STUDIA MATHEMATICA, T. XXXI. (1968)

О B-полных топологических векторных группах

Д. А. РАЙКОВ (Москва)

Станиславу Мазуру и Владиславу Орличу
к 40-летию их научной деятельности

Анализируя теорему Банаха об открытом отображении, Птак [11, 12] ввел в рассмотрение локально выпуклые пространства, названные им *B-полными*, характеризуемые тем, что они отделимы и всякое их почти открытое непрерывное линейное отображение на какое бы то ни было отделимое локально выпуклое пространство открыто (¹). Робертсоны [16] распространили на B-полные пространства также теорему Банаха о замкнутом графике, а затем Птак [13] объединил оба свойства в теореме, являющейся по существу теоремой о замкнутом графике для многозначных линейных отображений B-полных пространств. Эти результаты были получены методами теории двойственности локально выпуклых пространств, с помощью данной Птаком дуальной характеристики B-полноты как свойства сопряженного пространства. Однако Келли [8] удалось найти также внутреннюю характеристику B-полноты и, пользуясь ею, получить значительную часть результатов Птака и Робертсонов прямым путем. Это открыло возможность, несколько модифицировав метод Келли, перенести указанные результаты на произвольные B-полные топологические векторные пространства, т. е. отделимые (не обязательно локально выпуклые) топологические векторные пространства, всякое почти открытое непрерывное линейное отображение которых на какое бы то ни было отделимое топологическое векторное пространство открыто. В предлагаемой статье эти свойства B-полноты топологических векторных пространств, сообщенные (без доказательств) в моем обзорном докладе [14], распространяются на топологические векторные группы, т. е. векторные пространства над произвольным полем K, являющиеся топологическими группами относительно сложения, в которых опе-

(¹) Отображение топологического пространства в топологическое пространство называется, по Птаку, *почти открытым*, если замыкание образа окрестности точки есть окрестность образа этой точки.

раторы умножения на все скаляры $\lambda \in K$ непрерывны. Доказывается также, что если E—произведение семейства одномерных пространств над $\mathbf{C}$ или $\mathbf{R}$ (соотв. линейно-компактное пространство), а F—B-полная локально выпуклая группа над $\mathbf{C}$ или $\mathbf{R}$ (соотв. B-полное линейно-топологическое пространство), то $E\times F$ B-полно. В заключение делаются некоторые замечания о нерешенных вопросах.

1. Понятие топологической векторной группы.

Определение 1. *Топологической векторной группой* (сокращенно: твг) (E, u) над полем K называется векторное пространство E над K, наделенное топологией u, в которой

а) отображение $(x, y)\to x+y$ группы $(E, u)\times(E, u)$ в (E, u) непрерывно;

б) для каждого $\lambda\in K$ отображение $x\to\lambda x$ группы (E, u) в (E, u) непрерывно.

Из а) и б) следует, что твг есть коммутативная топологическая группа с операторами $\lambda\in K$, со всеми вытекающими отсюда свойствами общего характера ([2], гл. III, § 6).

Всякий базис окрестностей нуля (сокращенно: базис) $\mathfrak{U}$ твг (E, u) удовлетворяет следующим условиям:

а) для каждого $U\in\mathfrak{U}$ существует $V\in\mathfrak{U}$ такое, что $V+V\subset U$;

б) для каждого $U\in\mathfrak{U}$ и каждого ненулевого $\lambda\in K$ существует $W\in\mathfrak{U}$, содержащееся в λU.

Обратно, каждый базис фильтра в векторном пространстве E, удовлетворяющий условиям а) и б), есть базис однозначно определенной топологии твг в E.

Пример. Пусть E—векторное пространство над $\mathbf{C}$ или $\mathbf{R}$, $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$—убывающая сеть его векторных подпространств и каждое E_α наделено топологией u_α с базисом $\mathfrak{U}_\alpha$, такой, что (E_α, u_α)—топологическое векторное пространство (сокращенно: твп), причем если $\alpha<\alpha'$, то тождественное вложение $(E_{\alpha'}, u_{\alpha'})\to(E_\alpha, u_\alpha)$ непрерывно. Тогда $\bigcup_{\alpha\in A}\mathfrak{U}_\alpha$ есть базис топологии твг в E. Если каждое $\mathfrak{U}_\alpha$ состоит из одного E_α, получаем „линейно-топологические пространства" Лефшеца [10, 9]. Если A—натуральный ряд, каждое E_α—преднормированное пространство и $E_1=E$, приходим к „пред-$\mathscr{F}$-последовательностям" Словиковского [17].

Твг (E, u) над недискретным нормированным полем K есть твп тогда и только тогда, когда она обладает базисом, образованным уравновешенными поглощающими множествами [2] ([3], гл. I, § 1, предложение 5). Легко видеть, что уравновешенность (соотв. выпуклость) подмножеств всякой твг (E, u) над K (соотв. над $\mathbf{C}$ или $\mathbf{R}$) при замыкании сохраняется.

