Thus the polynomial C^n has coefficients in $(d_1, \ldots, d_M)$. But these coefficients generate the n-th power of the ideal $(c_1, \ldots, c_N)$.

The converse also holds.

We have introduced the concept of "weaker" only in order to ask the following. Let $d_1, \ldots, d_M$ be a subregular system. Can one find a weaker system $c_1, \ldots, c_N$ such that $\|Cf\| \geqslant \|f\|$ for all homogeneous f?

Let us call a system $c_1, \ldots, c_N$ *isometric* if

$$\|a\| = \|c_1 a\| + \ldots + \|c_N a\|$$

for every element a in A.

3.6. PROPOSITION. *An isometric system is normally subregular.*

Proof. Using the triangle inequality, we observe that the left-hand side of (3.21) is at least equal to

$$\|C^n f_0\| + \|f_{n-1}\| + \ldots + \|f_1\| - \|Cf_{n-1} + \ldots + C^{n-1} f_1\|.$$

Isometrism implies that the first term here equals $\|f_0\|$, and it also implies that

$$\|Cf_{n-1} + \ldots + C^{n-1} f_1\| \leqslant \|f_1\| + \ldots + \|f_{n-1}\|.$$

To see that one need only prove $\|Cf\| \leqslant \|f\|$ for any polynomial f. Any such f is a sum of monomials and $\|f\|$ *is the sum of their norms*. For monomial f we have $\|Cf\| = \|f\|$, thus completing the proof of 3.6. An isometric system does not make $\|Cf\| = \|f\|$ for all homogeneous f. The example given earlier is an isometric system.

It is obvious that if $c_1, \ldots, c_N$ and $d_1, \ldots, d_M$ are each isometric systems, then *the product system*

$$\{c_i d_j : 1 \leqslant i \leqslant N, 1 \leqslant j \leqslant M\}$$

is also isometric. This brings us to the final problem. Is the product of two subregular systems itself subregular?

For sup-normed algebras A, the condition of 3.2 expressed by inequality (3.21) characterizes a simple situation, namely that for every maximal ideal m on the Shilov boundary $\partial_A \Delta(A)$ one has

$$|\hat{c}_1(m)| + \ldots + |\hat{c}_N(m)| \geqslant 1.$$

This does not follow immediately by inspection, but rather from the observations made in paper cited in [1], Section 6.

Reçu par la Rédaction le 24. 1. 1968

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXI. (1968)

Vecteurs cycliques et quasi-affinités

par

B. SZ.-NAGY (Szeged) et C. FOIAŞ (Bucarest)

Hommage à Monsieur W. Orlicz

1. PRÉLIMINAIRES ET THÉORÈME

1. Soit T un opérateur (linéaire, borné) dans l'espace de Hilbert (séparable ou non) $\mathfrak{H}$. Faisons la suivante

Définition. Si $\mathfrak{M}$ est un sous-espace de $\mathfrak{H}$, invariant pour T, on appelle la *T-dimension* de $\mathfrak{M}$ et on désigne par $\dim_T \mathfrak{M}$ le minimum du nombre cardinal d'un sous-ensemble $\mathfrak{E}$ de $\mathfrak{M}$ tel que

$$\mathfrak{M} = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^n \mathfrak{E} \text{ [1]}$$

ou, ce qui revient au même, le minimum de la dimension d'un sous-espace $\mathfrak{M}_0$ de $\mathfrak{M}$ tel que

$$\mathfrak{M} = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^n \mathfrak{M}_0.$$

Lorsque $\dim_T \mathfrak{M} = 1$, c'est-à-dire qu'il existe un vecteur $h \in \mathfrak{M}$ tel que $\mathfrak{M}$ est sous-tendu par $h, Th, T^2h, \ldots$, on dira que h est un *vecteur cyclique* pour T dans $\mathfrak{M}$.

