Sur un problème aux limites généralisé pour l'équation du type elliptique

par A. HAĆ (Varsovie)

1. Introduction. Le présent travail est basé sur le mémoire [4] de W. Pogorzelski. Dans son étude W. Pogorzelski avait utilisé la méthode topologique de Schauder, tandis que notre méthode applique, pour la première fois, la méthode des approximations successives au problème posé dans [4]. À cause de la singularité forte des intégrales qui interviennent dans la résolution du problème cette méthode exige des hypothèses plus fortes que celles du travail [4]. Néanmoins sa supériorité consiste en ce qu'elle donne une solution univoque du problème.

Il convient encore de signaler que le problème m'a été suggéré par W. Pogorzelski lui-même.

2. Énoncé du problème. Soit l'équation aux dérivées partielles du type elliptique:

$$(1) \quad \hat{\psi}(u) = \sum_{\alpha, \beta=1}^n a_{\alpha\beta}(X, u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^n b_\alpha(X, u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c(X)u \\ = F\left(X, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

dans l'espace euclidien à n dimensions ($n > 2$).

On admet les hypothèses suivantes:

I. Les coefficients de l'équation (2) sont des fonctions réelles définies et bornées dans la région:

$$(2) \quad X \in \Omega + S, \quad -\infty < u < +\infty,$$

où Ω est un domaine mesurable et limité par la surface S . Les coefficients, définis dans la région (2), satisfont aux conditions de Hölder-Lipschitz:

$$(3) \quad |a_{\alpha\beta}(X, u) - a_{\alpha\beta}(X_1, u)| < k_\alpha |X - X_1|^h,$$

$$(3') \quad \left| \frac{\partial a_{\alpha\beta}(X, u)}{\partial u} - \frac{\partial a_{\alpha\beta}(X_1, u_1)}{\partial u} \right| < k'_\alpha [|X - X_1|^h + |u - u_1|],$$

$$(4) \quad |b_\alpha(X, u) - b_\alpha(X_1, u_1)| < k_b [|X - X_1|^h + |u - u_1|],$$

$$(5) \quad |c(X) - c(X_1)| < k_c |X - X_1|^h,$$

où les coefficients k_a, k'_a, k_b, k_c sont des constantes positives, $|XX_1|$ désigne la distance euclidienne des points X et X_1 , et h est une constante positive, inférieure à l'unité.

II. La forme quadratique

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^n a_{\alpha\beta}(X, u) Z_\alpha Z_\beta$$

est définie positive dans la région $\Omega + S$.

III. La surface S satisfait aux conditions le Liapounoff avec l'exposant μ ($0 < \mu \leq 1$).

IV. La fonction $F(X, u_0, u_1, \dots, u_n)$ est définie dans la région:

$$(6) \quad X \in \Omega, \quad -\infty < u_\nu < +\infty \quad (\nu = 0, 1, \dots, n),$$

elle satisfait à l'inégalité

$$(7) \quad |F(X, u_0, u_1, \dots, u_n)| < m_F \sum_{\nu=0}^n |u_\nu| + m'_F |XP_X|^{-p} \quad (u_0 = u),$$

où $0 \leq p < 1$, m_F, m'_F sont des constantes positives, tandis que $|XP_X|$ est la distance du point X au point P_X de la surface S , le plus rapproché du point X . En outre la fonction F satisfait à la condition de Hölder-Lipschitz:

$$(8) \quad |F(X, u_0, u_1, \dots, u_n) - F(X_1, u'_0, u'_1, \dots, u'_n)| \\ < k(\Omega^*) |XX_1|^{h_F} + k_F \sum_{\nu=0}^n |u_\nu - u'_\nu|$$

en chaque point du domaine fermé $\Omega^* \subset \Omega$; k_F est une constante positive, $0 < h_F \leq 1$; $k(\Omega^*)$ dépend du domaine Ω^* .

V. Les fonctions $g(P)$ et $G(P, u)$, qui figurent dans la condition aux limites énoncée ci-dessous, sont des fonctions positives et continues dans l'ensemble

$$[P \in S, \quad -\infty < u < +\infty]$$

et la fonction $G(P, u)$ satisfait dans ce domaine à l'inégalité:

$$(9) \quad |G(P, u)| < m_G |u| + m'_G,$$

$$(10) \quad |G(P, u) - G(P_1, u')| < k_G [|PP_1|^{h_G} + |u - u'|],$$

dans laquelle m_G, m'_G, k_G sont des constantes positives, $0 < h_G \leq 1$.

VI. L'équation $\hat{\psi}(u) = 0$, avec la condition aux limites homogène:

$$\frac{du}{dT_P} + g(P)u(P) = 0,$$

n'admet que la solution nulle.

Avec ces hypothèses nous pouvons démontrer le théorème suivant:

THÉOREME. *Si les hypothèses I-VI sont réalisées et si les constantes du problème $m_F, m'_F, k_F, m_G, m'_G, k_G, k_a, k'_a, k_b$ sont suffisamment petites, il existe une fonction $u^*(X)$ qui satisfait à l'équation (1) en chaque point intérieur X du domaine Ω ainsi qu' à la condition aux limites non linéaire:*

$$(11) \quad \frac{du}{dT_P} + g(P)u(P) = G[P, u(P)],$$

en chaque point $P \in S$; $\frac{d}{dT}$ désigne la valeur limite de la dérivée transversale ([2], (6)).

3. Formules fondamentales. Avant de procéder à la démonstration du théorème précédent, nous établirons quelques formules dont nous nous servirons dans la résolution du problème.

De la théorie de W. Pogorzelski, exposée dans les travaux [1] et [2], nous pouvons déduire que si la fonction $u(X)$ satisfait à la condition de Hölder

$$(12) \quad |u(X) - u(X_1)| < k|XX_1|^h$$

$$(0 < h \leq 1; k = \text{const} > 0; X, X_1 \in \Omega + S),$$

la solution fondamentale $\Gamma(X, Y)$ de l'équation homogène (1) s'exprime par la formule

$$(13) \quad \Gamma^{(u)}(X, Y) = w_{(u)}^Y(X, Y) + \bar{w}_{(u)}(X, Y),$$

$$(13') \quad w_{(u)}^Z(X, Y) = [\vartheta_{(u)}^Z(X, Y)]^{-n+2},$$

$$(13'') \quad \vartheta_{(u)}^Z(X, Y) = \left[\sum_{\alpha, \beta=1}^n a^{\alpha\beta}(Z, u(Z)) (x_\alpha - \xi_\alpha)(x_\beta - \xi_\beta) \right]^{1/2},$$

$$(13''') \quad \bar{w}_{(u)}(X, Y) = \int \int \int_{\Omega'} w_{(u)}^Z(X, Y) \Phi^{(u)}(Z, Y) dZ,$$

où $X(x_1, \dots, x_n)$, $Y(\xi_1, \dots, \xi_n)$ sont des points distinct du domaine Ω ; $a^{\alpha\beta}$ sont des éléments de la matrice inverse de celle des coefficients $\|a_{\alpha\beta}(X, u(X))\|$.