[2] Т.е. множествами $U\subset E$ такими, что $|\lambda|\leqslant 1\Rightarrow\lambda U\subset U$ и каждое $x\in E$ содержится в λU для всех достаточно больших $|\lambda|$.

2. B-полные топологические векторные группы.

Определение 2. Твг называется *B-полной*, если она отделима и всякое ее почти открытое непрерывное линейное отображение на какую бы то ни было отделимую твг открыто.

Локально выпуклое пространство (сокращенно: лвп) или, соответственно, твп, B-полное как твг, тем более B-полно как лвп (соотв. твп). Но верно и обратное:

Предложение 1. *Всякое B-полное лвп (соотв. твп) (E, u) B-полно и как твг.*

Доказательство. Пусть φ—почти открытое непрерывное линейное отображение (E, u) на отделимую твг (F, v), а $\mathfrak{B}$—совокупность всех замкнутых v-окрестностей [3] (и значит базис (F, v)). Если $V\in\mathfrak{B}$, то $\varphi^{-1}(V)$ есть u-окрестность и значит содержит выпуклую (соотв. уравновешенную) u-окрестность U, откуда $\overline{\varphi(U)}\subset\overline{V}=V$. Но $\overline{\varphi(U)}$—v-окрестность и притом, вместе с U,—выпуклое (соотв. уравновешенное) поглощающее множество. Таким образом (F, v) обладает базисом, образованным выпуклыми (соотв. уравновешенными) поглощающими множествами, и значит есть лвп (соотв. твп). А тогда, поскольку (E, u)—B-полное лвп (соотв. твп), φ открыто.

Лемма 1. *Если φ—почти открытое непрерывное линейное отображение B-полной твг (E, u) на (не обязательно отделимую) твг (F, v), то для каждой u-окрестности U существует v-окрестность V, содержащаяся в $\varphi(U)+N_v$, где N_v—замыкание нуля в (F, v).*

Доказательство. Для каждой u-окрестности U существует v-окрестность V_0, содержащаяся в $\overline{\varphi(U)}$. Пусть ω—каноническое отображение F на F/N_v. Так как $\omega(V_0)\subset\omega\big(\overline{\varphi(U)}\big)\subset\overline{\omega\varphi(U)}$, то $\omega\varphi$ почти открыто и значит, в силу отделимости $(F, v)/N_v$ и B-полноты (E, u), открыто. Поэтому существует v-окрестность V, для которой $\omega(V)\subset\omega\varphi(U)$. Но тогда $V\subset\omega^{-1}\omega\varphi(U)=\varphi(U)+N_v$.

Пусть (E, u)—твг, $\mathfrak{U}$—ее базис и $\mathfrak{P}_0(E)$—множество всех непустых подмножеств. Множества

$$\{(M, N)\in\mathfrak{P}_0(E)\times\mathfrak{P}_0(E)\colon M\subset N+U \text{ и } N\subset M+U\}\qquad (U\in\mathfrak{U})$$

образуют базис окружений равномерности в $\mathfrak{P}_0(E)$ (очевидно, зависящей от u, а не выбора $\mathfrak{U}$). $\mathfrak{P}_0(E)$, наделенное этой равномерностью, будем обозначать $\mathfrak{P}_0(E, u)$.

[3] Окрестностями всюду для сокращения именуются окрестности нуля.

Лемма 2. *Пусть* $(M_a)_{a\in A}$ — *убывающая сеть в* $\mathfrak{P}_0(E,u)$, *т. е.* $a<a'$ $\Rightarrow M_a\supset M_{a'}$). *Если* $M_a\to M$, *то* $\overline{M}=\bigcap_{a\in A}\overline{M}_a$ *и* $M_a\to\overline{M}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{U}$ — базис (E,u). Для каждого $U\in\mathfrak{U}$ существует $a_U\in A$ такое, что

(1) $$M\subset M_a+U \text{ и } M_a\subset M+U \quad \text{для всех } a\geqslant a_U.$$

Поскольку сеть $(M_a)_{a\in A}$ — убывающая, из первого включения следует, что $M\subset M_a+U$ для всех $a\in A$ и значит

$$M\subset\bigcap_{a\in A,U\in\mathfrak{U}}(M_a+U)=\bigcap_{a\in A}\overline{M}_a,$$

так что, полагая $N=\bigcap_{a\in A}\overline{M}_a$, имеем $\overline{M}\subset N$. С другой стороны, так как, в силу второго из включений (1), $N\subset\overline{M}_a\subset M+U+U$, то

$$N\subset\bigcap_{U\in\mathfrak{U}}(M+U+U)=\overline{M}.$$

Тем самым $\overline{M}=N$. Отсюда, далее, $\overline{M}\subset\overline{M}_a\subset M_a+U$ для всех $a\in A$ и $U\in\mathfrak{U}$. Так как, с другой стороны, $M_a\subset M+U\subset\overline{M}+U$ для всех $a\geqslant a_U$, то $M_a\to\overline{M}$.