La relation suivante est évidente pour tout $h \in \mathfrak{H}$ et pour $n = 0, 1, \ldots$:

$$h = (I - TT^*)h + T(I - TT^*)T^*h + \ldots + T^{n-1}(I - TT^*)T^{*n-1}h + T^n T^{*n} h. \tag{1}$$

Dans le cas où

$$T^n T^{*n} h \to 0 \quad \text{pour tout } h \in \mathfrak{H} \text{ et pour } n \to \infty, \tag{2}$$

la relation (1) entraîne

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} T^n (I - TT^*) T^{*n} h \tag{3}$$

[1] Pour un système quelconque $\{\mathfrak{E}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ de sous-ensembles de l'espace de Hilbert on entend par $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{E}_\gamma$ le sous-espace sous-tendu par les ensembles $\mathfrak{E}_\gamma$.

et par conséquent

(4) $$\mathfrak{H} = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^n (I - TT^*)\mathfrak{H},$$

d'où il résulte

(5) $$\dim_T \mathfrak{H} \leqslant \dim \overline{(I-TT^*)\mathfrak{H}}.$$

La condition (2) est vérifiée par exemple si $\|T^n\| \leqslant M$ $(n = 0, 1, \ldots)$ et $T^{*n} \to O$ (fortement), donc en particulier pour les *contractions de classe* $C_{\cdot 0}$.

Rappelons qu'une contraction T (c'est-à-dire un opérateur de norme $\leqslant 1$) dans $\mathfrak{H}$ est appelée de classe $C_{0\cdot}$ si $T^n \to O$, de classe $C_{\cdot 0}$ si $T^{*n} \to O$, et de classe C_{00} si $T^n \to O$ et $T^{*n} \to O$ simultanément.

Remarquons aussi que pour une contraction T on a

$$\overline{(I-T^*T)\mathfrak{H}} = \overline{(I-T^*T)^{1/2}\mathfrak{H}} \quad \text{et} \quad \overline{(I-TT^*)\mathfrak{H}} = \overline{(I-TT^*)^{1/2}\mathfrak{H}},$$

ces sous-espaces étant appelés les *sous-espaces de défaut* $\mathfrak{D}_T$ et $\mathfrak{D}_{T^*}$, selon les cas. Leurs dimensions $\mathfrak{d}_T$ et $\mathfrak{d}_{T^*}$, selon les cas, sont les *indices de défaut*.

Ainsi, grâce à (5), on peut affirmer que

(5′) $$\dim_T \mathfrak{H} \leqslant \mathfrak{d}_{T^*} \quad \text{pour } T \in C_{\cdot 0}.$$

2. Soit U la dilatation unitaire minimum de la contraction $T \in C_{\cdot 0}$, opérant dans l'espace $\mathfrak{K} (\supset \mathfrak{H})$. U est une translation bilatérale, de multiplicité égale à $\mathfrak{d}_T$. En effet, on a

$$\mathfrak{K} = \bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^n \mathfrak{L}^* \quad \text{où} \quad \mathfrak{L}^* = \overline{(U^* - T^*)\mathfrak{H}}, \ \dim \mathfrak{L}^* = \mathfrak{d}_{T^*}\ (^2).$$

De plus, le sous-espace $\mathfrak{K}_+ = \bigvee_0^{\infty} U^n \mathfrak{H}$ de $\mathfrak{K}_+$ est égal à $\bigoplus_0^{\infty} U^n \mathfrak{L}^*$ (op. cit. n° II. 2), donc $U_+ = U|\mathfrak{K}_+$ (la restriction de U à $\mathfrak{K}_+$) est une translation unilatérale dans $\mathfrak{K}_+$.

Choisissons dans $\mathfrak{H}$ un sous-espace $\mathfrak{H}_0$ tel que

(6) $$\mathfrak{H} = \bigvee_0^{\infty} T^n \mathfrak{H}_0, \quad \dim \mathfrak{H}_0 = \dim_T \mathfrak{H},$$

et envisageons le sous-espace suivant de $\mathfrak{K}_+$:

(7) $$\mathfrak{N} = \bigvee_0^{\infty} U^n \mathfrak{H}_0;$$

(²) Cf. Béla Sz.-Nagy et C. Foiaş, *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert*, Budapest 1967, théorème II.1.2.

