whence

$$|a_{2^m+l}| \leqslant 2^{am}\sum_{k=1}^{2^m}|b_{2^m+k}| = 2^{am}\sum_{2^m<n_k<2^{m+1}}|b_{n_k}| = O(1),$$

but this means that the b's and a's satisfy (9) with $p=\infty$. Applying Theorem 5 adapted to this case we complete the proof.

References

[1] Z. Ciesielski, *Properties of the orthonormal Franklin system*, Studia Math. 23 (1963), p. 141-157.

[2] — *Properties of the orthonormal Franklin system, II*, ibidem 27 (1966), p. 289-323.

[3] С. Качмаж и Г. Штейнгауз, *Теория ортогональных рядов*, Москва 1958.

INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES
INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Reçu par la Rédaction le 18. 3. 1968

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXI. (1968)

О спектре сингулярных интегральных операторов в пространствах L_p

И. Ц. ГОХБЕРГ и Н. Я. КРУПНИК (Кишинев)

Посвящается С. Мазуру и В. Орличу

Рассмотрим сперва самый простой класс одномерных сингулярных интегральных операторов — дискретные операторы Винера-Хопфа.

Пусть T_a — линейный ограниченный оператор, определенный в пространстве l_2 бесконечной матрицей $\|a_{j-k}\|_{j,k=0}^{\infty}$, где a_j — коэффициенты Фурье некоторой ограниченной функции $a(\zeta)$ $(|\zeta|=1)$.

Если функция $a(\zeta)(|\zeta|=1)$ непрерывна, то *спектр оператора T_a состоит из всех точек кривой $a(\zeta)$ $(|\zeta|=1)$ и всех комплексных чисел λ, не лежащих на этой кривой, для которых величина*

$$\operatorname{ind}(a-\lambda) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi}\left[\arg\left(a(e^{i\theta})-\lambda\right)\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \neq 0.$$

Это предложение сохраняет силу (см. [7]), если пространство l_2 заменить многими другими банаховыми пространствами. В частности, пространство l_2 можно заменить любым пространством h_p $(1<p<\infty)$ последовательностей коэффициентов Фурье функций из соответствующего пространства Харди H_p (см. [2]). Положение усложняется, если функция $a(\zeta)$ не является непрерывной.

В случае, когда функция $a(\zeta)$ $(|\zeta|=1)$ непрерывна слева и имеет конечное число точек разрыва $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ *спектр оператора T_a в пространстве l_2* (см. [3]) *состоит из всех точек кривой $V(a)$, полученной добавлением к множеству всех значений функции $a(\zeta)$ отрезков $\mu a(\zeta_k)+(1-\mu)a(\zeta_k+0)$ $(0\leqslant\mu\leqslant 1)$, а также из точек $\lambda\notin V(a)$, для которых*

$$\operatorname{ind}(a-\lambda) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi}\oint_{V(a)} d_t\arg(t-\lambda) \neq 0.$$

Этот результат перестает быть верным в пространствах h_p $(p\neq 2,$ $1<p<\infty)$: *в случае кусочно-непрерывной функции $a(\zeta)$ спектр оператора T_a в h_p меняется с изменением p.*

Настоящая статья посвящена отысканию спектра оператора T_a в пространствах h_p и решению такой же задачи для других сингулярных интегральных операторов в пространствах L_p.

Некоторые результаты в этом направлении получены ранее в статье H. Widom'a [1] (см. также [14]). Важную роль для дальнейшего играют известные методы Н. И. Мусхелишвили [10] и Б. В. Хведелидзе [12], [13] решения сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами.

Статья состоит из четырех параграфов. В первом рассматриваются дискретные уравнения Винера-Хопфа в пространствах h_p. Во втором параграфе исследуется спектр сингулярных интегральных операторов с разрывными коэффициентами в $L_p(\Gamma)$, где Γ состоит из конечного числа замкнутых контуров. В качестве приложения в третьем параграфе получены оценки для норм некоторых сингулярных интегральных операторов в L_p. В частности, для некоторых L_p получено точное значение нормы преобразования Гильберта. В последнем параграфе перечисленные результаты обобщаются на некоторые симметричные пространства.

§ 1. Спектр дискретных уравнений Винера-Хопфа в пространствах h_p

1. Пусть H_p $(1<p<\infty)$—пространство Харди, т.е. пространство всех функций $f(\zeta)$, аналитических внутри круга $|\zeta|<1$ с нормой

$$\|f\|_{H_p}=\lim_{\varrho\uparrow 1}\Big(\int_0^{2\pi}|f(\varrho e^{i\theta})|^p\,d\theta\Big)^{1/p}(<\infty).$$

Через h_p будем обозначать изометричное H_p банахово пространство числовых последовательностей $\xi=\{\xi_j\}_0^\infty$ — коэффициентов Фурье функций из H_p.

Обозначим через Λ множество всех кусочно непрерывных и непрерывных слева функций на единичной окружности $(|\zeta|=1)$.

В настоящем параграфе исследуется спектр операторов, порожденных в h_p $(1<p<\infty)$ матрицами вида $\|a_{j-k}\|_{j,k=0}^\infty$, где a_j $(j=0,\pm 1,\ldots)$ — коэффициенты Фурье функции $a(\zeta)\in\Lambda$. Оператор T_a, порожденный в любом пространстве h_p $(1<p<\infty)$ указанной выше матрицей, является линейным ограниченным оператором в h_p.

2. Пусть a и b некоторая пара точек комплексной плоскости и p—число из интервала $(2,\infty)$. Через $\nu_p(a,b)$ обозначим дугу окружности, соединяющую точки a, b и обладающую следующими двумя свойствами: (α) из внутренних точек дуги $\nu_p(a,b)$ отрезок ab виден под углом $2\pi/p$; (β) направление от точки a к b вдоль дуги $\nu_p(a,b)$ идет против часовой стрелки.

В случае $1<p<2$ положим $\nu_p(a,b)=\nu_q(b,a)$ $(p^{-1}+q^{-1}=1)$, а в случае $p=2$ через $\nu_2(a,b)$ обозначим отрезок ab.

