Menge N der Indizes in $M(a)$ und $N(a)$, wobei $N(a)$ alle n enthält mit $a_n = 0$. Ist $M(a)$ unendlich, so wenden wir unsere Überlegungen auf die auf $M(a)$ als Indexmenge beschränkten Folgen an und erhalten einen Raum $\lambda'_M(a)$, der durch eine Permutation von $M(a)$ und eine Diagonaltransformation in s' übergeht. Schließlich bezeichne $\varphi(a)$ den Raum der auf $N(a)$ erklärten Folgen mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Gliedern. Dann enthält λ' den Teilraum $\lambda'(a) = \lambda'_M(a) \oplus \oplus \varphi(a)$ für jedes $a \geqslant 0$. Ist $M(a)$ endlich, so setzen wir $\lambda'(a) = \varphi$. Damit ergibt sich

(3) *Ist $\lambda(P)$ ein nuklearer Folgenraum, so ist $\lambda' = \bigcup_{a \geqslant 0} \lambda'(a)$; dabei durchläuft a die $a \geqslant 0$ aus λ' und $\lambda'(a)$ ist gleich φ oder gleich $\lambda'_M(a) \oplus \varphi(a)$, wobei $\lambda'_M(a)$ ein auf $M(a)$ definierter Folgenraum ist, der durch eine Permutation und eine Diagonaltransformation aus s' erhalten werden kann.*

Es ist klar, daß man nicht alle $a \geqslant 0$ aus λ' zu nehmen braucht; es genügt ein gerichtetes System a_α, so daß zu jedem $a \geqslant 0$ aus λ' ein a_α mit $a \leqslant M a_\alpha$ existiert, also etwa das definierende System P selbst. Wir nennen ein solches System ein *Fundamentalsystem* in λ'.

Wie wir oben sahen, ist $\lambda = (\lambda')^x$, also gilt $\lambda = \left(\bigcup_a \lambda'(a)\right)^x = \bigcap_a \left(\lambda'(a)\right)^x$. Setzen wir $\left(\lambda'(a)\right)^x = \lambda(a)$ und berücksichtigen wir $\varphi^x = \omega$ und $(s')^x = s$, so erhalten wir

(4) *Jeder nukleare Folgenraum* $\lambda(P)$ *hat die Darstellung* $\lambda = \bigcap_a \lambda(a)$; *dabei durchläuft* $a \geqslant 0$ *ein Fundamentalsystem in* λ' *und* $\lambda(a)$ *ist gleich* ω *oder gleich* $\lambda_M(a) \oplus \omega(a)$, *wobei* $\lambda_M(a)$ *ein auf* $M(a)$ *definierter Folgenraum ist, der durch eine Permutation und eine Diagonaltransformation aus* s *entsteht;* $\omega(a)$ *ist der auf dem Komplement* $N(a)$ *von* $M(a)$ *erklärte Raum aller Folgen.*

Die Topologie T von λ ist die des projektiven Limes der $\lambda(a)$, wenn deren Topologie die normale Topologie ist.

Es ist ein recht tiefliegendes Ergebnis der Theorie der nuklearen Räume, daß der stark duale Raum eines nuklearen (F)-Raumes wieder nuklear ist. Für Folgenräume ergibt sich dieses Resultat sehr einfach.

(5) *Ist* $\lambda(P)$ *ein nuklearer Folgenraum,* B *eine beschränkte Teilmenge von* λ, *so liegt* B *in der normalen Hülle eines Elementes von* λ.

Die normale Hülle einer beschränkten Teilmenge eines vollkommenen Raumes ist wieder beschränkt ([2], S. 416), B kann also als normal und abgeschlossen angenommen werden.

Setzt man $\varrho_n = \sup_{x \in B} |x_n|$, so ist $\varrho_n e_n \in B$, e_n der n-te Einheitsvektor. Definiert man $\varrho = (\varrho_n)$, so liegt die Menge B offenbar in der normalen Hülle von ϱ. (5) ist daher bewiesen, wenn wir $\varrho \in \lambda$ zeigen.

Seien a, b in λ' wie im Kriterium von Grothendieck-Pietsch. Aus der Beschränktheit von B und $\varrho_n e_n \in B$ folgt $|b_n \varrho_n| \leqslant M < \infty$. Dann ist aber $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varrho_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_n t_n \varrho_n \leqslant M \sum_{n=1}^{\infty} t_n < \infty$, also $\varrho \in \lambda$.

Daraus folgt sofort

(6) *Ist* $\lambda(P)$ *nuklear, so ist der stark duale Raum von* λ *identisch mit* λ', *versehen mit der normalen Topologie.*

(7) *Ist* $\lambda(P)$ *nuklear und metrisierbar, so ist der stark duale Raum gleich* λ^x *und nuklear.*

Die Voraussetzung, daß $\lambda(P)$ metrisierbar ist, besagt, daß $\lambda(P)$ ein gestufter Raum ist. Dann ist aber nach [2], S. 422, der duale Raum λ' identisch mit dem α-dualen λ^x. Nach (6) ist die starke Topologie auf λ^x die normale Topologie, gegeben durch λ. Der duale Raum zu λ^x ist dann aber nach [2], § 30, 2. (4) gleich $\lambda^{xx} = \lambda$. Nach dem Kriterium von Grothendieck-Pietsch genügt es also zu zeigen, daß zu jedem x in λ ein y in λ existiert, so daß $x_n \leqslant y_n t_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} t_n < \infty$ gilt.

Sei $a^{(1)} \leqslant a^{(2)} \leqslant \ldots$ eine Folge positiver Elemente aus λ^x, deren zugehörige Halbnormen die normale Topologie auf λ definieren. Nach (1) gibt es Permutationen $\pi^{(p)}$ der $M(a^{(p)})$, so daß die Folgen $(n^4 a^{(p)}_{\pi(p)(n)})$ in λ^x liegen. Wir ordnen die Zahlen $\pi^{(p)}(n)$ nach dem Verfahren im Beweis von (2) in eine Folge $\pi(m)$ um; π definiert dann eine Permutation aller natürlichen Zahlen. Wir erhalten wie in (2), daß für $m = 4^2+1, 4^2+2, \ldots$ $\ldots, a^{(p)}_{\pi(m)} = 0$ ist oder $m^2 a^{(p)}_{\pi(m)} \leqslant n^4 a^{(p)}_{\pi(p)(n)}$ gilt. Daraus folgt, daß alle Folgen $(m^2 a^{(p)}_{\pi(m)})$, $p = 1, 2, \ldots$, in λ^x liegen.

Liegt nun x in λ, so ist $\sum_{m=1}^{\infty} m^2 a^{(p)}_{\pi(m)} |x_{\pi(m)}| < \infty$ für alle p, also liegt $(m^2 x_{\pi(m)})$ in λ. Wegen $\sum 1/m^2 < \infty$ ist dies unsere Behauptung.

Literaturnachweis

[1] T. u. Y. Kōmura, *Über die Einbettung der nuklearen Räume in* $(s)^A$, Math. Ann. 162 (1966), S. 284-288.

[2] G. Köthe, *Topologische lineare Räume I*, 2. Aufl., 1966.

[3] A. Pietsch, *Nukleare lokalkonvexe Räume*, Berlin 1965.

Reçu par la Rédaction le 4. 3. 1968