$\mathfrak{N}$ est évidemment invariant pour U. Comme U_+ est une translation unilatérale et par conséquent complètement non-unitaire (c.n.u.), $U_{\mathfrak{N}} = U_+|\mathfrak{N} = U|\mathfrak{N}$ est aussi c.n.u. D'autre part, $U_{\mathfrak{N}}$ est un opérateur isométrique (puisque U l'est). Or, un opérateur isométrique c.n.u. est une translation unilatérale. Ainsi on conclut que $\mathfrak{N}$ admet, par rapport à $U_{\mathfrak{N}}$, la décomposition

(8) $$\mathfrak{N} = \bigoplus_0^{\infty} U^n \mathfrak{F} \quad \text{où } F = \mathfrak{N} \ominus U\mathfrak{N}.$$

En vertu de (7), $\mathfrak{F}$ se représente aussi sous la forme

$$\mathfrak{F} = \bigvee_0^{\infty} U^n \mathfrak{H}_0 \ominus \bigvee_1^{\infty} U^n \mathfrak{H}_0,$$

d'où, vu aussi (6), on déduit

(9) $$\dim \mathfrak{F} \leqslant \dim \mathfrak{H}_0 = \dim_T \mathfrak{H}.$$

Puisque U est une dilatation de T, on a

$$T^n = P_{\mathfrak{H}} U^n | \mathfrak{H} \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

par suite on obtient de (6) et (7):

(10) $$\overline{P_{\mathfrak{H}}\mathfrak{N}} = \bigvee_0^{\infty} P_{\mathfrak{H}} U^n \mathfrak{H}_0 = \bigvee_0^{\infty} T^n \mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}.$$

D'autre part, (8) entraîne

(11) $$\overline{P_{\mathfrak{H}}\mathfrak{N}} = \bigvee_0^{\infty} P_{\mathfrak{H}} U^n \mathfrak{F} = \bigvee_0^{\infty} T^n P_{\mathfrak{H}} \mathfrak{F};$$

ici on a fait usage de la relation

(12) $$P_{\mathfrak{H}} U^n | \mathfrak{K}_+ = T^n P_{\mathfrak{H}} | \mathfrak{K}_+,$$

valable pour n'importe quelle contraction T et sa dilatation unitaire U (³). En vertu de (10) et (11) on a donc

$$\mathfrak{H} = \bigvee_0^{\infty} T^n (P_{\mathfrak{H}} \mathfrak{F}),$$

ce qui entraîne

(13) $$\dim_T \mathfrak{H} \leqslant \dim \overline{P_{\mathfrak{H}}\mathfrak{F}} \leqslant \dim \mathfrak{F}.$$

(³) Comme $\mathfrak{K}_+$ est sous-tendu par $U^m\mathfrak{H}$ $(m = 0, 1, \ldots)$, il suffit d'observer que pour $h \in \mathfrak{H}$ et pour $m, n = 0, 1, \ldots$

$$P_{\mathfrak{H}} U^n (U^m h) = P_{\mathfrak{H}} U^{n+m} h = T^{n+m} h = T^n T^m h = T^n P_{\mathfrak{H}} U^m h.$$

En comparant (13) à (9) il résulte

$$\dim \mathfrak{F} = \dim_T \mathfrak{H}. \tag{14}$$

3. Soient

$$\mathfrak{N}_0 = \{g\colon g \in \mathfrak{N}, P_{\mathfrak{H}} g = 0\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{N} \ominus \mathfrak{N}_0. \tag{15}$$

$\mathfrak{N}_0$ est *invariant* pour U. En effet, comme $\mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{N} \subset \mathfrak{K}_+$, et grâce à (12), on a pour $g \in \mathfrak{N}_0$:

$$P_{\mathfrak{H}} U g = T P_{\mathfrak{H}} g = 0.$$

On déduit de (10)

$$\mathfrak{H} = \overline{P_{\mathfrak{H}} \mathfrak{N}} = \overline{P_{\mathfrak{H}} (\mathfrak{N}_0 \oplus \mathfrak{H}_1)} = P_{\mathfrak{H}} \mathfrak{H}_1,$$

d'autre part il s'ensuit de (15) que $P_{\mathfrak{H}} g = 0$, $g \in \mathfrak{H}_1$ entraînent $g = 0$. Ainsi on a démontré que l'opérateur

$$X = P_{\mathfrak{H}} | \mathfrak{H}_1 \tag{16}$$

est une *quasi-affinité* de $\mathfrak{H}_1$ dans $\mathfrak{H}$ [4].