La fonction $\Phi^{(u)}(Z, Y)$ est la solution de l'équation intégrale de Fredholm ([2], (9)):

$$(14) \quad \lambda_n^{(u)}(X) \Phi^{(u)}(X, Y) = \hat{\psi}_X^{(u)}[w_{(u)}^Y(X, Y)] + \int \int_{\Omega'} \psi_X^{(u)}[w_{(u)}^Z(X, Y)] \Phi^{(u)}(Z, Y) dZ,$$

où

$$(15) \quad \lambda_n^{(u)}(X) = \frac{2(n-2)(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(n/2) \sqrt{\det[a^{\alpha\beta}(X, u(X))]} }.$$

Il existe une constante positive C_1 telle que

$$0 < C_1 < \lambda_n^{(u)}(X)$$

(voir [2], (29)).

La fonction $\vartheta_{(u)}^Z(X, Y)$ satisfait à l'inégalité

$$(16) \quad g_1|XY| < \vartheta_{(u)}^Z(X, Y) < g_2|XY|,$$

où g_1 et g_2 sont des constantes positives (voir [2], formules (12), (13)).

Nous concluons que l'opération $\psi_X^{(u)}[w_{(u)}^Y(X, Y)]$ satisfait à l'inégalité suivante:

$$(17) \quad |\hat{\psi}_X^{(u)}[w_{(u)}^Y(X, Y)]| < C|XY|^{-n+h} \quad (C = \text{const} > 0),$$

(voir [2], (14)).

Conformément à la formule (15) du travail [2], la solution de l'équation (14) s'exprime par:

$$(18) \quad \Phi^{(u)}(X, Y) = [\lambda_n^{(u)}(X)]^{-1} \hat{\psi}_X^{(u)}[w_{(u)}^Y(X, Y)] + \\ + \iint_{\Omega'} \mathfrak{M}_{(u)}(X, Z) \hat{\psi}_Z^{(u)}[w_{(u)}^Y(Z, Y)] [\lambda_n^{(u)}(Z)]^{-1} dZ,$$

où $\mathfrak{M}_{(u)}(P, Q)$ désigne la somme de certains noyaux itérés et du noyau résolvant du noyau itéré borné, correspondant au noyau de l'équation (17) (voir [2]). Nous en concluons que la fonction Φ satisfait à l'inégalité ([2], (17)):

$$(19) \quad |\Phi^{(u)}(X, Y)| < C_1|XY|^{-n+h} \quad (C_1 = \text{const} > 0).$$

La fonction satisfait à la condition de Hölder dans la région bornée $\Omega^* \subset \Omega$ qui ne contient pas le point Y . Pour la quasi-solution et la solution fondamentale, ainsi que pour leurs dérivées, nous nous appuyerons sur les limitations suivantes:

$$(20) \quad |w_{(u)}^Y(X, Y)| < C_2|XY|^{-n+2}; \quad |w'_{(u)x_\alpha}(X, Y)| < C'_2|XY|^{-n+1}; \\ |w''_{(u)x_\alpha x_\beta}(X, Y)| < C''_2|XY|^{-n};$$

$$(20') \quad |\Gamma^{(u)}(X, Y)| < C_3|XY|^{-n+2}; \quad |\Gamma'_{x_\alpha}(X, Y)| < C'_3|XY|^{-n+1},$$

où $C_2, C'_2, C''_2, C_3, C'_3$ sont des constantes positives, (voir [2], (49); [3], p. 92; [4], (44); [2], (29), (50)).

La dérivée transversale de la solution fondamentale $\Gamma^{(u)}(P, Q)$ au point P de la surface S est déterminée par la formule

$$(21) \quad \frac{d\Gamma(P, Q)}{dT_P} = \sum_{\alpha, \beta=1}^n a_{\alpha\beta}(P, u(P)) \cos(N_P, x_\beta) \frac{\partial \Gamma^{(u)}(P, Q)}{\partial x_\alpha}$$

et satisfait à l'inégalité

$$(22) \quad \left| \frac{d\Gamma^{(u)}(P, Q)}{dT_P} \right| < \frac{C_4}{|PQ|^{n-1-h^*}}, \quad \text{où} \quad h^* = \min(h, \mu), \quad C_4 = \text{const} > 0,$$

(voir [2], (23)).

En outre on a:

$$(23) \quad \left| \frac{d\Gamma^{(u)}(P, Y)}{dT_P} + g(P)\Gamma^{(u)}(P, Y) \right| < \frac{C_5}{|PY|^{n-1-h^*}},$$

(où $C_5 = \text{const} > 0$), (voir [2], (36)), pour chaque fonction $u(X)$ qui satisfait à l'inégalité (12).

4. Démonstration du théorème. La solution $u(X)$ du problème en question s'exprime par la somme du potentiel de la charge spatiale et du potentiel de simple couche la surface S d'une densité $\varphi(Q)$ continue et bornée, mais inconnue,

$$(24) \quad u(X) = - \int_{\Omega} \int_{\Omega} \Gamma^{(u)}(X, Y) [\lambda_n^{(u)}(Y)]^{-1} F \left[Y, u(Y), \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial \xi_n} \right] dY + \\ + \int_S \Gamma^{(u)}(X, Q) \varphi(Q) dQ$$

de même que dans le travail [2].

Introduisant l'égalité (24) dans la formule (11) nous trouvons comme conséquence du théorème 9 de la monographie [3] (p. 108), l'équation suivante:

$$(25) \quad -\frac{1}{2} \lambda_n^{(u)}(P) \varphi(P) + \int_S \left[\frac{d\Gamma^{(u)}(P, Q)}{dT_P} + g(P)\Gamma^{(u)}(P, Q) \right] \varphi(Q) dQ \\ = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \left[\frac{d\Gamma^{(u)}(P, Y)}{dT_P} + g(P)\Gamma^{(u)}(P, Y) \right] \times \\ \times [\lambda_n^{(u)}(Y)]^{-1} F \left[Y, u(Y), \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial \xi_n} \right] dY + G[P, u(P)].$$