Пусть $a(\zeta)$ произвольная функция из Λ и ζ_k $(|\zeta_k|=1;\ k=1,2,\ldots,\ldots,n)$ — все её точки разрыва. Функции $a(\zeta)$ и числу p $(1<p<\infty)$ сопоставим непрерывную замкнутую кривую $V_p(a)$, полученную добавлением к множеству значений функции $a(\zeta)$ дуг окружностей $\nu_p\big(a(\zeta_k),a(\zeta_k+0)\big)$ $(k=1,2,\ldots,n)$. Кривую $V_p(a)$ ориентируем естественным образом, т.е. так чтобы в промежутках непрерывности функции $a(\zeta)$ направление движения по кривой $V_p(a)$ порождалось движением против часовой стрелки переменной ζ по окружности, а вдоль дуг $\nu_p\big(a(\zeta_k),a(\zeta_k+0)\big)$ — направлением от точки $a(\zeta_k)$ к $a(\zeta_k+0)$.

Функцию $a(\zeta)\in\Lambda$ будем называть *p-неособенной*, если кривая $V_p(a)$ не проходит через точку $\lambda=0$.

Индексом (точнее, *p-индексом*) p-неособенной функции $a(\zeta)$ назовем целое число $\operatorname{ind}_p a$, равное числу оборотов кривой $V_p(a)$ вокруг точки $\lambda=0$, т.е.

$$\operatorname{ind}_p a=\frac{1}{2\pi}\oint_{V_p(a)}d(\arg t).$$

Если функция $a(\zeta)\in\Lambda$ не является непрерывной, то, очевидно, её индекс зависит от числа p.

Заметим еще, что, в отличие от случая непрерывных функций, p-индекс произведения двух p-неособенных разрывных функций может не быть равным сумме p-индексов этих функций.

Однако можно легко показать, что *если сомножители f и g $(\in\Lambda)$ не имеют общих точек разрыва, то из p-неособенности функций f и g вытекает p-неособенность их произведения и равенство*

$$\operatorname{ind}_p(fg)=\operatorname{ind}_p f+\operatorname{ind}_p g.$$

3. Основной в этом параграфе является следующая

Теорема 1. *Пусть $a(\zeta)\in\Lambda$. Для того чтобы оператор T_a был Φ_+ или Φ_--оператором* (1) *в пространстве h_p, необходимо и достаточно, чтобы функция $a(\zeta)$ была p-неособенной.*

Если функция $a(\zeta)$ является p-неособенной, то

1. *при $\operatorname{ind}_p a>0$ оператор T_a обратим слева в пространстве h_p и* $\dim\operatorname{coker}T_a|h_p=\operatorname{ind}_p a$;

2. *при $\operatorname{ind}_p a<0$ оператор T_a обратим справа в пространстве h_p и* $\dim\ker T_a|h_p=-\operatorname{ind}_p a$;

---

(1) Оператор A называется *Φ_+ (Φ_-)-оператором*, если он нормально разрешим и $\dim\ker A<\infty$ $(\dim\operatorname{coker}A<\infty)$. Если A является одновременно Φ_+- и Φ_--оператором, то он называется *Φ-оператором*.

3. *при* $\operatorname{ind}_p a = 0$ *оператор* T_a *обратим в* h_p *с двух сторон.*

Из этой теоремы непосредственно вытекает следующая

Теорема 2. *Пусть* $a(\zeta)\in\Lambda$. *Спектр оператора* T_a *в* h_p $(1<p<\infty)$ *состоит из всех точек кривой* $V_p(a)$ *и точек* $\lambda\notin V_p(a)$, *для которых* $\operatorname{ind}_p(a-\lambda)\neq 0$.

Доказательство теоремы 1 будет приведено во втором параграфе. Здесь проиллюстрируем теорему 2 на примере оператора T_g определенного в h_p $(1<p<\infty)$ матрицей

$$\left\| \frac{1}{\pi i (j-k+\frac{1}{2})} \right\|_{j,k=0}^{\infty}.$$

Этот оператор представляет собой усечение дискретного преобразования Гильберта. Соответствующая функция

$$g(e^{i\theta}) = \frac{1}{\pi i}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{j+\frac{1}{2}}e^{i\theta} = e^{-i\theta/2} \qquad (0<\theta\leqslant 2\pi)$$

имеет на окружности одну точку разрыва $\zeta=1$. В силу теоремы 2 спектр $\sigma_p(T_g)$ оператора T_g зависит от p и представляет собой множество, ограниченное полуокружностью $e^{i\tau}$ $(\pi\leqslant\tau\leqslant 2\pi)$ и дугой окружности $\nu_p(-1,1)$

При $2<p<\infty$ имеем $\operatorname{ind}_p g = 0$, следовательно, для этих значений p оператор T_g обратим в h_p. При $1<p<2$ имеем $\operatorname{ind}_p g = -1$, следовательно, для этих значений p оператор T_g обратим справа в h_p и $\dim\ker T_g = 1$. Только в пространстве h_2 $(=l_2)$ оператор T_g не обратим ни с одной стороны (и вообще не является ни Φ_+- ни Φ_--оператором).

Спектр $\sigma_p(T_g)$ всегда содержит внутренние точки, за исключением случая $p=4$. В последнем случае спектр $\sigma_p(T_g)$ состоит из полуокружности $\nu_4(-1,1)=\{e^{i\tau};\ \pi\leqslant\tau\leqslant 2\pi\}$.

§ 2. Спектр сингулярных интегральных операторов в пространствах L_p

Обозначим через F^+ связное замкнутое ограниченное множество точек комплексной плоскости с границей Γ, состоящей из конечного числа простых замкнутых гладких ориентированных кривых: $\Gamma = \bigcup_{j=0}^{m}\Gamma_j$. Пусть F^- — замыкание дополнения к F^+ до всей плоскости. Будем считать, что $0\in F^+\setminus\Gamma$. Через F_j^- будем обозначать связную (ограниченную, если $j\neq 0$) часть множества F^- с границей Γ_j.