Toujours à l'aide de (12) on déduit:

$$TX = TP_{\mathfrak{H}} | \mathfrak{H}_1 = P_{\mathfrak{H}} U | \mathfrak{H}_1 = P_{\mathfrak{H}} P_{\mathfrak{H}_1} U | \mathfrak{H}_1 + P_{\mathfrak{H}} P_{\mathfrak{N}_0} U | \mathfrak{H}_1.$$

Le dernier terme est O par la définition (15) de $\mathfrak{N}_0$. Ainsi, en définissant

$$T_1 = P_{\mathfrak{H}_1} U | \mathfrak{H}_1, \tag{17}$$

nous obtenons une contraction dans $\mathfrak{H}_1$ telle que

$$TX = XT_1, \tag{18}$$

c'est-à-dire que T_1 est une *transformée quasi-affine de* T. (18) entraîne aussi

$$T^n X = X T_1^n \quad \text{et} \quad X^* T^{*n} = T_1^{*n} X^* \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{19}$$

Soit $\mathfrak{M}_1$ un sous-espace de $\mathfrak{H}_1$ tel que

$$\bigvee_0^\infty T_1^n \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{H}_1 \quad \text{et} \quad \dim \mathfrak{M}_1 = \dim_{T_1} \mathfrak{H}_1.$$

Grâce à (19) on a alors

$$\bigvee_0^\infty T^n X \mathfrak{M}_1 = \bigvee_0^\infty X T_1^n \mathfrak{M}_1 = \overline{X \mathfrak{H}_1} = \mathfrak{H},$$

[4] Un opérateur X d'un espace de Hilbert $\mathfrak{H}_1$ dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}_2$ est appelé une *quasi-affinité* s'il vérifie les conditions suivantes: (a) $Xh_1 = 0$, $h_1 \in \mathfrak{H}_1$ entraînent $h_1 = 0$; (b) $X\mathfrak{H}_1$ est dense dans $\mathfrak{H}_2$. Il en dérive que si X est une quasi-affinité de $\mathfrak{H}_1$ dans $\mathfrak{H}_2$, X^* est une quasi-affinité de $\mathfrak{H}_2$ dans $\mathfrak{H}_1$.

d'où on conclut

$$\dim_T \mathfrak{H} \leqslant \dim \overline{X\mathfrak{M}_1} \leqslant \dim \mathfrak{M}_1.$$

Par conséquent, on a

$$\dim_T \mathfrak{H} \leqslant \dim_{T_1} \mathfrak{H}_1. \tag{20}$$

Nous voulons montrer que c'est le signe d'égalité qui est valable dans (20).

A cette fin, observons d'abord que, par (19) et puisque $T \in C_{\cdot 0}$, on a $T_1^{*n} h_1 \to 0$ pour tout $h_1 \in X^* \mathfrak{H}$ et par conséquent aussi pour tout $h_1 \in \overline{X^* \mathfrak{H}} = \mathfrak{H}_1$. Donc $T_1 \in C_{\cdot 0}$. Ainsi on peut appliquer (5') à T_1, d'où

$$\dim_{T_1} \mathfrak{H}_1 \leqslant \mathfrak{d}_{T_1^*}. \tag{21}$$

L'étape suivante est d'évaluer $\mathfrak{d}_{T_1^*}$. De la définition (17) de T_1 il dérive

$$T_1 = P_{\mathfrak{H}_1} U_{\mathfrak{N}} | \mathfrak{H}_1, \qquad T_1^* = P_{\mathfrak{H}_1} U_{\mathfrak{N}}^* | \mathfrak{H}_1.$$

On a donc

$$T_1 T_1^* = P_{\mathfrak{H}_1} U_{\mathfrak{N}} P_{\mathfrak{H}_1} U_{\mathfrak{N}}^* | \mathfrak{H}_1 = P_{\mathfrak{H}_1} U_{\mathfrak{N}} U_{\mathfrak{N}}^* | \mathfrak{H}_1 - P_{\mathfrak{H}_1} U_{\mathfrak{N}} (I - P_{\mathfrak{H}_1}) U_{\mathfrak{N}}^* | \mathfrak{H}_1$$

et le dernier terme est O parce que

$$P_{\mathfrak{H}_1} U_{\mathfrak{N}} (I - P_{\mathfrak{H}_1}) U_{\mathfrak{N}}^* | \mathfrak{H}_1 \subset P_{\mathfrak{H}_1} U_{\mathfrak{N}} \mathfrak{N}_0 \subset P_{\mathfrak{H}_1} \mathfrak{N}_0 = \{0\}.$$