Ainsi les équations (1) et (11) sont ramenées aux équations intégral-différentielles (24), (25) avec les fonctions inconnues $u(X)$ et $\varphi(P)$. Pour résoudre le problème, examinons le système des $(n+2)$ équations intégrales que voici:

$$(26) \quad u_0(X) = - \int_{\Omega} \int_{\Omega} \Gamma^{(u_0)}(X, Y) [\lambda_n^{(u_0)}(Y)]^{-1} F[Y, u_0(Y), u_1(Y), \dots, u_n(Y)] dY + \\ + \int_S \Gamma^{(u_0)}(X, Q) \varphi(Q) dQ,$$

$$(27) \quad u_{\nu}(X) = - \int_{\Omega} \int \Gamma_{x_{\nu}}^{(u_0)}(X, Y) [\lambda_n^{(u_0)}(Y)]^{-1} F[Y, u_0(Y), u_1(Y), \dots, u_n(Y)] dY + \\ + \int_S \Gamma_{x_{\nu}}^{(u_0)}(X, Q) \varphi(Q) dQ \quad (\nu = 1, 2, \dots, n),$$

$$(28) \quad -\frac{1}{2} \lambda_n^{(u_0)}(P) \varphi(P) + \int_S \left[\frac{d\Gamma^{(u_0)}(P, Q)}{dT_P} + g(P) \Gamma^{(u_0)}(P, Q) \right] \varphi(Q) dQ \\ = \int_{\Omega} \int \left[\frac{d\Gamma^{(u_0)}(P, Y)}{dT_P} + g(P) \Gamma^{(u_0)}(P, Y) \right] \times \\ \times [\lambda_n^{(u_0)}(Y)]^{-1} F[Y, u_0(Y), u_1(Y), \dots, u_n(Y)] dY + \\ + G \left\{ P, - \int_{\Omega} \int \Gamma^{(u_0)}(P, Y) [\lambda_n^{(u_0)}(Y)]^{-1} F[Y, u_0(Y), u_1(Y), \dots, u_n(Y)] dY + \right. \\ \left. + \int_S \Gamma^{(u_0)}(P, Q) \varphi(Q) dQ \right\}$$

aux fonctions inconnues $u_0(X), u_1(X), \dots, u_n(X), \varphi(P)$.

Nous résolvons le système d'équations (26), (27), (28) par approximations successives. Considérons les $(n+2)$ suites de fonctions:

$$(29) \quad \{u_0^{(m)}(X)\}, \quad |XP_X|^q \{u_{\nu}^{(m)}(X)\} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n), \quad \{\varphi^{(m)}(P)\}, \\ m = 0, 1, \dots; \quad 0 \leq q < 1; \quad X \in \Omega; \quad P \in S; \quad P_X \in S.$$

Ces suites sont définies par les relations de récurrence:

$$(30) \quad u_0^{(m+1)}(X) = - \int_{\Omega} \int \Gamma^{(u_0^{(m)})}(X, Y) [\lambda_n^{(u_0^{(m)})}(Y)]^{-1} \times \\ \times F[Y, u_0^{(m)}(Y), u_1^{(m)}(Y), \dots, u_n^{(m)}(Y)] dY + \int_S \Gamma^{(u_0^{(m)})}(X, Q) \varphi^{(m+1)}(Q) dQ,$$

$$(31) \quad u_{\nu}^{(m+1)}(X) = - \int_{\Omega} \int \Gamma_{x_{\nu}}^{(u_0^{(m)})}(X, Y) [\lambda_n^{(u_0^{(m)})}(Y)]^{-1} \times \\ \times F[Y, u_0^{(m)}(Y), u_1^{(m)}(Y), \dots, u_n^{(m)}(Y)] dY + \\ + \int_S \Gamma_{x_{\nu}}^{(u_0^{(m)})}(X, Q) \varphi^{(m+1)}(Q) dQ \quad (\nu = 1, 2, \dots, m),$$

$$(32) \quad -\frac{1}{2} \lambda_n^{(u_0^{(m)})}(P) \varphi^{(m+1)}(P) + \\ + \int_S \left[\frac{d\Gamma^{(u_0^{(m)})}(P, Q)}{dT_P} + g(P) \Gamma^{(u_0^{(m)})}(P, Q) \right] \varphi^{(m+1)}(Q) dQ \\ = \int_{\Omega} \int \left[\frac{d\Gamma^{(u_0^{(m)})}(P, Y)}{dT_P} + g(P) \Gamma^{(u_0^{(m)})}(P, Y) \right] [\lambda_n^{(u_0^{(m)})}(Y)]^{-1} \times \\ \times F[Y, u_0^{(m)}(Y), u_1^{(m)}(Y), \dots, u_n^{(m)}(Y)] dY + G[p, \bar{u}_0^{(m)}(P)],$$

où

$$(32') \quad \bar{u}_0^{(m)}(P) \\ = - \iint_{\Omega} \Gamma^{(u_0^{(m)})}(P, Y) [\lambda_n^{(u_0^{(m)})}(Y)]^{-1} F[Y, u_0^{(m)}(Y), u_1^{(m)}(Y), \dots, u_n^{(m)}(Y)] dY + \\ + \iint_S \Gamma^{(u_0^{(m)})}(P, Q) \varphi^{(m)}(Q) dQ.$$

Nous allons démontrer la convergence des suites (29).

Nous admettons que les premiers termes sont continus et satisfont aux conditions suivantes:

$$(33) \quad |u_0^{(0)}(X)| \leq R, \quad |XP_X|^q |u_\nu^{(0)}(X)| \leq R \quad (\nu = 1, 2, \dots, n, X \in \Omega; 0 \leq q < 1), \\ |u_0^{(0)}(X) - u_0^{(0)}(X_1)| \leq k |XX_1|^h \quad (0 < h \leq 1, X_1 \in \Omega), \\ |\varphi^{(0)}(P)| \leq \varrho \quad (P \in S; P_X \in S),$$

dans lesquelles R , ϱ et k sont des constantes positives.

Nous démontrerons par induction la convergence des suites des approximations successives.

Admettons que les approximations d'ordre m satisfont aux mêmes inégalités, à savoir:

$$(34) \quad |u_0^{(m)}(X)| \leq R, \quad |XP_X|^q |u_\nu^{(m)}(X)| \leq R \quad (\nu = 1, 2, \dots, n), \\ |u_0^{(m)}(X) - u_0^{(m)}(X_1)| \leq k |XX_1|^h, \\ |\varphi^{(m)}(P)| \leq \varrho.$$

En introduisant les formules (34) dans l'inégalité (7) on trouve:

$$(35) \quad |F[Y, u_0^{(m)}(Y), u_1^{(m)}(Y), \dots, u_n^{(m)}(Y)]| \\ < m_F n |YP_Y|^{-q} R + m_F R + m'_F |YP_Y|^{-p}.$$

Examinons les conditions sous lesquelles les inégalités (34) seront valables pour les $(m+1)^{\text{èmes}}$ approximations des fonctions cherchées.