Множество всех функций, кусочно-непрерывных и непрерывных слева на Γ, обозначим через $\Lambda(\Gamma)$.

Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — все точки разрыва функции $g(t)\in\Lambda(\Gamma)$. Поставим функции $g(t)$ в соответствие кривую $V_p(g)$, состоящую из конечного числа замкнутых ориентированных непрерывных кривых, полученную путем добавления к множеству значений функции $g(t)$ n дуг $\nu_p(g(t_k), g(t_k+0))$.

Функцию $g(t)$ будем называть *p-неособенной*, если $0\notin V_p(g)$.

Индексом (*p-индексом*) p-неособенной функции $g(t)$ назовем целое число $\operatorname{ind}_p g$, равное числу оборотов контура $V_p(g)$ вокруг точки $\lambda=0$, т.е.

$$\operatorname{ind}_p g = \frac{1}{2\pi}\oint_{V_p(g)} d\arg t.$$

Аналогично случаю единичной окружности, если две p-неособенные функции не имеют общих точек разрыва, то их произведение также является p-неособенной функцией и p-индекс произведения равен сумме p-индексов сомножителей.

Рассмотрим сингулярный интегральный оператор $A = c(t)I + d(t)S$, где $c(t)$ и $d(t)\in\Lambda(\Gamma)$, а

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau.$$

Если ввести следующие обозначения: $c(t)+d(t)=a(t)$, $c(t)-d(t)=b(t)$, $(I+S)/2=P$, $(I-S)/2=Q$, то оператор A запишется в следующем виде: $A=a(t)P+b(t)Q$.

Рассмотрим сначала случай, когда $b(t)\equiv 1$.

Теорема 3. *Для того чтобы оператор* $A_g = gP+Q$ $(g(t)\in\Lambda(\Gamma))$ *был* Φ_+ *или* Φ_-*-оператором в пространстве* $L_p(\Gamma)$ $(1<p<\infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $g(t)$ *была p-неособенной.*

Если функция $g(t)$ *является p-неособенной, то*

1. *при* $\operatorname{ind}_p g>0$ *оператор* A_g *обратим слева в пространстве* $L_p(\Gamma)$ *и* $\dim\operatorname{coker} A_g = \operatorname{ind}_p g$;

2. *при* $\operatorname{ind}_p g<0$ *оператор* A_g *обратим справа в пространстве* $L_p(\Gamma)$ *и* $\dim\ker A_g = -\operatorname{ind}_p g$.

3. *при* $\operatorname{ind}_p g=0$ *оператор* A_g *обратим в* $L_p(\Gamma)$.

Идея доказательства достаточности условия теоремы 3 заимствована из теории сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами (см. [10, 13]). Согласно обычному пути в этой теории сперва докажем достаточность условий теоремы 3 для специальной (в определенном смысле простейшей) функции $\psi(t)\in\Lambda(\Gamma)$, затем общий случай будет рассмотрен с помощью этого простейшего.

Пусть t_k $(k=1,2,\ldots,n)$—некоторые точки контура Γ и s_k $(s_k\notin\Gamma)$ точки, выбранные по следующему правилу: если $t_k\in\Gamma_0$, то $s_k\in F^+$; если $t_k\in\Gamma_j$ $(j=1,2,\ldots,m)$, то $s_k\in F_j^-$. Контур Γ_j, содержащий точку t_k, будем также обозначать через $\Gamma^{(k)}$.

Обозначим через $\psi_k(t)$ непрерывную в каждой точке контура Γ, кроме, быть может, точки t_k, функцию

$$\psi_k(t)=\begin{cases}(t-s_k)^{\varepsilon\gamma_k} & \text{при } t\in\Gamma^{(k)},\\ 1 & \text{при } t\in\Gamma\setminus\Gamma^{(k)},\end{cases}$$

где $\varepsilon=1$, если $t_k\in\Gamma_0$, и $\varepsilon=-1$, если $t_k\notin\Gamma_0$, а γ_k комплексные числа, удовлетворяющие соотношениям:

$$\frac{1-p}{p}<\operatorname{Re}\gamma_k<\frac{1}{p}.$$

Легко видеть, что функция $\psi(t)=\psi_1(t)\ldots\psi_n(t)$ является p-неособенной и $\operatorname{ind}_p\psi=0$.

Лемма 1. *Оператор $A_\psi=\psi(t)P+Q$ обратим в $L_p(\Gamma)$.*

Доказательство. Каждую функцию $\psi_k(t)$ можно факторизовать (см., например, [12]): $\psi_k(t)=\psi_k^-(t)\psi_k^+(t)$, где

$$\psi_k^{(\varepsilon)}(t)=\begin{cases}(t-t_k)^{\varepsilon\gamma_k} & (t\in\Gamma^{(k)}),\\ 1 & (t\in\Gamma\setminus\Gamma^{(k)}),\end{cases}\qquad \psi_k^{(\varepsilon)}(t)=\begin{cases}\left(\dfrac{t-s_k}{t-t_k}\right)^{\varepsilon\gamma_k} & (t\in\Gamma^{(k)}),\\ 1 & (t\in\Gamma\setminus\Gamma^{(k)}).\end{cases}$$

Через $\psi^{(\varepsilon)}$ $(\psi^{(-\varepsilon)})$ обозначается ψ_k^+ (ψ_k^-) при $t_k\in\Gamma_0$ и ψ_k^- (ψ_k^+) при $t^k\in\Gamma\setminus\Gamma^0$.

Функция $\psi(t)$ допускает факторизацию $\psi(t)=\psi_-(t)\psi_+(t)$, где $\psi_\pm(t)=\psi_1^\pm(t)\ldots\psi_n^\pm(t)$. Рассмотрим оператор $B=(\psi_+^{-1}P+\psi_-Q)\psi_-^{-1}$ Учитывая, что $P+Q=I$, $P-Q=S$, оператор B можно представить следующим образом: $B=\frac{1}{2}[(\psi^{-1}+1)I+(\psi^{-1}-1)\psi_-S\psi_-^{-1}I]$.