Ainsi, on a

$$I - T_1 T_1^* = P_{\mathfrak{H}_1} (I - U_{\mathfrak{N}} U_{\mathfrak{N}}^*) | \mathfrak{H}_1.$$

Cela donne

$$\dim \overline{(I - T_1 T_1^*) \mathfrak{H}_1} = \dim \overline{P_{\mathfrak{H}_1} (I - U_{\mathfrak{N}} U_{\mathfrak{N}}^*) \mathfrak{H}_1} \leqslant \dim \overline{(I - U_{\mathfrak{N}} U_{\mathfrak{N}}^*) \mathfrak{N}} = \dim \mathfrak{F},$$

la dernière égalité résultant de (8) (où l'on peut remplacer U par $U_{\mathfrak{N}}$). L'inégalité obtenue, complétée par (14), fournit:

$$\mathfrak{d}_{T_1^*} \leqslant \dim_T \mathfrak{H}. \tag{22}$$

En réunissant les inégalités (20), (21) et (22) on obtient que c'est l'égalité qui est valable dans chacune.

Ainsi, nous avons démontré le suivant

THÉORÈME. *Pour toute contraction T dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, de classe $C_{\cdot 0}$, il existe une contraction T_1 dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}_1$, de classe $C_{\cdot 0}$, telle que*

(a) *T_1 est une transformée quasi-affine de T,*
(b) $\mathfrak{d}_{T_1^*} = \dim_{T_1}\mathfrak{H}_1 = \dim_T\mathfrak{H}$.

Remarque 1. On peut ajouter que
(c) $\mathfrak{d}_{T_1} \leqslant \mathfrak{d}_{T_1^*}$.

En effet, on déduit aussitôt des théorèmes II. 1.1, II. 1.2 et des propositions I.2, II. 1.3 de [1] que pour $T \in C_{\cdot 0}$ on a $\mathfrak{d}_T \leqslant \mathfrak{d}_{T^*}$, égalité ayant lieu dans le cas $T \in C_{00}$ et, si de plus $\mathfrak{d}_{T^*} < \infty$, seulement dans le cas $T \in C_{00}$.

Remarque 2. Si $\mathfrak{d}_{T_1} = 0$, T_1 est isométrique. Comme T_1 est c.n.u. (conséquence de ce que $T_1 \in C_{\cdot 0}$), T_1 est une translation unilatérale. Dans ce cas $I - T_1 T_1^*$ est une projection orthogonale, notamment dans le sous-espace ambulant générateur, d'où on conclut que la multiplicité de T_1 comme translation unilatérale est égale à $\mathfrak{d}_{T_1^*}$.

2. QUELQUES CONSÉQUENCES DU THÉORÈME

1. Rappelons d'abord la définition de la classe C_0 des contractions (op. cit., chap. III).

C_0 est constituée des contractions complètement non-unitaires T pour lesquelles il existe une fonction $\varphi \in H^\infty$ (c'est-à-dire holomorphe et bornée dans le disque unité ouvert) telle que $\varphi \not\equiv 0$ et $\varphi(T) = O$. Parmi ces fonctions φ il existe alors un "minimum": c'est une fonction intérieure m_T telle que $\varphi / m_T \in H^\infty$ pour toute autre des fonctions φ. La fonction minimum est déterminée à un facteur constant près, de module 1.

On a $C_0 \subset C_{00}$. Par conséquent, pour $T \in C_0$ on a $\mathfrak{d}_T = \mathfrak{d}_{T^*}$.

D'autre part, toute contraction $T \in C_{00}$ telle que $\mathfrak{d}_T = \mathfrak{d}_{T^*} = N$ (= un nombre fini) appartient aussi à C_0. Nous désignons la classe de ces opérateurs par $C_0(N)$.

Ainsi on a $C_{\cdot 0} \supset C_{00} \supset C_0 \supset C_0(N)$.

Citons encore un résultat qui nous sera utile (op. cit., proposition III. 4.6): Si une contraction c.n.u. est la transformée quasi-affine d'une autre contraction, alors ou bien toutes les deux appartiennent à C_0, ou bien aucune. Dans le premier cas, leurs fonctions minimum coïncident.

Les propositions suivantes sont des conséquences plus ou moins immédiates du théorème.