On peut écrire l'équation (32) comme il suit:

$$(36) \quad -\frac{1}{2} \lambda_n^{(u_0^{(m)})}(P) \varphi^{(m+1)}(P) + \\ + \iint_S \left[\frac{d\Gamma^{(u_0^{(m)})}(P, Q)}{dT_P} + g(P) \Gamma^{(u_0^{(m)})}(P, Q) \right] \varphi^{(m+1)}(Q) dQ = f(P),$$

où $f(P)$ est une fonction continue. Le noyau de l'équation (36) est à singularité faible (voir (23)). Conformément à l'hypothèse VI, l'équation homogène:

$$(37) \quad -\frac{1}{2} \lambda_n^{(u_0^{(m)})}(P) \varphi^{(m+1)}(P) \\ = \iint_S \left[\frac{d\Gamma^{(u_0^{(m)})}(P, Q)}{dT_P} + g(P) \Gamma^{(u_0^{(m)})}(P, Q) \right] \varphi^{(m+1)}(Q) dQ = 0$$

n'admet que la solution nulle. La solution de l'équation (36) est donc unique; elle est donnée par la formule (38):

$$(38) \quad \varphi^{(m+1)}(P) = \frac{2f(P)}{\lambda_n^{(u_0^{(m)})}(P)} + \int_S \Re^{(u_0^{(m)})}(P, Q) \frac{2f(P)}{\lambda_n^{(u_0^{(m)})}(Q)} dQ,$$

où $\Re$ est la somme du noyau résolvant et des noyaux itérés dont le premier satisfait à l'inégalité (23).

Nous avons, à cause des inégalités (9), (23), (34), (35), l'inégalité (39):

$$(39) \quad |\varphi^{(m+1)}(P)| < b_1^* m_F R + b_2^* m'_F + b_3^* R m_G + b_4^* m'_G,$$

où $b_1^*, b_2^*, b_3^*, b_4^*$ sont des constantes positives indépendantes des fonctions F et G .

La dernière des inégalités (34) est valable des que

$$(39') \quad b_1^* m_F R + b_2^* m'_F + b_3^* R m_G + b_4^* m'_G \leq \varrho.$$

Les formules (30), (31) et les inégalités (20'), (35), (39), (39') donnent, en vertu des théorèmes 4 et 5 du travail [4], les inégalités suivantes:

$$(40) \quad |u_0^{(m+1)}(X)| < C'(R m_F + m'_F + \varrho),$$

$$(41) \quad |u_\nu^{(m+1)}(X)| < C'_1(R m_F + m'_F) + C'_1' [|\log |XP_X|| + C_2] \varrho,$$

où C', C'_1, C'_1', C_2 sont des constantes positives indépendantes des fonctions F et φ .

En nous basant sur le théorème 8 du travail [1], sur le résultat cité à la page 189 du travail [4] et sur les inégalités (35), (39') nous déduisons de la formule (30) l'inégalité suivante:

$$(42) \quad |u_0^{(m+1)}(X) - u_0^{(m+1)}(X_1)| < [b_1 R m_F + b_2 m'_F + b_3 \varrho] |XX_1|^h,$$

où b_1, b_2, b_3 sont des constantes positives indépendantes de la fonction F .

En nous appuyant sur les inégalités (39), (40), (41), (42), nous retrouvons pour les $(m+1)^{\text{èmes}}$ itérations les inégalités (34). Les fonctions $u_\nu^{(m)}(X)$ ($\nu = 0, 1, \dots, n$), $\varphi^{(m)}(P)$ existent et satisfont aux relations (34), dès que les constantes liées aux fonctions F et G satisfont aux inégalités:

$$(43) \quad \begin{aligned} C_0^*(R m_F + m'_F + \varrho) &\leq R, \\ b_1 R m_F + b_2 m'_F + b_3 \varrho &\leq k, \\ b_1^* R m_F + b_2^* m'_F + b_3^* R m_G + b_4^* m'_G &\leq \varrho, \end{aligned}$$

où C_0^* est le plus grand des nombres C' et des bornes supérieures des fonctions

$$C'_1 |XP_X|^q, \quad C'_1' |XP_X|^q [|\log |XP_X|| + C_2]$$

dans le domaine Ω .

Nous en déduisons par induction que, si les fonctions initiales des suites (29) satisfont aux conditions (33) et les constantes du problème satisfont aux inégalités (43), les suites (29) existent et satisfont aux inégalités (34) pour chaque valeur de m . Les conditions (43) ne seront, vérifiées que si les constantes du problème m_F, m'_F, m_G, m'_G sont suffisamment petites. Nous étudierons maintenant la convergence des suites des approximations successives (29). Considérons les séries suivantes:

$$(44) \quad \sum_{m=0}^{\infty} [u_0^{(m+1)}(X) - u_0^{(m)}(X)],$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} H[u_0^{(m+1)}(X) - u_0^{(m)}(X)], \text{ où } H[u_0(X)] = \sup_{X, X_1 \in \Omega} \frac{|u_0(X) - u_0(X_1)|}{|XX_1|^h}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} |XP_X|^a [u_\nu^{(m+1)}(X) - u_\nu^{(m)}(X)] \quad (\nu = 1, \dots, n),$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} [\varphi^{(m+1)}(P) - \varphi^{(m)}(P)].$$

En démontrant la convergence absolue et uniforme des séries (44), nous établirons la convergence uniforme des suites (29).

Pour démontrer la convergence des séries (44), nous utiliserons les limitations que nous allons maintenant déduire

LEMME 1. *La différence de deux approximations successives de la quasi-solution satisfait à l'inégalité:*

$$(45) \quad |w_{(u_0^{(m)})}^F(X, Y) - w_{(u_0^{(m-1)})}^F(X, Y)| < d_1 k_a |XY|^{-n+2} \sup |u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}|,$$

où $d_1 = \text{const} > 0$.

Démonstration. D'après les formules (13'), (13''), (16) nous avons

$$\begin{aligned} & |w_{(u_0^{(m)})}^F(X, Y) - w_{(u_0^{(m-1)})}^F(X, Y)| \\ &= \left| \frac{[\vartheta_{(u_0^{(m)})}^F(X, Y)]^{2n-4} - [\vartheta_{(u_0^{(m-1)})}^F(X, Y)]^{2n-4}}{[\vartheta_{(u_0^{(m)})}^F(X, Y)]^{n-2} [\vartheta_{(u_0^{(m-1)})}^F(X, Y)]^{n-2} \{ [\vartheta_{(u_0^{(m)})}^F(X, Y)]^{n-2} + [\vartheta_{(u_0^{(m-1)})}^F(X, Y)]^{n-2} \}} \right| \\ &\leq \frac{1}{2g_1^{3n-6} |XY|^{3n-6}} |[\vartheta_{(u_0^{(m)})}^F(X, Y)]^2 - [\vartheta_{(u_0^{(m-1)})}^F(X, Y)]^2| \cdot |[\vartheta_{(u_0^{(m)})}^F(X, Y)]^{2n-6} + \\ &\quad + \dots + [\vartheta_{(u_0^{(m)})}^F(X, Y)]^2 [\vartheta_{(u_0^{(m-1)})}^F(X, Y)]^{2n-8} + [\vartheta_{(u_0^{(m-1)})}^F(X, Y)]^{2n-6}| \\ &\leq \frac{(n-2)g_2^{2n-6} |XY|^{2n-6}}{2g_1^{3n-6} |XY|^{3n-6}} \left| \sum_{\alpha, \beta=1}^n [a^{\alpha\beta}(Y, u_0^{(m)}(Y)) - a^{\alpha\beta}(Y, u_0^{(m-1)}(Y))] \times \right. \\ &\quad \left. \times (x_\alpha - \xi_\alpha)(x_\beta - \xi_\beta) \right|. \end{aligned}$$

D'où nous obtenons, d'après l'hypothèse (3), la formule (45).