Из теоремы Хведелидзе ([13], стр. 24) об ограниченности оператора S в пространстве L_p с весом вытекает, что оператор $\psi_-S\psi_-^{-1}I$ ограничен в $L_p(\Gamma)$ и, следовательно, оператор B также ограничен в $L_p(\Gamma)$.

Легко видеть, что для гельдеровых функций $\chi(t)$ $(t\in\Gamma)$ имеют место равенства

$$(\psi_+^{-1}P+\psi_-Q)\psi_-^{-1}(\psi P+Q)\chi=(\psi P+Q)(\psi_+^{-1}P+\psi_-Q)\psi_-^{-1}\chi=\chi.$$

Таким образом, оператор A_ψ обратим в $L_p(\Gamma)$, причем $A_\psi^{-1}=$ $=(\psi_+^{-1}P+\psi_-Q)\psi_-^{-1}I$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть $t_k(\in\Gamma_k)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ все точки разрыва функции $g(t)$. Так как $g(t)$ — p-неособенная функция, то отношение $g(t_k)/g(t_k+0)$ можно записать в виде

$$\frac{g(t_k)}{g(t_k+0)}=\left|\frac{g(t_k)}{g(t_k+0)}\right|e^{2\pi i\alpha_k},\tag{1}$$

где $(1-p)/p<\alpha_k<1/p$.

Обозначим через γ_k следующие числа:

$$\gamma_k=\alpha_k+\frac{1}{2\pi i}\ln\left|\frac{g(t)}{g(t_k+0)}\right|.$$

По точкам t_k и числам γ_k построим функцию $\psi(t)$. Отношение $g(t)/\psi(t)$ является непрерывной функцией, так как

$$\psi_k(t_k)/\psi_k(t_k+0)=e^{2\pi i\gamma_k}=g(t_k)/g(t_k+0).$$

Функция $g(t)$ может быть записана в виде произведения $g(t)=$ $\psi(t)r(t)\big(1+m(t)\big)$, где $r(t)$—рациональная функция, не имеющая на контуре Γ ни нулей ни полюсов, $\operatorname{ind}_p g=\operatorname{ind} r$ и максимум модуля функции $m(t)$ настолько мал, что вместе с оператором A_ψ оператор $A_{\psi+m\psi}=\psi P+Q+m\psi P$ обратим в $L_p(\Gamma)$.

Функцию $r(t)$ можно факторизовать (см. [4]): $r(t)=r_-(t)t^\varkappa r_+(t)$, где $r_+(t)$ $(r_-(t))$—рациональная функция с полюсами и нулями в области $F^-\cup\{\infty\}(F^+)$, причем $\varkappa=\operatorname{ind} r$ $(=\operatorname{ind}_p g)$.

Пусть $\varkappa\geqslant 0$, тогда легко проверяется равенство

$$gP+Q=r_-(\psi P+Q+\psi mP)(t^\varkappa P+Q)(r_+P+r_-^{-1}Q).$$

Операторы $\psi P+Q+\psi mP$ и $r_+P+r_-^{-1}Q$ обратимы в $L_p(\Gamma)$, а оператор $t^\varkappa P+Q$ обратим слева в $L_p(\Gamma)$ и $\dim\operatorname{coker}(t^\varkappa P+Q)=\varkappa$. Оператор $(r_+^{-1}P+r_-Q)(t^{-\varkappa}P+Q)(\psi P+Q+\psi mP)^{-1}r_-^{-1}$ является обратным слева к $gP+Q$. Отсюда вытекает, что если $\varkappa=0$, то оператор A_g обратим, а если $\varkappa>0$, то оператор A_g обратим только слева в $L_p(\Gamma)$ и $\dim\operatorname{coker}A_g=\operatorname{ind}_p g$.

Пусть $\varkappa<0$. В этом случае воспользуемся равенством

$$gt^{-\varkappa}P+Q=(gP+Q)(t^{-\varkappa}P+Q).$$

Так как $\operatorname{ind}_p(gt^{-\varkappa})=0$, то оператор $gt^{-\varkappa}P+Q$ обратим в $L_p(\Gamma)$; кроме того, оператор $t^{-\varkappa}P+Q$ обратим слева и $\dim\operatorname{coker}(t^{-\varkappa}P+Q)=$ $=-\varkappa$. Отсюда вытекает, что оператор A_g обратим только справа в $L_p(\Gamma)$ и $\dim\ker A_g=-\operatorname{ind}_p g$

Необходимость условий теоремы докажем от противного ([2]).

([2]) Идея этого доказательства заимствована из [9].

Допустим, что A_g является Φ_+- или Φ_--оператором в $L_p(\Gamma)$ и $0 \in V_p(g)$. Рассмотрим сначала случай, когда существует окрестность нуля $U(0)$, в которой $V_p(g)$ представляет собой простую гладкую линию. Так как A_g является $\Phi_\pm$-оператором, то можно найти окрестность нуля $U_1 \subset U$ такую, что для всех $\lambda \in U_1$ оператор $A_{g-\lambda}$ является $\Phi_\pm$-оператором и $\operatorname{ind} A_{g-\lambda} = \operatorname{ind} A_g$ ($\operatorname{ind} A = \dim\ker A - \dim\operatorname{coker} A$). С другой стороны, если взять две точки $\lambda_1, \lambda_2 \in U_1$ по разные стороны от линии $V_p(g)$, то $\operatorname{ind}_p(g-\lambda_1) \neq \operatorname{ind}_p(g-\lambda_2)$ тогда, как мы показали выше, $\operatorname{ind} A_{g-\lambda_1} = \operatorname{ind} A_{g-\lambda_2}$, что невозможно.

Доказательство в общем случае также проведем от противного. Допустим, что A_g является $\Phi_\pm$-оператором в $L_p(\Gamma)$ и $0 \in V_p(g)$; тогда можно подобрать функцию $b(t) \in \Lambda(\Gamma)$, удовлетворяющую трем условиям:

(α) $\sup_{t\in\Gamma} |g(t)-b(t)| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ настолько мало, что оператор A_b является $\Phi_\pm$-оператором ([3]);

(β) в некоторой окрестности нуля кривая $V_p(b)$ является простой гладкой дугой;

(γ) $0 \in V_p(b)$.