Proposition 1. *Toute contraction T dans $\mathfrak{H}$, de classe C_0, a une transformée quasi-affine T_1, de classe C_0, telle que*

$$\mathfrak{d}_{T_1} = \mathfrak{d}_{T_1^*} = \dim_T \mathfrak{H}.$$

En particulier, s'il existe pour T un vecteur cyclique, on a $T_1 \in C_0(1)$.

Démonstration. L'opérateur T_1 du théorème est de classe $C_{\cdot 0}$ et par conséquent c.n.u., de même que T. Comme $T \in C_0$, on a alors aussi $T_1 \in C_0$, d'où $\mathfrak{d}_{T_1} = \mathfrak{d}_{T_1^*}$. Finalement, en ce qui concerne la dernière assertion, il n'y a qu'à remarquer que dans ce cas $\dim_T \mathfrak{H} = 1$.

Proposition 2. *Soient $T \in C_0$ dans $\mathfrak{H}$ et $S \in C_0(1)$ dans $\mathfrak{H}'$ telles que $m_S = m_T$. Pour que S soit une transformée quasi-affine de T il faut et il suffit que T admette un vecteur cyclique.*

Démonstration. Si T admet un vecteur cyclique, l'opérateur T_1 qui y correspond en vertu du théorème est de classe $C_0(1)$, de plus $m_{T_1} = m_T$. Ainsi $m_{T_1} = m_S$. Or deux contractions de classe $C_0(1)$ ayant la même fonction minimum sont unitairement équivalentes (cf. op. cit., remarque p. 256). S est donc aussi une transformée quasi-affine de T. Inversement, il dérive de (5) que pour la contraction $S \in C_0(1)$ il existe un vecteur cyclique k dans $\mathfrak{H}$. Si S est une transformée quasi-affine de l'opérateur T, donc si $TX = XS$ où X est une quasi-affinité de $\mathfrak{H}'$ dans $\mathfrak{H}$, on a

$$\bigvee_0^\infty T^n Xk = \bigvee_0^\infty XS^n k = \overline{X \bigvee_0^\infty S^n k} = \overline{X\mathfrak{H}'} = \mathfrak{H}.$$

Proposition 3. *Toute contraction $T \in C_{\cdot 0}$ admettant un vecteur cyclique et telle que $T \notin C_0$, a parmi ses transformées quasi-affines une translation unilatérale, de multiplicité* 1.

Démonstration. Soit T_1 l'opérateur qui correspond à T en vertu du théorème. On a alors $\mathfrak{d}_{T_1^*} = \dim_T \mathfrak{H} = 1$, donc $\mathfrak{d}_{T_1} = 0$ ou $\mathfrak{d}_{T_1} = 1$. Le second cas ne se présente pas. En effet, comme $T_1 \in C_{\cdot 0}$, les égalités $\mathfrak{d}_{T_1} = \mathfrak{d}_{T_1^*} = 1$ entraînent $T_1 \in C_0(1)$; cf. la remarque 1 (section précédente). On a donc $T_1 \in C_0$ ce qui contredit le fait que T_1 est une transformée quasi-affine de l'opérateur $T \notin C_0$. Ainsi, on a nécessairement $\mathfrak{d}_{T_1} = 0$, $\mathfrak{d}_{T_1^*} = 1$, donc T_1 est une translation unilatérale simple (cf. la remarque 2). Cela achève la démonstration.

Proposition 4. *Les hypothèses de la proposition 3 sont vérifiées en particulier pour tout opérateur T d'un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ de dimension infinie, tel que T admet un vecteur cyclique et que $\|T\| < 1$.*

Démonstration. La relation $T \in C_{\cdot 0}$ étant manifeste, il reste à montrer que $T \notin C_0$. Supposons le contraire. Des résultats connus sur les relations entre la fonction minimum et le spectre d'une contraction de classe C_0 (op. cit., théorème III. 5.1) on déduit que la fonction minimum m_T est holomorphe dans le disque unité fermé et ses zéros sont compris dans le disque $|z| \leqslant \|T\| (< 1)$ d'où il s'ensuit que la fonction intérieure m_T est un produit fini de Blaschke. Soit p le produit des numérateurs des facteurs dans ce produit de Blaschke: p est un polynôme de degré $n \geqslant 1$, soit $p(z) = c_0 z^n + \ldots + c_n$, $c_0 \neq 0$. Puisque $m_T(T) = O$, on a aussi $p(T) = O$, d'où il s'ensuit que, pour tout $h \in \mathfrak{H}$ et pour tout entier $m \geq 0$, $T^m h$ est une combinaison linéaire de $h, Th, \ldots, T^{n-1}h$. Si h est un des vecteurs cycliques pour T, les vecteurs h, $Th, \ldots, T^{n-1}h$ sous-tendent donc $\mathfrak{H}$, ce qui contredit l'hypothèse que $\mathfrak{H}$ est de dimension infinie.