LEMMA 2. *Les différences des premières et secondes dérivées de la quasi-solution calculées pour les deux indices successifs m et $(m-1)$ satisfont aux inégalités*

$$(46) \quad |w'_{(u_0^{(m)})x_a}(X, Y) - w'_{(u_0^{(m-1)})x_a}(X, Y)| < d_2 k_a |XY|^{-n+1} \sup |u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}|,$$

$$(47) \quad |w''_{(u_0^{(m)})x_a x_\beta}(X, Y) - w''_{(u_0^{(m-1)})x_a x_\beta}(X, Y)| < d_3 k_a |XY|^{-n} \sup |u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}|,$$

d_2, d_3 étant des constantes positives.

Démonstration. En appliquant les formules citées dans la monographie [3], p. 93, et en procédant de même que dans la démonstration du lemme 1, nous avons les limitations (46) et (47).

LEMME 3. *La différence des opérations $\psi^{(m)} - \psi^{(m-1)}$ satisfait à l'inégalité:*

$$(48) \quad |\hat{\psi}^{(u_0^{(m)})} [w_{(u_0^{(m)})}^F(X, Y)] - \hat{\psi}^{(u_0^{(m-1)})} [w_{(u_0^{(m-1)})}^F(X, Y)]| < \frac{C^*}{|XY|^{n-h}} \{ \sup |u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}| + H[u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}] \},$$

où $C^* = \max \{d_1^* k'_a [1 + 2(b_1 R m_F + b_2 m'_F + b_3 \varrho)] + d_2^* [(b_1 R m_F + b_2 m'_F + b_3 \varrho) + M_b + M_c] k_a + d_3^* k_b; d_4^* k_a\}$, $M_b = \sup |b_a(X, u(X))|$; $M_c = \sup |c(X)|$; $d_1^*, d_2^*, d_3^*, d_4^*$ sont des constantes positives, indépendantes de F et G .

Démonstration.

$$(49) \quad \hat{\psi}_X^{(u_0^{(m)})} [w_{(u_0^{(m)})}^F(X, Y)] - \hat{\psi}_X^{(u_0^{(m-1)})} [w_{(u_0^{(m-1)})}^F(X, Y)] \\ = \sum_{a,\beta=1}^n \{ [a_{a\beta}(X, u_0^{(m)}(X)) - a_{a\beta}(X, u_0^{(m-1)}(X))] - \\ - [a_{a\beta}(Y, u_0^{(m)}(Y)) - a_{a\beta}(Y, u_0^{(m-1)}(Y))] \} \frac{\partial^2 w_{(u_0^{(m)})}^F(X, Y)}{\partial x_a \partial x_\beta} + \\ + \sum_{a,\beta=1}^n [a_{a\beta}(X, u_0^{(m-1)}(X)) - a_{a\beta}(Y, u_0^{(m-1)}(Y))] \times \\ \times \left[\frac{\partial^2 w_{(u_0^{(m)})}^F(X, Y)}{\partial x_a \partial x_\beta} - \frac{\partial^2 w_{(u_0^{(m-1)})}^F(X, Y)}{\partial x_a \partial x_\beta} \right] + \\ + \sum_{a=1}^n [b_a(X, u_0^{(m)}(X)) - b_a(X, u_0^{(m-1)}(X))] \frac{\partial w_{(u_0^{(m)})}^F(X, Y)}{\partial x_a} + \\ + \sum_{a=1}^n \left[\frac{\partial w_{(u_0^{(m)})}^F(X, Y)}{\partial x_a} - \frac{\partial w_{(u_0^{(m-1)})}^F(X, Y)}{\partial x_a} \right] b_a(X, u_0^{(m-1)}(X)) + \\ + c(X) [w_{(u_0^{(m)})}^F(X, Y) - w_{(u_0^{(m-1)})}^F(X, Y)].$$

Pour limiter la fonction

$$(50) \quad H[a_{\alpha\beta}^{(m)} - a_{\alpha\beta}^{(m-1)}] \\ = \sup_{X, Y \in \Omega} \left\{ \frac{[a_{\alpha\beta}(X, u_0^{(m)}(X)) - a_{\alpha\beta}(X, u_0^{(m-1)}(X))]}{|XY|^h} - \frac{[a_{\alpha\beta}(Y, u_0^{(m)}(Y)) - a_{\alpha\beta}(Y, u_0^{(m-1)}(Y))]}{|XY|^h} \right\}$$

nous profiterons d'un lemme de Hadamard.

Si la fonction donnée $a_{\alpha\beta}$ satisfait à l'hypothèse (3), la différence $\Delta a_{\alpha\beta}$ s'exprimera par

$$(51) \quad \Delta a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(X, u) - a_{\alpha\beta}(X, v) = D(X, u, v)(u - v),$$

où la fonction $D(X, u, v)$ satisfait à la condition de Hölder-Lipschitz:

$$(52) \quad |D(X, u, v) - D(X', u', v')| < k'_a[|XX'|^h + |u - u'| + |v - v'|].$$

En introduisant dans l'égalité (50) les expressions (51) et (52), nous avons l'inégalité

$$(53) \quad H[a_{\alpha\beta}^{(m)} - a_{\alpha\beta}^{(m-1)}] \leq H[D] \sup |u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}| + k_a H[u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}],$$

où

$$(54) \quad H[D] \leq k'_a[|XY|^h + |u_0^{(m)}(X) - u_0^{(m)}(Y)| + |u_0^{(m-1)}(X) - u_0^{(m-1)}(Y)|]|XY|^{-h}.$$

Il résulte des inégalités (42), (53), (54) que:

$$(55) \quad H[a_{\alpha\beta}^{(m)} - a_{\alpha\beta}^{(m+1)}] \\ \leq k'_a[1 + 2[b_1 R m_F + b_2 m'_F + b_3 \varrho] \sup |u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}|] + k_a H[u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}].$$

En tenant compte des hypothèses (3), (3'), (4), (5) et des inégalités (20), (42), (45), (46), (47), (55), on peut écrire l'expression (49) sous la forme (48).

LEMME 4. La différence des fonctions

$$\Phi^{(u_0^{(m)})}(X, Y) - \Phi^{(u_0^{(m-1)})}(X, Y)$$

satisfait à l'inégalité

$$(56) \quad |\Phi^{(u_0^{(m)})}(X, Y) - \Phi^{(u_0^{(m-1)})}(X, Y)| \\ < \frac{aC^*}{|XY|^{n-h}} \{ \sup |u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}| + H[u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}] \},$$

où a désigne une constante positive.