Последнее условие, как мы показали, противоречит первым двум. Теорема доказана.

Из этой теоремы легко выводится теорема 1.

Доказательство теоремы 1. Обозначим через C изометрический оператор, отображающий всякую функцию $f(\zeta)$ из H_p в вектор $\{f_j\}_0^\infty \in h_p$ её коэффициентов Фурье. Легко видеть, что

$$T_a = CPA_aC^{-1},$$

где A_a сингулярный оператор $aP+Q$, у которого роль контура Γ играет единичная окружность ($|\zeta| = 1$).

Без труда доказывается, что оператор $PA_a|H_p$ обратим с какой либо стороны (является $\Phi_\pm$-оператором) в том и только том случае, когда таковым является оператор A_a в пространстве $L_p(\Gamma)$. Если оператор $PA_a|H_p$ обратим с какой либо стороны, то

$$\dim\ker A_a = \dim\ker PA_a|H_p,$$

$$\dim\operatorname{coker} A_a = \dim\operatorname{coker} PA_a|H_p.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть $c(t) \in \Lambda(\Gamma)$ и $d(t) \in \Lambda(\Gamma)$. Для того чтобы оператор $A = c(t)I + d(t)S$ ($A = c(t)I + Sd(t)I$) был Φ_+- или Φ_--оператором в $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:*

(α) $\inf_{t\in\Gamma} |c(t)-d(t)| > 0$,

(β) *функция* $(c(t)+d(t))/(c(t)-d(t))$ *p-неособенная.*

Если эти условия выполнены и $\varkappa = \operatorname{ind}_p(c+d)/(c-d)$, то

1. *при $\varkappa < 0$ оператор A обратим справа в $L_p(\Gamma)$ и $\dim\ker A = -\varkappa$;*
2. *при $\varkappa > 0$ оператор A обратим слева в $L_p(\Gamma)$ и $\dim\operatorname{coker} A = \varkappa$;*
3. *при $\varkappa = 0$ оператор A обратим в $L_p(\Gamma)$.*

Доказательство. Доказательство проведем для оператора $A = c(t)I + d(t)S$, который представим в виде $A = a(t)P + b(t)Q$, где $a(t) = c(t)+d(t)$, $b(t) = c(t)-d(t)$.

Достаточность условий теоремы вытекает из теоремы 3. Чтобы воспользоваться этой же теоремой для доказательства необходимости, остается лишь показать, что если A является Φ_+- или Φ_--оператором, то $\inf_{t\in\Gamma}|b(t)| > 0$. Доказательство этого предложения разобьем на два этапа.

1° Покажем, что если функции $a(t)$ и $b(t)$ ($\in \Lambda(\Gamma)$) на каждом промежутке своей непрерывности являются рациональными функциями и $b(t_0) = 0$, где t_0 — некоторая точка непрерывности функции $b(t)$, то оператор $aP+bQ$ не является ни Φ_+ ни Φ_--оператором.

В самом деле, так как при этих условиях $b_1(t) = (t^{-1}-t_0^{-1})^{-1}b(t) \in \Lambda(\Gamma)$, то оператор $aP+bQ$ можно записать в виде

$$aP + bQ = (aP + b_1Q)\big(P + (t^{-1}+t_0^{-1})Q\big). \tag{2}$$

Если бы оператор $aP+bQ$ был Φ_+-оператором, то из соотношения (2) вытекало бы что и оператор $P+(t^{-1}-t_0^{-1})Q$ является Φ_+-оператором, что в силу теоремы 3 невозможно. Таким образом, $aP+bQ$ не может быть Φ_+-оператором.

Так как функции $a(t)$ и $b(t)$ кусочно рациональны, то в любой окрестности нуля существует точка λ такая, что для оператора $A - \lambda I$ выполнены условия (α) и (β) теоремы, следовательно оператор $A-\lambda I$ является Φ-оператором. Отсюда следует, что если бы A был Φ_--оператором, то он был бы Φ-оператором, а мы показали, что он не является даже Φ_+-оператором.

2° Покажем, что если оператор A является Φ_+ или Φ_--оператором, то $\inf_{t\in\Gamma}|b(t)| > 0$. Допустим противное, т.е. что A является Φ_+ (или Φ_-)-оператором и что найдется точка $t_0 \in \Gamma$, в которой либо $b(t_0) = 0$ либо $b(t_0+0) = 0$. Подберем две кусочно рациональные функции $a_1(t)$ и $b_1(t)$ ($\in \Lambda(\Gamma)$) так, чтобы $|a(t)-a_1(t)| < \delta$ и $|b(t)-b_1(t)| < \delta$, где число δ настолько мало, что оператор a_1P+b_1Q является Φ_+

([3]) Существование такого числа ε вытекает из теоремы об устойчивости $\Phi_\pm$-операторов при малых возмущениях [5].

(или Φ_-)-оператором. Очевидно, при этом функцию $b_1(t)$ можно подобрать так, чтобы, кроме того выполнялось условие $b_1(t_0) = 0$, и t_0—точка непрерывности функции $b_1(t)$. Последнее противоречит доказанному в пункте 1°. Теорема доказана.