Нам понадобятся также некоторые сведения о многозначных линейных отображениях [4].

Многозначным отображением или, короче, *мультиотображением* из множества E в множество F называется всякое отображение φ, относящее каждому элементу $x\in E$ некоторое множество $\varphi(x)\subset F$. *Областью определения* φ называется множество $D_\varphi=\{x\in E:\varphi(x)\neq\emptyset\}$, *графиком* — множество $\Gamma_\varphi=\{(x,y)\in E\times F:y\in\varphi(x)\}$ и *областью значений* — множество $R_\varphi=\varphi(E)$, где вообще под $\varphi(A)$ $(A\subset E)$ понимается $\bigcup_{x\in A}\varphi(x)$. Мультиотображение φ^{-1} из F в E, *обратное* к φ, определяется условием, что отношения $x\in\varphi^{-1}(y)$ и $y\in\varphi(x)$ равносильны. Для каждого $B\subset F$ имеем $\varphi^{-1}(B)=\{x\in E:\varphi(x)\cap B\neq\emptyset\}$. φ называется *мультиотображением* E (а не „из E") в F, если $D_\varphi=E$, и „на F", если $R_\varphi=F$.

Если E и F — векторные пространства над одним и тем же полем K, то мультиотображение φ из E в F называется *линейным*, если $D_\varphi\neq\emptyset$ и $\lambda\varphi(x)+\mu\varphi(y)\subset\varphi(\lambda x+\mu y)$ для всех $x,y\in E$ и $\lambda,\mu\in K$ (при соглашении, что $A+\emptyset=\emptyset+A=\lambda\emptyset=\emptyset$). Тогда также φ^{-1} линейно, D_φ, Γ_φ, R_φ, $\varphi^{-1}(0)$, $\varphi(0)$ — векторные пространства и $\varphi(x)$ для каждого $x\in D_\varphi$ — смежный класс F по $\varphi(0)$. Покажем, что

(2) $$\varphi^{-1}(\varphi(A)+B)\subset A+\varphi^{-1}(B) \quad \text{для всех } A\subset E, B\subset F,$$

(3) $$R_\varphi=F\Rightarrow B\subset\varphi\varphi^{-1}(B) \quad \text{для каждого } B\subset F.$$

[4] Подробнее о них см., напр., в [15].

В самом деле, если $x\in\varphi^{-1}(\varphi(A)+B)$, то существуют $a\in A$ и $b\in B$ такие, что $\varphi(x)$ пересекается с $\varphi(a)+b$. Так как это смежные классы F по $\varphi(0)$, то $\varphi(x)=\varphi(a)+b$, $b\in\varphi(x)-\varphi(a)=\varphi(x-a)$ и значит $x\in a+\varphi^{-1}(b)\subset A+\varphi^{-1}(B)$. Далее, если $R_\varphi=F$ и $y\in B$, то существует $x\in E$, для которого $y\in\varphi(x)$, т. е. $x\in\varphi^{-1}(y)\subset\varphi^{-1}(B)$ и значит $y\in\varphi(x)\subset\varphi\varphi^{-1}(B)$.

Как легко видеть, если $\mathfrak{U}$ — базис топологии твг в E, то $\varphi(\mathfrak{U})$ — базис топологии твг в F. Наконец, если (E,u) и (F,v) — твг, то линейное мультиотображение φ из E в F будет называться *открытым* (*почти открытым*), если $\varphi(U)$ (соотв. $\overline{\varphi(U)}$) — v-окрестность для каждой u-окрестности U, и *непрерывным* (*почти непрерывным*), если φ^{-1} открыто (почти открыто).

Лемма 3. *Пусть* (E,u) *и* (F,v) — *твг. Если* φ — *линейное мультиотображение из* (E,u) *в* (F,v), *имеющее замкнутый график* Γ_φ, *то*

(4) $$\varphi(0)=\bigcap_{U\in\mathfrak{U}}\overline{\varphi(U)}$$

для любого базиса $\mathfrak{U}$ (E,u) [5].

Доказательство. Пусть $y\in F$ и $y\notin\varphi(0)$, так что $(0,y)\notin\Gamma_\varphi$. Тогда существуют u-окрестность U и v-окрестность V такие, что $[U\times(y+V)]\cap\Gamma_\varphi=\emptyset$, т. е. $y\notin\varphi(U)-V$. Поэтому $y\notin\overline{\varphi(U)}=\bigcap_V(\varphi(U)-V)$ (где пересечение взято по всем v-окрестностям V) и значит $y\notin\bigcap_{U\in\mathfrak{U}}\overline{\varphi(U)}$. Тем самым $\bigcap_{U\in\mathfrak{U}}\overline{\varphi(U)}\subset\varphi(0)$. Обратное включение очевидно.