Démonstration. La fonction $\Phi^{(u_0)}(X, Y)$ est la solution de l'équation intégrale (14). En posant dans cette équation

$$(57) \quad N^{(u_0)}(X, Y) = [\lambda_n^{u_0}(X)]^{-1} \hat{\psi}^{(u_0)}[w_{(u_0)}^Y(X, Y)]$$

nous avons

$$\begin{aligned}
 (58) \quad & \Phi^{(u_0^{(m)})}(X, Y) - \Phi^{(u_0^{(m-1)})}(X, Y) \\
 &= N^{(u_0^{(m)})}(X, Y) - N^{(u_0^{(m-1)})}(X, Y) + [\lambda^{(u_0^{(m)})}(X)]^{-1} - [\lambda^{(u_0^{(m-1)})}(X)]^{-1} + \\
 &+ \iint_{\Omega'} [N^{(u_0^{(m)})}(X, Z) - N^{(u_0^{(m-1)})}(X, Z)] \Phi^{(u_0^{(m)})}(X, Z) dZ + \\
 &+ \iint_{\Omega'} N^{(u_0^{(m-1)})}(X, Z) [\Phi^{(u_0^{(m)})}(Z, Y) - \Phi^{(u_0^{(m-1)})}(Z, Y)] dZ.
 \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned}
 (59) \quad & L(X, Y) \\
 &= N^{(u_0^{(m)})}(X, Y) - N^{(u_0^{(m-1)})}(X, Y) + [\lambda_n^{(u_0^{(m)})}(X)]^{-1} - [\lambda_n^{(u_0^{(m-1)})}(X)]^{-1} + \\
 &+ \iint_{\Omega'} [N^{(u_0^{(m)})}(X, Z) - N^{(u_0^{(m-1)})}(X, Z)] \Phi^{(u_0^{(m)})}(Z, Y) dZ.
 \end{aligned}$$

La solution de l'équation (58) se présente alors sous la forme

$$\begin{aligned}
 (60) \quad & \Phi^{(u_0^{(m)})}(X, Y) - \Phi^{(u_0^{(m-1)})}(X, Y) \\
 &= L(X, Y) + \iint_{\Omega'} \mathfrak{M}^{(u_0^{(m-1)})}(X, Z) L(Z, Y) dZ,
 \end{aligned}$$

où $\mathfrak{M}^{(u_0^{(m-1)})}$ est le même noyau que dans l'équation (18).

Il résulte de la formule (15) que

$$(61) \quad |[\lambda_n^{(u_0^{(m)})}(X)]^{-1} - [\lambda_n^{(u_0^{(m-1)})}(X)]^{-1}| < a_1 k_a \sup |u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}|.$$

En tenant compte, dans les formules (57), (59), des inégalités (17), (19), (48), (61), nous avons:

$$\begin{aligned}
 (62) \quad & |N^{(u_0^{(m)})}(X, Y) - N^{(u_0^{(m-1)})}(X, Y)| \\
 &< \frac{a_2 C^*}{|XY|^{n-h}} \{ \sup |u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}| + H[u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}] \},
 \end{aligned}$$

$$(63) \quad |L(X, Y)| < \frac{a_3 C^*}{|XY|^{n-h}} \{ \sup |u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}| + H[u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}] \},$$

où a_1, a_2, a_3 sont des constantes positives. Les inégalités (17), (62), (63) et la formule (60) donnent enfin l'inégalité (56).

LEMME 5. La différence du quasi-potentiel (13''') satisfait à l'inégalité

$$\begin{aligned}
 (64) \quad & |\bar{w}_{(u_0^{(m)})}(X, Y) - \bar{w}_{(u_0^{(m-1)})}(X, Y)| \\
 &< \frac{a' C^*}{|XY|^{n-2-h}} \{ \sup |u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}| + H[u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}] \} \quad (a' = \text{const} > 0).
 \end{aligned}$$

La démonstration découle des inégalités (45), (56).

LEMME 6. La différence $\Gamma^{(u_0^{(m)})}(X, Y) - \Gamma^{(u_0^{(m-1)})}(X, Y)$ satisfait à l'inégalité

$$(65) \quad |\Gamma^{(u_0^{(m)})}(X, Y) - \Gamma^{(u_0^{(m-1)})}(X, Y)| \\ < \frac{a^* C^*}{|XY|^{n-2}} \{ \sup |u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}| + H[u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}] \} \quad (a^* = \text{const} > 0).$$

Démonstration. Nous obtenons l'inégalité (65) en nous appuyant sur l'égalité (13) et en rapprochant les inégalités (45) et (64).

LEMME 7. Le module de la différence des approximations $m^{\text{ème}}$ et $(m-1)^{\text{ème}}$ des premières dérivées de la solution fondamentale satisfait à l'inégalité suivante:

$$(66) \quad |\Gamma_{x_p}^{(u_0^{(m)})}(X, Y) - \Gamma_{x_p}^{(u_0^{(m-1)})}(X, Y)| \\ < \frac{a_1^* C^*}{|XY|^{n-1}} \{ \sup |u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}| + H[u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}] \}$$

où a_1^* est une constante positive.

Démonstration. L'inégalité (66), se déduit des formules (13), (13'') et des inégalités (19), (20), (46), (56).

LEMME 8. La différence de la dérivée transversale de la solution fondamentale satisfait à l'inégalité

$$(67) \quad \left| \frac{d\Gamma^{(u_0^{(m)})}(P, Q)}{dT_P} - \frac{d\Gamma^{(u_0^{(m-1)})}(P, Q)}{dT_P} \right| \\ < \frac{a_2^* C^*}{|PQ|^{n-1-h^*}} \{ \sup |u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}| + H[u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}] \},$$

où $h^* = \min(h, \mu)$, a_2^* est une constante positive.

Démonstration. Dans la démonstration nous nous appuyons sur la monographie [3] (p. 109), sur les formules (13), (13''), et les limitations (16), (19), (55). Nous avons ainsi l'inégalité (67).

LEMME 9. La différence $u_0^{(m+1)}(X) - u_0^{(m)}(X)$ est bornée comme il suit:

$$(68) \quad |u_0^{(m+1)}(X) - u_0^{(m)}(X)| \\ < [A_1 C^* (Rm_F + m'_F + \varrho) + A_2 k_F] \sup |u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}| + \\ &+ A_3 C^* (Rm_F + m'_F + \varrho) H[u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}] + \\ &+ A_4 k_F \sup \left(|YQ_F|^q \sum_{j=1}^n |u_j^{(m)} - u_j^{(m-1)}| \right) + \\ &+ A_5 \sup |\varphi^{(m+1)} - \varphi^{(m)}|,$$

où A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 sont des constantes positives.