Нетрудно показать, что условия (α) и (β), фигурирующие в формулировке теоремы 4, можно заменить эквивалентным условием: Для всех $\mu \in [0,1]$ и $t \in \Gamma$

$$a(t)b(t+0)E(p,\mu)+b(t)a(t+0)F(p,\mu) \neq 0,$$

где

$$\left.\begin{aligned} E(p,\mu) &= \exp\{2\pi i\mu(p-2)/p\}-\exp\{-4\pi i/p\} \\ F(p,\mu) &= 1-\exp\{2\pi i\mu(p-2)/p\} \end{aligned}\right\} \quad (p>2),$$

$$E(p,\mu) = F(q,\mu), \quad F(p,\mu) = E(q,\mu) \quad \left(1<p<2, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right),$$

$$E(2,\mu) = \mu, \quad F(2,\mu) = 1-\mu.$$

Последняя теорема позволяет находить Φ-области [4] сингулярных операторов: имеет место

Теорема 5. *Пусть $a(t) \in \Lambda(\Gamma)$ и $b(t) \in \Lambda(\Gamma)$. Дополнение к Φ-области оператора $A = aP+bQ$ ($A = PaI+QbI$) состоит из множества значений функций $a(t)$ и $b(t)$, а также из множества комплексных чисел λ, каждое из которых при некотором $\mu \in [0,1]$ удовлетворяет хотя бы одному из уравнений*

$$(3) \qquad \big(a(t_k)-\lambda\big)\big(b(t_k+0)-\lambda\big)E(p,\mu)+\big(a(t_k+0)-\lambda\big)\big(b(t_k)-\lambda\big)F(p,\mu) = 0$$

где t_k ($k = 1,2,\ldots,n$) — все точки разрыва функций $a(t)$ и $b(t)$.

Рассмотрим несколько примеров множеств G_k комплексных чисел λ, удовлетворяющих уравнению (3), соответствующему точке разрыва t_k.

Пусть t_1 — точка разрыва только функции $a(t)$, тогда

$$G_1 = \nu_p\big(a(t_1), a(t_1+0)\big) \cup \{b(t_1)\}.$$

Аналогично, если t_2 является точкой разрыва только функции $b(t)$, то

$$G_2 = \nu_p\big(b(t_2+0), b(t_2)\big) \cup \{a(t_2)\}.$$

Пусть t_3 является точкой разрыва обеих функций $a(t)$ и $b(t)$, причем $a(t_3) = b(t_3)$, тогда

$$G_3 = \nu_p\big(b(t_3+0), a(t_3+0)\big) \cup \{a(t_3)\}.$$

[4] *Φ-областью оператора A* называется множество всех комплексных чисел λ, для которых $A-\lambda I$ является Φ-оператором.

Если t_4 является общей точкой разрыва функций $a(t)$ и $b(t)$ и, например, $a(t_4) = b(t_4+0) = 1$, $b(t_4) = a(t_4+0) = -1$, то множество G_4 представляет собой окружность с центром в точке $-i\operatorname{ctg}\pi/p$ и радиусом $R = 1/\sin(\pi/p)$.

В примере $A = d(t)S$, где функция $d(t)$ ($\in \Lambda(\Gamma)$) принимает два значения 0 и 1, дополнением к Φ-области оператора A служит множество $G = \nu_p(-1,1) \cup \nu_p(1,-1) \cup \{0\}$.

Отметим, что все результаты этого параграфа переносятся на парные и транспонированные к парным уравнения Винера-Хопфа.

§ 3. Оценка нормы оператора сингулярного интегрирования

В этом параграфе будут получены оценки снизу для норм операторов P, Q, S в $L_p(\Gamma)$. Кроме этого, для некоторых значений p ($p = 2^n$ и $p = 2^n/(2^n-1)$, $n = 1,2,\ldots$) будет вычислено точное значение нормы преобразования Гильберта [5].

Обозначим через $\mathfrak{P}_p$ множество всех линейных операторов, вполне непрерывных в $L_p(\Gamma)$.

Теорема 6. *Для каждого $p>2$ справедливы следующие оценки:*

$$(4) \qquad \inf_{T\in\mathfrak{P}_p}\|P+T\|_p \geqslant \frac{1}{\sin\pi/p}, \quad \inf_{T\in\mathfrak{P}_p}\|Q+T\| \geqslant \frac{1}{\sin\pi/p};$$

$$(5) \qquad \inf_{T\in\mathfrak{P}_p}\|S+T\|_p \geqslant \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2p}.$$

При $1<p<2$ оценки (4) *и* (5) *сохраняют силу, если в их правых частях число p заменить на q* ($p^{-1}+q^{-1} = 1$).

Доказательство. Допустим, что для некоторого p

$$\inf\|P+T\|_p < 1/\sin\frac{\pi}{p}.$$

Рассмотрим оператор $aP+Q$, где $a(t)$ ($\in \Lambda(\Gamma)$) — функция, принимающая два значения:

$$a(t) = \left(\cos\frac{\pi}{p}\right)\exp\left(\pm i\frac{\pi}{p}\right).$$

Так как $|a(t)-1| = \sin\pi/p$, то $\inf\|(a-1)P\|_p < 1$, а следовательно, оператор $I+(a-1)P = aP+Q$ является Φ-оператором, а это невозможно, ибо функция $a(t)$ является p-особенной.

[5] Иным путем результаты этого параграфа получены авторами в [15].

Для доказательства второго соотношения (4) рассмотрим функцию

$$a(t) = \left(\sec\frac{\pi}{p}\right)\exp\left(\pm\frac{i\pi}{p}\right).$$

Тогда $|(1-a)/a| = \sin\frac{\pi}{p}$. Оператор $aP+Q = a\big(I+\big((1-a)/a\big)Q\big)$ не является Φ-оператором в $L_p(\Gamma)$, ибо функция $a(t)$ является p-особенной. Отсюда вытекает второе из соотношений (4).