Теорема 1. *Для твг* (E,u) *следующие условия равносильны*:

(I) (E,u) *B-полно.*

(II) *В* $\mathfrak{P}_0(E,u)$ *всякий базис любой топологии твг в* E, *образующий по убыванию сеть Коши, сходится.*

(III) *В* $\mathfrak{P}_0(E,u)$ *всякий базис любой топологии твг в* E, *мажорируемой топологией* u, *образующий по убыванию сеть Коши, сходится.*

(IV) *Всякое почти открытое линейное мультиотображение с замкнутым графиком из* (E,u) *на какую бы то ни было твг* (F,v) *открыто* (= *всякое почти непрерывное линейное мультиотображение с замкнутым графиком какой бы то было твг* (F,v) *в* (E,u) *непрерывно*).

Доказательство. (I) $\Rightarrow$ (II). Пусть $\mathfrak{U}$ — базис (E,u) и v — топология твг в E с базисом $\mathfrak{V}$, образующим по убыванию сеть Коши в $\mathfrak{P}_0(E,u)$. $\mathfrak{U}+\mathfrak{V}=(U+V)_{U\in\mathfrak{U},V\in\mathfrak{V}}$ также есть базис топологии твг в E; обозначим ее w. Очевидно, тождественное отображение $i:(E,u)\to(E,w)$ непрерывно. Далее, для каждого $U_0\in\mathfrak{U}$ существует $U_1\in\mathfrak{U}$ такое, что $U_1+U_1\subset U_0$. А так как $\mathfrak{V}$ — убывающая сеть Коши в $\mathfrak{P}_0(E,u)$,

[5] Если $D_\varphi=E$, то и обратно, (4) влечет замкнутость Γ_φ.

то существует $V_1 \in \mathfrak{B}$, содержащееся в U_1+V для всех $V\in\mathfrak{B}$, так что (обозначая чертой w-замыкание) имеем

$$\overline{U}_0 = \bigcap_{U\in\mathfrak{U}, V\in\mathfrak{B}} (U_0+U+V) \supset \bigcap_{U\in\mathfrak{U}, V\in\mathfrak{B}} (U+U_1+U_1+V) \supset U_1+V_1.$$

Тем самым i также почти открыто. Поэтому, если (E, u) B-полно, то в силу леммы 1 существуют $U_2\in\mathfrak{U}$ и $V_0\in\mathfrak{B}$ такие, что $U_0+\bigcap_{U\in\mathfrak{U}, V\in\mathfrak{B}}(U+V) \supset U_2+V_0$. Тем самым показано, что для каждого $U_0\in\mathfrak{U}$ существует $V_0\in\mathfrak{B}$, при котором $V' \subset U_0+\bigcap_{V\in\mathfrak{B}}\overline{V}$ для всех $V' \subset V_0$ (где черта означает u-замыкание). Так как, с другой стороны, $\bigcap_{V\in\mathfrak{B}}\overline{V} \subset \overline{V}' \subset V'+U_0$ для всех вообще $V'\in\mathfrak{B}$, то заключаем, что $\mathfrak{B} \to \bigcap_{V\in\mathfrak{B}}\overline{V}$ в $\mathfrak{P}_0(E, u)$.

(II) $\Rightarrow$ (III) очевидно.

(III) $\Rightarrow$ (IV). Пусть φ — почти открытое линейное мультиотображение из (E, u) на твг (F, v), имеющее замкнутый график Γ_φ, а $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$ — базисы, соответственно, (E, u) и (F, v). Так как φ почти открыто, то для каждого $U_0\in\mathfrak{U}$ существует V_0 такое, что $V_0 \subset \overline{\varphi(U_0)}$, т. е. $V_0 \subset \varphi(U_0)+V$ для всех $V\in\mathfrak{B}$. В силу (2), тогда $\varphi^{-1}(V_0) \subset U_0+\varphi^{-1}(V)$ для всех $V\in\mathfrak{B}$, и так как, с другой стороны, $\varphi^{-1}(V) \subset U_0+\varphi^{-1}(V_0)$ для всех $V \subset V_0$, то $\varphi^{-1}(\mathfrak{B})$, а следовательно и $\varphi^{-1}(\mathfrak{B})+\mathfrak{U}$, —(убывающая) сеть Коши в $\mathfrak{P}_0(E, u)$. Но $\varphi^{-1}(\mathfrak{B})+\mathfrak{U}$ — базис топологии твг в E, мажорируемой u. Поэтому, если (E, u) удовлетворяет условию (III), то $\varphi^{-1}(\mathfrak{B})+\mathfrak{U}$ сходится, так что, в силу леммы 2, для каждого $U_1\in\mathfrak{U}$ существует $V_1\in\mathfrak{B}$ такое, что $\varphi^{-1}(V_1) \subset U_1+\bigcap_{U\in\mathfrak{U}, V\in\mathfrak{B}}\overline{\varphi^{-1}(V)+U}$. Но