Démonstration. Il résulte de la formule (30) que:

$$\begin{aligned}
 (69) \quad & |u_0^{(m+1)}(X) - u_0^{(m)}(X)| \\
 & \leq \int \int_{\Omega} |\Gamma^{(u_0^{(m)})}(X, Y) - \Gamma^{(u_0^{(m-1)})}(X, Y)| [\lambda_n^{(u_0^{(m)})}(Y)]^{-1} \times \\
 & \quad \times |F[Y, u_0^{(m)}(Y), u_1^{(m)}(Y), \dots, u_n^{(m)}(Y)]| dY + \\
 & \quad + \int \int_{\Omega} |[\lambda_n^{(u_0^{(m)})}(Y)]^{-1} - [\lambda_n^{(u_0^{(m-1)})}(Y)]^{-1}| \times \\
 & \quad \times |\Gamma^{(u_0^{(m-1)})}(X, Y)| |F[Y, u_0^{(m)}(Y), u_1^{(m)}(Y), \dots, u_n^{(m)}(Y)]| dY + \\
 & \quad + \int \int_{\Omega} |F[Y, u_0^{(m)}(Y), u_1^{(m)}(Y), \dots, u_n^{(m)}(Y)] - \\
 & \quad - F[Y, u_0^{(m-1)}(Y), u_1^{(m-1)}(Y), \dots, u_n^{(m-1)}(Y)]| \times \\
 & \quad \times |\Gamma^{(u_0^{(m-1)})}(X, Y)| [\lambda_n^{(u_0^{(m-1)})}(Y)]^{-1} dY + \\
 & \quad + \int \int_S |\Gamma^{(u_0^{(m)})}(X, Q) - \Gamma^{(u_0^{(m-1)})}(X, Q)| |\varphi^{(m+1)}(Q)| dQ + \\
 & \quad + \int \int_S |\varphi^{(m+1)}(Q) - \varphi^{(m)}(Q)| |\Gamma^{(u_0^{(m-1)})}(X, Q)| dQ.
 \end{aligned}$$

En tenant compte de (8), (20), (35), (39), (39') (61), (65) et du théorème 5 du travail [4], nous avons l'évaluation (68).

Transformant l'équation (32') d'une manière analogue nous obtenons pour la différence des approximations voisines la limitation suivante:

$$\begin{aligned}
 (69') \quad & |\bar{u}_0^{(m)}(P) - \bar{u}_0^{(m-1)}(P)| < [\bar{A}_1 C^*(Rm_F + m'_F + \varrho) + \bar{A}_2 k_F] \sup |u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}| + \\
 & \quad + \bar{A}_3 C^*(Rm_F + m'_F + \varrho) H[u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}] + \\
 & \quad + \bar{A}_4 k_F \sup \left(|YQ_F|^q \sum_{\nu=1}^n |u_{\nu}^{(m)} - u_{\nu}^{(m-1)}| \right) + \\
 & \quad + \bar{A}_5 \sup |\varphi^{(m)} - \varphi^{(m-1)}|,
 \end{aligned}$$

où $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4, \bar{A}_5$ sont des constantes positives.

LEMME 10. Les différences $H[u^{(m+1)}(X) - u^{(m)}(X)]$ s'évaluent comme il suit:

$$\begin{aligned}
 (70) \quad & H[u_0^{(m+1)}(X) - u_0^{(m)}(X)] \\
 & < [A'_1 C^*(Rm_F + m'_F + \varrho) + A'_2 k_F] \sup |u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}| + \\
 & \quad + A'_3 C^*(Rm_F + m'_F + \varrho) H[u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}] + \\
 & \quad + A'_4 k_F \sup \left(|YQ_F|^q \sum_{\nu=1}^n |u_{\nu}^{(m)} - u_{\nu}^{(m-1)}| \right) + \\
 & \quad + A'_5 \sup |\varphi^{(m+1)} - \varphi^{(m)}|,
 \end{aligned}$$

où $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, A'_5$ sont des constantes positives indépendantes des fonctions F et φ .

Démonstration. La démonstration de cette inégalité résulte des formules (8), (20), (35), (61), (65), du théorème 8 du travail [1], ainsi que de la remarque qui découle des théorèmes 5 et 6 du travail [4].

LEMME 11. La différence $|XP_X|^q |u_\bullet^{(m+1)}(X) - u_\bullet^{(m)}(X)|$ satisfait à l'inégalité:

$$(71) \quad |XP_X|^q |u_\bullet^{(m+1)}(X) - u_\bullet^{(m)}(X)| \\ < [A_1^* C^*(Rm_F + m'_F + \varrho) + A_2^* k_F] \sup |u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}| + \\ + A_3^* C^*(Rm_F + m'_F + \varrho) H[u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}] + \\ + A_4^* k_F \sup \left(|YQ_Y|^q \sum_{j=1}^n |u_\bullet^{(m)} - u_\bullet^{(m-1)}| \right) + \\ + A_5^* \sup |\varphi^{(m+1)} - \varphi^{(m)}| \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

où $A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_4^*, A_5^*$ sont des constantes positives.

Démonstration. Pour obtenir l'inégalité (71) il suffit de profiter des théorèmes 4 et 5 du travail [4] et des limitations (8), (20'), (35), (61), (66) en les introduisant dans la formule (31).

LEMME 12. La différence de deux approximations successives de la fonction $\varphi(P)$ satisfait à l'inégalité

$$(72) \quad |\varphi^{(m+1)}(P) - \varphi^{(m)}(P)| \\ < [C^*(Rm_F + m'_F + \varrho) + k_F] (D'_1 + D'_2 k_G) \sup |u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}| + \\ + C^*(Rm_F + m'_F + \varrho) (D'_3 + D'_4 k_G) H[u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}] + \\ + (D'_5 + D'_6 k_G) k_F \sup \left(|YQ_Y|^q \sum_{j=1}^n |u_\bullet^{(m)} - u_\bullet^{(m-1)}| \right) + \\ + D'_7 k_G \sup |\varphi^{(m)} - \varphi^{(m-1)}|,$$

où $D'_1, D'_2, D'_3, D'_4, D'_5, D'_6, D'_7$ sont des constantes positives.

Démonstration. Nous posons respectivement dans la formule (32):

$$(73) \quad M^{(u_0^{(m)})}(P, Q) \\ = 2 \left[\frac{d\Gamma^{(u_0^{(m)})}(P, Q)}{dT_P} + g(P) \Gamma^{(u_0^{(m)})}(P, Q) \right] [\lambda_n^{(u_0^{(m)})}(Y)]^{-1},$$

$$(74) \quad r^{(u_0^{(m)})}(P, Y) \\ = - \left\{ \int \int \int_{\Omega} M^{(u_0^{(m)})}(P, Y) F[Y, u_0^{(m)}(Y), u_1^{(m)}(Y), \dots, u_n^{(m)}(Y)] [\lambda_n^{(u_0^{(m)})}(P)]^{-1} dY + \right. \\ \left. + 2G[P, \bar{u}_0^{(m)}(P)] [\lambda_n^{(u_0^{(m)})}(P)]^{-1} \right\},$$

alors il vient:

$$(75) \quad \varphi^{(m+1)}(P) - \varphi^{(m)}(P) = \int \int_S [M^{(u_0^{(m)})}(P, Q) - M^{(u_0^{(m-1)})}(P, Q)] \varphi^{(m)}(Q) dQ + \\ + \int \int_S M^{(u_0^{(m)})}(P, Q) [\varphi^{(m+1)}(Q) - \varphi^{(m)}(Q)] dQ + [r^{(u_0^{(m)})}(P, Y) - r^{(u_0^{(m-1)})}(P, Y)] .$$