Аналогично доказывается соотношение (5), если воспользоваться функцией $a(t) = \exp(\pm i\pi/p)$ и равенством

$$aP+Q = \frac{a+1}{2}\left(I+\frac{a-1}{a+1}S\right).$$

Теорема 7. *Пусть $\Gamma = \{\zeta\colon |\zeta| = 1\}$; тогда для всех $n = 1, 2, \ldots$*

$$\|S\|_p = \begin{cases} \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2p}, & \textit{если} \quad p = 2^n, \\ \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2p}, & \textit{если} \quad p = 2^n/(2^n-1). \end{cases} \tag{6}$$

Доказательство. Из соотношения (5) следует, что если $p > 2$, то $\|S\|_p \geqslant \operatorname{ctg}\pi/2p$. Докажем обратное неравенство. Пусть $\varphi(t)$ — произвольная функция, удовлетворяющая на окружности условию Гельдера. Тогда легко видеть, что

$$\varphi^2+(S\varphi)^2 = 2[(P\varphi)^2+(Q\varphi)^2] = 2S[(P\varphi)^2-(Q\varphi)^2] = 2S(\varphi\cdot S\varphi),$$

то есть [6] $(S\varphi)^2 = \varphi^2+2S(\varphi\cdot S\varphi)$. Из этого равенства следует, что

$$\|S\varphi\|_{2p}^2 \leqslant 2\|S\|_p\|\varphi\|_{2p}\|S\varphi\|_{2p}+\|\varphi\|_{2p}^2,$$

стало быть,

$$\frac{\|S\varphi\|_{2p}}{\|\varphi\|_{2p}} \leqslant \|S\|_p+\sqrt{1+\|S\|_p^2},$$

откуда вытекает, что

$$\|S\|_{2p} \leqslant \|S\|_p+\sqrt{1+\|S\|_p^2}.$$

Из последнего соотношения получаем (используя равенство $\|S\|_2 = 1$), что $\|S\|_{2^n} \leqslant \operatorname{ctg}\pi/2^{n+1}$. Таким образом для $p = 2^n$ равенство (6)

[6] Это тождество впервые использовал для доказательства ограниченности преобразования Гильберта Котляр [8] (см. также [6], стр. 120-121).

доказано, а для $p = 2^n/(2^n-1)$ это равенство доказывается переходом к сопряженному оператору. Теорема доказана.

§ 4. Спектр сингулярных операторов в симметричных пространствах

Полученные выше результаты переносятся в этом параграфе на более общие симметричные пространства.

Начнем с определений. Вещественные функции $x(s)$ и $y(s)$, измеримые на отрезке $[0,1]$, называются *равноизмеримыми*, если $\operatorname{mes}\{s\colon x(s) > \tau\} = \operatorname{mes}\{s;\ y(s) > \tau\}$ для любого τ.

Симметричным на отрезке $[0,1]$ пространством называется всякое банахово пространство E комплексных, измеримых на $[0,1]$ функций, удовлетворяющее трем условиям:

1. Если $|x(s)| \leqslant |y(s)|$, $y(s)\in E$ и $x(s)$ измерима на $[0,1]$, то $x(s)\in E$ и $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$.

2. Если функции $|x(s)|$ и $|y(s)|$ равноизмеримы и $y(s)\in E$, то $x(s)\in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

3. Пусть E' — множество всех измеримых на $[0,1]$ функций $y(s)$, для которых

$$\|y\|_{E'} \overset{\text{def}}{=} \sup_{\|x\|_E\leqslant 1}\int_0^1 |x(s)y(s)|\,ds < \infty;$$

тогда

$$\|x\|_E = \sup_{\|y\|_{E'}\leqslant 1}\int_0^1 |x(s)y(s)|\,ds.$$

Обозначим через $\chi(s)$ характеристическую функцию отрезка $[0, s]$.

Функция $\omega(s) = \|\chi(s)\|_E$ называется *фундаментальной функцией* пространства E.

Пусть E — некоторое симметричное на $[0,1]$ банахово пространство; Γ — контур, определенный в § 2, и $t = \eta(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$ — некоторое его (кусочно-гладкое) параметрическое уравнение.

Симметричным относительно параметризации $t = \eta(s)$ контура Γ пространством будем называть банахово пространство F всех комплексных измеримых на Γ функций $\varphi(t)$, для которых $\varphi\big(\eta(s)\big)\in E$ и

$$\|\varphi(t)\|_F \overset{\text{def}}{=} \big\|\varphi\big(\eta(s)\big)\big\|_E.$$

Обозначим

$$\varliminf_{s\to 0}\frac{\omega(2s)}{\omega(s)} = m(F), \qquad \varlimsup_{s\to 0}\frac{\omega(2s)}{\omega(s)} = M(F).$$

Нам понадобятся следующие две теоремы, принадлежащие Е. М. Семенову (7):

Теорема А. *Пусть* $0 \leqslant \alpha_j \leqslant 1$ $(j = 1, 2)$ *и для симметричного пространства* F *выполнены соотношения*:

$$2^{\alpha_1} < m(F), \quad M(F) < 2^{\alpha_2}.$$

Если линейный оператор A *ограничен в пространствах* $L_p(\Gamma)$ *для всех* $p \in (1/\alpha_2, 1/\alpha_1)$, *то оператор* A *ограничен в* F.

Теорема В. *Для того чтобы оператор* S, *определенный равенством*

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau$$

был ограниченным в F, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения*:

$$1 < m(F), \quad M(F) < 2. \tag{7}$$

Если, в частности, F — *пространство Орлича, то условие* (7) *эквивалентно рефлексивности пространства* F.

Пусть в пространстве F выполнены соотношения $1 < m(F) = M(F) < 2$; тогда теоремы 3-6 (§ 2, § 3) сохраняют силу, если в их формулировках пространство L_p заменить пространством F, а число p числом $\varrho = 1/\log_2 M(F)$.

Доказательство этих теорем в пространстве F проводится так же, как и в L_p. Необходимо лишь пояснить почему построенный по ϱ-неособенной функции $g(t)$ оператор $A_\psi = \psi P + Q$ (см. доказательство теоремы 3) обратим в F. В самом деле, так как функция $g(t)$ является ϱ-неособенной, то существует число $\varepsilon > 0$ такое, что функция $g(t)$ — p-неособенная для всех $p \in (\varrho - \varepsilon, \varrho + \varepsilon)$. Тогда из леммы 3 следует, что оператор A_ψ обратим в пространствах $L_p(\Gamma)$ для всех $p \in (\varrho - \varepsilon, \varrho + \varepsilon)$, причем

$$A_\psi^{-1} = (\psi_+ P + \psi_-^{-1} Q)\psi_- I.$$

Из теоремы А вытекает, что оператор A_ψ^{-1} ограничен в F, следовательно, A_ψ обратим в F.