$$\bigcap_{V\in\mathfrak{B}}\overline{\varphi^{-1}(V)} \subset \bigcap_{U\in\mathfrak{U}, V\in\mathfrak{B}}\overline{\varphi^{-1}(V)+U} \subset \bigcap_{U\in\mathfrak{U}, V\in\mathfrak{B}}\left(\varphi^{-1}(V)+U+U\right) \subset \bigcap_{V\in\mathfrak{B}}\overline{\varphi^{-1}(V)},$$

так что

$$\bigcap_{U\in\mathfrak{U}, V\in\mathfrak{B}}\overline{\varphi^{-1}(V)+U} = \bigcap_{V\in\mathfrak{B}}\overline{\varphi^{-1}(V)}.$$

С другой стороны, так как замкнутость Γ_φ влечет замкнутость $\Gamma_{\varphi^{-1}}$, то в силу леммы 3 (примененной к φ^{-1} вместо φ), $\bigcap_{V\in\mathfrak{B}}\overline{\varphi^{-1}(V)} = \varphi^{-1}(0)$. Таким образом, $\varphi^{-1}(V_1) \subset U_1+\varphi^{-1}(0)$, и так как $R_\varphi = F$, то, в силу (3) и (2) (примененного к φ^{-1} вместо φ), $V_1 \subset \varphi\varphi^{-1}(V_1) \subset \varphi\left(U_1+\varphi^{-1}(0)\right) \subset \varphi(U_1)$, так что φ открыто.

(IV) $\Rightarrow$ (I) очевидно, поскольку всякое непрерывное отображение в отделимое топологическое пространство имеет замкнутый график.

Из определения B-полноты легко вытекает

Предложение 2. *Факторгруппа B-полной твг по замкнутой векторной подгруппе B-полна.*

С другой стороны, из эквивалентности B-полноты условию (II) теоремы 1 следует

Предложение 3. *Замкнутая векторная подгруппа (F, v) B-полной твг (E, u) B-полна.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}$ — базис топологии твг в F, образующий по убыванию сеть Коши в $\mathfrak{P}_0(F, v)$. Те же свойства $\mathfrak{X}$ имеет в E и $\mathfrak{P}_0(E, u)$. Так как (E, u) B-полно, то $\mathfrak{X}$ сходится в $\mathfrak{P}_0(E, u)$ и притом, в силу леммы 2, к $\bigcap_{X\in\mathfrak{X}}\overline{X}$, где черта означает замыкание в (E, u). Но так как F замкнуто, то $\overline{X}$ есть также замыкание X в (F, v), так что $\bigcap_{X\in\mathfrak{X}}\overline{X} \subset F$. А тогда $\mathfrak{X} \to \bigcap_{X\in\mathfrak{X}}\overline{X}$ в $\mathfrak{P}_0(F, v)$.

3. Локально выпуклые группы.

Определение 3. *Локально выпуклой группой* (сокращенно: лвг) называется твг над **C** или **R**, обладающая базисом, образованным выпуклыми множествами.

Предложение 4. *Лвг обладает базисом, образованным уравновешенными выпуклыми множествами.*

Доказательство. Пусть U — произвольная u-окрестность. Существуют выпуклые u-окрестности U_1 и W_1 такие, что $W_1+W_1 \subset U_1 \subset U$. Положим

$$V = \{x\in U_1 : |\lambda| \leqslant 1 \Rightarrow \lambda x\in U_1\} \quad \text{и} \quad W = W_1 \cap (-W_1) \cap iW_1 \cap (-iW_1).$$

V уравновешенно, ибо если $x\in V$ и $|\mu|\leqslant 1$, то $\mu x\in U_1$ и $|\lambda|\leqslant 1 \Rightarrow \lambda\mu x\in U_1$ (поскольку $|\lambda\mu|\leqslant 1$), так что $\mu x\in V$. V выпукло, ибо если $x, y\in V$ и $z = (1-\varrho)x+\varrho y$, где $0\leqslant\varrho\leqslant 1$, то, в силу выпуклости U_1, $z\in U_1$ и $\lambda z = (1-\varrho)\lambda x+\varrho\lambda y\in U_1$ при $|\lambda|\leqslant 1$, так что $z\in V$. Наконец, V — u-окрестность. В самом деле, W — u-окрестность, выдерживающая умножение на i и все $\varrho\in[-1, 1]$. Пусть $x\in W$ и $|\lambda|\leqslant 1$, так что $\lambda = \varrho(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, где $0\leqslant\varrho\leqslant 1$. Так как $x\in U_1$ и

$$\lambda x = \varrho\cos\alpha\cdot x+i\varrho\sin\alpha\cdot x\in W+W \subset U_1,$$

то $x\in V$, так что $V \supset W$. Таким образом, каждая u-окрестность U содержит уравновешенную выпуклую окрестность V.