Remarque 3. Toute translation unilatérale simple est unitairement équivalente à l'opérateur S dans l'espace l^2, défini par

$$S(x_0, x_1, \ldots) = (0, x_0, x_1, \ldots).$$

Cet opérateur S est donc une transformée quasi-affine des opérateurs T envisagés dans les propositions 3 et 4.

Proposition 5. *S est une transformée quasi-affine de S^*.*

Démonstration. Soit T un opérateur autoadjoint vérifiant les hypothèses de la proposition 4, par exemple soit T l'opérateur dans l'espace $\mathfrak{H} = L^2(0, \frac{1}{2})$, défini par $Th(x) = xh(x)$. (Un vecteur cyclique est fourni par $h(x) \equiv 1$). En vertu des propositions 3 et 4, S est une transformée quasi-affine de T, c'est-à-dire qu'il existe une quasi-affinité X telle que $TX = XS$. Il en dérive $X^*T = S^*X^*$ et par conséquent

$$S^*(X^*X) = (S^*X^*)X = (X^*T) = X^*X(TX) = X^*(XS) = (X^*X)S.$$

Comme X^*X est aussi une quasi-affinité, cela prouve notre assertion.

Remarque 4. Les vecteurs cycliques de S sous-tendent l'espace l^2; il n'y a qu'à envisager les vecteurs cycliques $v_r = (1, r, r^2, \ldots)$, $|r| < 1$. Tout opérateur T qui est relié à S par la relation $TX = XS$ moyennant une quasi-affinité X, admet alors aussi des vecteurs cycliques, notamment les vecteurs Xv_r, et ces vecteurs sous-tendent linéairement l'espace de T. En particulier, il s'ensuit l'existence de vecteurs cycliques pour S^*. De plus, on déduit de la proposition 4 que *si un opérateur d'un espace $\mathfrak{H}$ de dimension infinie admet un vecteur cyclique, l'ensemble de tous les vecteurs cycliques sous-tend $\mathfrak{H}$* (5).

(5) M. L. Gehér vient d'étendre ce résultat aux opérateurs d'un espace de Banach quelconque.

Reçu par la Rédaction le 29. 1. 1968

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXI. (1968)

On analytic functions of Smirnov-Orlicz classes

by

W. KOKILASHVILI (Tbilisi)

Introduction. The present paper deals with the class of analytic functions which is the extension of the known Smirnov E_p-class ($p > 1$). The class introduced is called the *Smirnov-Orlicz class*. Here are proved the so-called theorems on multipliers and decomposition which represent analogues of the well-known Marcinkiewicz and Littlewood-Paley theorems with regard to series of generalized Faber polynomials corresponding to the analytic functions of the Smirnov-Orlicz class. The theorems obtained are used to study the question of approximation of the analytic functions of the Smirnov-Orlicz class by polynomials in the mean on the boundary. The so-called indirect theorems of approximation have been proved. It turns out that in some cases the structural characteristics of the boundary function depend not only on the rate of approaching the best approximation to zero but also on the metric of the space in question.

For the E_p-class ($p > 1$) of analytic functions the problem of approximations by polynomials in the mean was discussed in [1] and [20]. In [5] and [6] the results of [1] and [20] were generalized and direct and indirect theorems containing the best estimate (in the sense of order) were obtained.

Definition. Suppose we are given N-function $\mu(u)$, that is, the function allowing the representation (see [7], p. 16)

$$\mu(u) = \int_0^u p(t)\,dt,$$

where $p(t) > 0$ for $t > 0$, and $p(t)$ is continuous on the right for $t \geq 0$, non-decreasing and satisfying the following conditions:

$$p(0) = 0, \quad p(\infty) = \lim_{t\to\infty} p(t) = \infty.$$

Let us further assume that G is a simply connected domain with a Jordan rectifiable boundary Γ. The analytic function $f(z)$ in domain G will