(7) Эти теоремы доказаны Семеновым [11] для симметричных пространств на $[0, 1]$, однако, как нам любезно сообщил Е. М. Семенов, они могут быть перенесены и на пространства F.

Для случая, когда $m(F) \neq M(F)$ можно привести лишь достаточные условия для того, чтобы сингулярный оператор был Φ-оператором в F.

Теорема 8. *Пусть* $c(t) \in \Lambda(\Gamma)$, $d(t) \in \Lambda(\Gamma)$ *и для симметричного пространства* F *выполняются соотношения* $1 < m(F)$, $M(F) < 2$. *Если* $\inf|c(t) - d(t)| > 0$ $(t \in \Gamma)$ *и функция* $\big(c(t) + d(t)\big)/\big(c(t) - d(t)\big)$ p-*неособенная для всех* p, *удовлетворяющих условию*

$$\big(\log_2 M(F)\big)^{-1} \leqslant p \leqslant \big(\log_2 m(F)\big)^{-1}, \tag{8}$$

то для оператора $A = c(t)I + d(t)S$ $(A = c(t)I + Sd(t)I)$ *в пространстве* F *имеют место следующие утверждения*:

1. *при* $\varkappa = \operatorname{ind}_p[(c+d)/(c-d)] > 0$ *оператор* A *обратим слева и* $\dim\operatorname{coker} A = \varkappa$;

2. *при* $\varkappa < 0$ *оператор* A *обратим справа и* $\dim\ker A = -\varkappa$;

3. *при* $\varkappa = 0$ *оператор* A *обратим.*

Отметим, что результаты § 1 могут быть таким же образом распространены на пространства более общие чем пространства h_p.

Цитированная литература

[1] H. Widom, *Singular integral equations in* L_p, Trans. Amer. Math. Soc. 97 (1960), стр. 131.

[2] К. Гофман, *Банаховы пространства аналитических функций*, Москва 1963.

[3] И. Ц. Гохберг, *О теплицевых матрицах, составленных из коэффициентов Фурье кусочно-непрерывных функций*, Функциональный анализ и его приложения 1, вып. 2 (1967), стр. 91-92.

[4] — *Задача факторизации в нормированных кольцах, функции от изометрических и симметрических операторов и сингулярные интегральные уравнения*, УМН 19, вып. 1 (1964), стр. 71-124.

[5] И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, *Основные положения о дефектных числах и индексах линейных операторов*, там же 12, вып. 2 (1957), стр. 44-118.

[6] — *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и её приложения*, Москва 1967.

[7] И. Ц. Гохберг и И. А. Фельдман, *Проекционные методы решения уравнений Винера-Хопфа*, Кишинев 1967.

[8] M. Cotlar, *A unified theory of Hilbert transforms and ergodic theorems*, Revista Mat. Cuyana 1 (1955), стр. 105-167.

[9] М. Г. Крейн, *Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов*, УМН 13, вып. 5 (1958), стр. 3-120.

[10] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, Москва 1962.

[11] Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов и оценки коэффициентов Фурье*, ДАН СССР 176, № 6 (1967).

[12] Б. В. Хведелидзе, *Граничная задача Римана-Привалова с кусочно-непрерывными коэффициентами*, Труды грузинского политехн. инст. 1 (81) (1962), стр. 11-29.

[13] — *Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения*, Труды Тбилисского мат. инст. 23 (1956).

[14] Е. Шамир, *Решение систем Римана-Гильберта с кусочно-непрерывными коэффициентами*, ДАН СССР 167, № 5 (1960), стр. 1000-1003.

[15] И. Ц. Гохберг и Н. Я. Крупник, *О норме преобразования Гильберта в пространстве L_p*, Функциональный анализ и его приложения 2, вып. 2 (1968), стр. 91-92.

Reçu par la Rédaction le 19. 3. 1968

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXI. (1968)

Sur une définition de la dérivée

par

T. LEŻAŃSKI (Warszawa)

Introduction. On considère dans ce travail une famille H_t d'espaces de Hilbert et une famille $S_{t,s}$ d'opérations linéaires non bornées transformant H_t en H_s. Si $x(t)$ est une fonction abstraite, $x(t)\in H_t$, on définit une espèce de dérivée semblable à celle de Lie, en posant

$$\frac{D}{Dt}x(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[S_{t+\varepsilon,t}x(t+\varepsilon)-x(t)].$$

Alors, on trouve dans ce travail les conditions suffisantes pour que les équations

$$\frac{D}{Dt}x(t) = y(t), \qquad x(0) = a,$$

ou bien l'équation perturbée

$$\frac{D}{Dt}x(t) = y(t)+B_t\big(x(t)\big), \qquad x(0) = a,$$

aient des solutions généralisées. Enfin, on donne une application à la théorie des équations différentielles.

Définitions et hypothèses. Faisons correspondre à chaque nombre t $(0\leqslant t\leqslant \tau)$ un espace réel de Hilbert H_t, avec le produit scalaire $(x,y)_t$. Soit M_t un sous-ensemble linéaire dense dans H_t et $S_{t,s}$ une opération linéaire (en général non bornée) définie sur M_t et à valeurs dans H_s, admettant une opération adjointe $S^*_{t,s}$ définie au moins sur M_s et à valeurs dans H_t. Définissons une *fonction abstraite* comme une fonction qui fait correspondre à tout nombre t $(0\leqslant t\leqslant\tau)$ un élément $x(t)\in H_t$. Soient enfin $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ deux ensembles linéaires de fonctions abstraites. Admettons les hypothèses suivantes:

(A) $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{N}$; si $x(\cdot)\in\mathfrak{N}$, alors $x(t)\in M_t$ et la fonction réelle: $\|x(t)\|_t\in C_{0,1}$.

(B) $\mathfrak{M}$ est dense dans $\mathfrak{N}$ au sens de la norme (1):

$$\|x(\cdot)\|^2 = \int_0^\tau \|x(t)\|_t^2\,dt. \tag{1}$$