Если в примере, приведенном в n° 1, все E_α — преднормированные пространства, то твг E локально выпукла. Предложение 4 показывает, что так может быть задана любая лвг (E, u): нужно только за E_α принять линейные оболочки E_U всевозможных уравновешенных выпуклых u-окрестностей U, наделенные в качестве преднормы функционалом Минковского $p_U(x) = \inf\{\lambda > 0 : x\in\lambda U\}$.

Линейный функционал на лвг (E, u) непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен на некоторой u-окрестности. Будем обозначать через $(E, u)'$ векторное пространство всех непрерывных линейных функционалов на (E, u).

Предложение 5. *Если лвг (E, u) отделима, то для каждого ненулевого $x_0 \in E$ существует $f_0 \in (E, u)'$ такое, что $f_0(x_0) \neq 0$.*

Доказательство. В силу отделимости (E, u) и предложения 4 существует уравновешенная выпуклая u-окрестность U, не содержащая x_0. Если $x_0 \in E_U$, то существует $g_0 \in E'_U$, для которого $g_0(x_0) \neq 0$, и требуемым свойством обладает любое его линейное продолжение f_0 на E. Если же $x_0 \notin E_U$, то любое $g_0 \in E'_U$ обладает нужным линейным продолжением f_0 на E.

Предложение 6. *Пусть (E, u) — лвг и (F, v) — ее векторная подгруппа, наделенная индуцированной топологией (очевидно, также локально выпуклой). Всякое $h \in (F, v)'$ допускает продолжение до $f \in (E, u)'$.*

Доказательство. Так как $V = \{x \in F: |h(x)| \leqslant 1\}$ — (уравновешенная выпуклая) v-окрестность, то в силу предложения 4 существует уравновешенная выпуклая u-окрестность W такая, что $W \cap F \subset V$. Выпуклая оболочка U множества $V \cup W$ уравновешенна. А так как $U \cap F = V$ (см. [3], гл. II, § 2, доказательство леммы 1), то $|h(x)| \leqslant \leqslant p_U(x)$ для всех $x \in F$. Тогда, по теореме Хана-Банаха, h обладает продолжением $g \in E'_U$, и остается взять любое линейное продолжение f последнего на E.

4. Минимальные локально выпуклые группы.

Определение 4. Отделимая лвг (E, u) называется *минимальной*, если на E не существует отделимой топологии лвг, более слабой, чем u.

Предложение 7. *Лвг (E, u) минимальна тогда и только тогда, когда она изоморфна произведению недискретных одномерных отделимых лвп („прямых").*

Доказательство. Пусть (E, u) минимальна и s — слабейшая из топологий в E, при которых непрерывны все $f \in (E, u)'$. (E, s) — лвп, в силу предложения 5 отделимое. Так как $s \leqslant u$, то заключаем, что $u = s$, так что (E, u) — лвп. Но будучи минимальным в классе лвг, (E, u) тем более минимально в классе лвп и значит изоморфно произведению прямых [5]. Обратно, пусть (E, u) — произведение прямых и v—топология отделимой лвг в E, мажорируемая топологией u. Согласно предложению 4, v обладает базисом, образованным уравновешенными выпуклыми множествами. Будучи также u-окрестностями, эти множества — поглощающие. Но тогда v—топология (отделимого) лвп и значит $v = u$, поскольку (E, u) в классе лвп минимально [5].

Предложение 8. *Пусть E и F — отделимые лвг и φ — непрерывное линейное отображение E в F. Если E минимальна, то и $\varphi(E)$, наделенная индуцированной из F топологией v, минимальна.*

Доказательство. Так как F отделима, то $\varphi^{-1}(0)$ замкнуто, так что $E/\varphi^{-1}(0)$ отделима. Поскольку E, согласно предложению 7, изоморфно произведению прямых, то же верно [5] и для $E/\varphi^{-1}(0)$, так что $E/\varphi^{-1}(0)$ (снова по предложению 7) минимальна. Пусть u — ее топология и $\dot\varphi$ — отображение $E/\varphi^{-1}(0) \to \varphi(E)$, ассоциированное с φ. Так как $\dot\varphi$ непрерывно, то $\dot\varphi^{-1}(v) \leqslant u$. Так как v отделима, а $\dot\varphi$ инъективно, то $\dot\varphi^{-1}(v)$ отделима. Следовательно $\dot\varphi^{-1}(v) = u$. Наконец, так как $\dot\varphi$ сюръективно, то $v = \dot\varphi\dot\varphi^{-1}(v) = \dot\varphi(u)$. Тем самым $\dot\varphi$ — изоморфизм и значит $\varphi(E)$ минимальна.

Предложение 9. *Каждая минимальная подгруппа F лвг E обладает в E топологическим дополнением.*

Доказательство. В силу предложения 7, существует изоморфизм $\varphi: F \to \Pi = \prod_{a \in A} l_a$, где каждое l_a — поле скаляров $\mathbf{C}$ (или $\mathbf{R}$) с его обычной топологией. Пусть π_a — каноническая проекция Π на l_a. Так как $\pi_a\varphi \in (F, v)'$, то в силу предложения 6 для каждого $a \in A$ существует $f_a \in (E, u)'$ такое, что $\pi_a\varphi = f_a i_F$, где i_F — тождественное вложение F в E. Но $f_a = \pi_a f$, где f — непрерывное линейное отображение (E, u) в Π, определяемое формулой $f(x) = \big(f_a(x)\big)_{a \in A}$. Таким образом $\pi_a\varphi = \pi_a f i_F$ для всех $a \in A$. А тогда $\varphi = f i_F$, так что $\varphi^{-1} f i_F$ — тождественное отображение F на себя. Но это означает, что $\varphi^{-1} f$ есть непрерывное линейное отображение E на F, оставляющее все элементы из F на месте, и следовательно F имеет топологическое дополнение в E ([2], гл. III, § 6, следствие предложения 2).

Теорема 2. *Топологическая прямая сумма минимальной лвг E и любой B-полной лвг F B-полна.*

Доказательство. Пусть φ — почти открытое непрерывное линейное отображение $E \oplus F$ на отделимую лвг G. Обозначим через i_E и i_F тождественные вложения соответственно E и F в $E \oplus F$. В силу предложения 8 (примененного к φi_E), $\varphi(E)$ минимальна и значит, по предложению 9, обладает в G топологическим дополнением H. Пусть π_H — проекция G на H с ядром $\varphi(E)$ и i_H — тождественное вложение H в G, так что $\pi = i_H \pi_H$ есть проектор в G с областью значений H и ядром $\varphi(E)$. Так как

$$\varphi(E) + H = G = \varphi(E) + (1-\pi)\varphi(F) + \pi\varphi(F) = \varphi(E) + \pi\varphi(F),$$

то $\pi\varphi(F) = H$, так что $\pi_H \varphi i_F$ — непрерывное линейное отображение F на H. Пусть V — произвольная окрестность в F. Так как $E + V$ — окрестность в $E \oplus F$ и φ почти открыто, то $\overline{\varphi(E+V)}$ — окрестность в G, а следовательно $\pi_H\big(\overline{\varphi(E+V)}\big)$ и тем более $\overline{\pi_H\varphi(E+V)} = \overline{\pi_H\varphi(V)}$ — окрестность в H. Тем самым $\pi_H \varphi i_F$ почти открыто. Так как F B-полно, то $\pi_H \varphi i_F$ открыто. Пусть теперь W — произвольная окрестность в $E \oplus F$. Существуют окрестности U в E и V в F такие, что $W \supset \supset U+V$, откуда $\varphi(W) \supset \varphi(U+V) = \varphi(U) + (1-\pi)\varphi(V) + \pi\varphi(V)$. Но, как видно из доказательства предложения 8, φi_E, рассматриваемое как отображение E на $\varphi(E)$, открыто. Поэтому $\varphi(U)$ $(=\varphi i_E(U))$, а значит и $\varphi(U)+(1-\pi)\varphi(V)$, — окрестность в $\varphi(E)$. С другой стороны, так как $\pi_H \varphi i_F$ открыто, то $\pi\varphi(V)$ $(= i_H \pi_H \varphi i_F(V))$ — окрестность в H. Следовательно $\varphi(W)$ — окрестность в $G = \varphi(E) \oplus H$, т. е. φ открыто и теорема доказана.

5. *B*-полные линейно-топологические пространства. Как известно [10, 9], *линейно-топологическим пространством* (сокращенно: лтп) называется твг, обладающая базисом, образованным векторными подпространствами. Будем называть лтп *B-полным*, если оно отделимо и всякое его почти открытое непрерывное линейное отображение на какое бы то ни было отделимое лтп открыто. Совершенно так же, как предложение 1, можно доказать, что *всякое B-полное лтп есть B-полная твг.*

Лтп E называется *линейно-компактным* [10], если в нем каждая центрированная система замкнутых аффинных многообразий имеет непустое пересечение. В [9] показано, что каждое непрерывное линейное отображение φ линейно-компактного лтп E в отделимое лтп G, как отображение E на $\varphi(E)$, открыто, причем $\varphi(E)$ обладает в G топологическим дополнением. Но только на этих свойствах минимальной лвг E и основывалось доказательство теоремы 2. Тем самым доказана также

Теорема 2'. *Топологическая прямая сумма линейно-компактного лтп и любого B-полного лтп B-полна.*

Отсюда, в частности, следует, что *всякое локально линейно-компактное лтп B-полно.* В самом деле, оно разложимо в топологическую прямую сумму линейно-компактного и дискретного лтп [10, 9], а дискретное лтп очевидным образом B-полно.

6. Замечания. Имеется довольно много работ, в которых изучаются те или иные варианты понятия B-полноты. В частности, в [7] рассмотрены B-полные топологические группы. По-видимому, они образуют очень узкий класс. Как следует из одной теоремы Дектярева [4], каждая ультраполная топологическая группа B-полна. Два примера B-полных топологических групп, приведенные в [7], — как раз этого типа; еще одним может служить сумма счетного семейства прямых [1]. Не исключено, что всякая B-полная топологическая группа ультраполна. Между тем класс B-полных твг содержит все B-полные локально выпуклые пространства, среди которых по крайней мере произведения несчетных семейств прямых не ультраполны. Как мы видели, B-полнота сохраняется при переходе от классов лвп, твп и лтп к классу всех топологических векторных групп; однако мало вероятно, чтобы всякая B-полная твг сохраняла B-полноту хотя бы в классе всех коммутативных топологических групп.

Даже объем класса B-полных локально выпуклых пространств слабо изучен. (Примеры не минимальных B-полных лвп, отличные от приведенных в [12], имеются, кажется, лишь в [14] и [6].) Во всяком случае, этот класс содержит очень многие пространства, важные для функционального анализа. Однако, из одного недавнего примера Словиковского [18] следует, что пространство $\mathscr{D}'$ „распределений" Л. Шварца не B-полно (и даже обладает неполным факторпространством). Вопрос о B-полноте пространства $\mathscr{D}$ „финитных" функций продолжает оставаться открытым.

Литература

[1] И. А. Березанский, *Ультраполнота топологической суммы счетного семейства прямых*, Успехи матем. наук, XX: 2 (122) (1965), стр. 167-173.

[2] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique.* Livre III, *Topologie générale*, Ch. III—IV, 3e éd., Paris 1960.

[3] — N. Bourbaki, *Eléments de mathématique.* Livre V, *Espaces vectoriels topologiques*, Ch. I-II, Paris 1953.

[4] И. М. Дектярев, *Теорема о замкнутом графике для ультраполных пространств*, Доклады АН СССР 157: 4 (1964), стр. 771-773.

[5] A. Grothendieck, *Espaces vectoriels topologiques*, São Paulo 1958.

[6] T. Husain, *The open mapping and closed graph theorems in topological vector spaces*, Oxford 1965.

[7] — *Introduction to topological groups*, Philadelphia and London 1966.

[8] J. L. Kelley, *Hypercomplete linear topological spaces*, Mich. Math. J. 5 (1958), стр. 235-246.

[9] G. Köthe, *Topologische lineare Räume I*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960.

[10] S. Lefschetz, *Algebraic topology*, Coll. Publ. Amer. Math. Soc. 1942.

[11] В. Птак, *О полных топологических линейных пространствах*, Чехосл. мат. ж. 3 (78): 4 (1953), стр. 301-364.

[12] V. Pták, *Completeness and the open mapping theorem*, Bull. Soc. Math. France 86 (1958), стр. 41-74.

[13] — *On the closed graph theorem*, Чехосл. мат. ж. 9 (84) (1959), стр. 523-527.

[14] Д. А. Райков, *Теоремы о замкнутом графике и полнота топологических линейных пространств*, Труды 4 Всесоюз. мат. съезда, т. 2, Ленинград 1964, стр. 317-323.

[15] — *Двусторонняя теорема о замкнутом графике для топологических линейных пространств*, Сибирский мат. ж. УП: 2 (1966), стр. 353-372.

[16] A. Robertson and W. Robertson, *On the closed graph theorem*, Proc. Glasgow Math. Ass. 3 (1956), Part I, стр. 9-12.

[17] W. Słowikowski, *On the theory of* $(\mathscr{F})$*-sequences*, Studia Math. 25 (1965), стр. 281-296.

[18] — *Extensions of sequentially continuous linear functionals in inductive sequences of* $(\mathscr{F})$*-spaces*, там же 26 (1966), стр. 193-221.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ В. И. ЛЕНИНА

Reçu par la Rédaction le 12. 3. 1968