En posant

$$(76) \quad \dot{K}^{(m)}(P) = \int \int_S [M^{(u_0^{(m)})}(P, Q) - M^{(u_0^{(m-1)})}(P, Q)] \varphi^{(m)}(Q) dQ + \\ + [r^{(u_0^{(m)})}(P, Y) - r^{(u_0^{(m-1)})}(P, Y)] ,$$

on a l'équation

$$(77) \quad \varphi^{(m+1)}(P) - \varphi^{(m)}(P) \\ = \int \int_S M^{(u_0^{(m)})}(P, Q) [\varphi^{(m+1)}(Q) - \varphi^{(m)}(Q)] dQ + \dot{K}^{(m)}(P) .$$

Conformément à l'hypothèse VI, l'équation homogène de l'équation (77) n'admet que la solution nulle. L'équation (77) a alors une solution unique:

$$(78) \quad \varphi^{(m+1)}(P) - \varphi^{(m)}(P) = \int \int_S \mathfrak{N}^{(u_0^{(m)})}(P, Q) \dot{K}^{(m)}(Q) dQ + \dot{K}^{(m)}(P) ,$$

où $\mathfrak{N}$ est la somme du noyau résolvant et des noyaux itérés dont le premier satisfait à l'inégalité (23). Nous en déduisons que le noyau $\mathfrak{N}$ vérifie à l'inégalité (23). Pour les bornes des différences entre deux approximations successives des fonctions considérées on obtient, en tenant compte des limitations (8), (10), (23), (35), (61), (65), (67),

$$(79) \quad |M^{(u_0^{(m)})}(P, Q) - M^{(u_0^{(m-1)})}(P, Q)| \\ < \frac{a_3^* C^*}{|PQ|^{n-1-k^*}} \{ \sup |u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}| + H[u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}] \} \quad (a_3^* = \text{const} > 0) ,$$

$$(80) \quad |r^{(u_0^{(m)})}(P, Y) - r^{(u_0^{(m-1)})}(P, Y)| \\ < [b_1' C^*(Rm_F + m_F') + b_2' k_F] \sup |u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}| + \\ + b_3' C^*(Rm_F + m_F') H[u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}] + \\ + b_4' k_F \sup \left(|YQ_F|^a \sum_{\nu=1}^n |u_\nu^{(m)} - u_\nu^{(m-1)}| \right) + \\ + b_5' k_G \sup |\bar{u}_0^{(m)}(P) - \bar{u}_0^{(m-1)}(P)| .$$

$$(81) \quad |\dot{K}^{(m)}(P)| < [b_1' C^*(Rm_F + m_F' + \varrho) + b_2' k_F] \sup |u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}| + \\ + b_3' C^*(Rm_F + m_F' + \varrho) H[u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}] + \\ + b_4' k_F \sup \left(|YQ_F|^a \sum_{\nu=1}^n |u_\nu^{(m)} - u_\nu^{(m-1)}| \right) + \\ + b_5' k_G \sup |\bar{u}_0^{(m)}(P) - \bar{u}_0^{(m-1)}(P)| ,$$

où $b_1', b_2', b_3', b_4', b_5'$ sont des constantes positives.

L'équation (78) avec les inégalités (23), (69'), (81) donnent l'inégalité (72) du lemme 12.

Pour démontrer la convergence des séries (44) nous utilisons les inégalités (68), (70), (71), (72).

Dans ce but, il est nécessaire de démontrer la convergence de la série numérique suivante:

$$(82) \quad \sum_{m=1}^{\infty} S_m,$$

où

$$S_m = \sup |u_0^{(m+1)}(X) - u_0^{(m)}(X)| + H[u_0^{(m+1)}(X) - u_0^{(m)}(X)] + \\ + \sup \left(|XP_X|^q \sum_{\nu=1}^n |u_\nu^{(m+1)}(X) - u_\nu^{(m)}(X)| \right) + \sup |\varphi^{(m+1)}(P) - \varphi^{(m)}(P)|.$$

En tenant compte des inégalités (68), (70), (71), (72) nous démontrons que les constantes positives D_1, D_2, D_3 sont indépendantes des fonctions F et G , et quelles satisfont à l'inégalité

$$(83) \quad S_m < \{[C^*(Rm_F + m'_F + \varrho) + k_F](D_1 + D_2 k_G) + D_3 k_G\} S_{m-1}.$$

L'inégalité

$$(84) \quad [C^*(Rm_F + m'_F + \varrho) + k_F](D_1 + D_2 k_G) + D_3 k_G < 1$$

est réalisée si les constantes k_F, k_G, k_a, k'_a, k_b sont suffisamment petites (C^* est une constante qui dépend de k_a, k'_a, k_b). Il en résulte que les séries (44) et les suites (29) sont uniformément convergentes dans la région $\Omega + S$. En tenant compte des conditions de la formule (43) et des conditions obtenues ci-dessus, nous concluons que les séries (44) et, par suite, les suites (29) existent et sont uniformément convergentes, si les constantes $m_F, m'_F, k_F, m_G, m'_G, k_G, k_a, k'_a, k_b$ sont suffisamment petites. Les suites (29) sont donc convergentes, et on a:

$$(85) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} u_\nu^{(m)}(X) = u_\nu^*(X) \quad (\nu = 0, 1, \dots, n),$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi^{(m)}(P) = \varphi^*(P).$$

Les limites $u_\nu^*(X)$ ($\nu = 0, 1, \dots, n$) et $\varphi^*(P)$ constituent la solution du système des équations (26), (27), (28).

On démontre ensuite, par des moyens déjà connus, que cette solution (85) est unique.

En nous basant sur les propriétés du potentiel généralisé de l'équation elliptique ([1], p. 283) nous avons

$$(86) \quad u_\nu^*(X) = \frac{\partial u_0^*(X)}{\partial x_\nu} \quad (\nu = 1, \dots, n),$$

pour tout point intérieur de $X \in \Omega$.

Nous concluons, de plus, que les fonctions $u_0^*(X)$, $\varphi^*(P)$ sont les solutions du système des équations (24), (25) ([1], p. 283). Conformément à la propriété de la dérivée du potentiel de la charge spatiale pour l'équation elliptique ([4], p. 186), les dérivées (86), données par l'équation (27) en chaque point de la région $\Omega^* \subset \Omega$, satisfont à la condition de Hölder avec un exposant inférieur à l'unité.

Il en résulte que la fonction

$$[\lambda_n^{(u_0)}(X)]^{-1} F[X, u_0^*(X), u_1^*(X), \dots, u_n^*(X)]$$

satisfait aussi à la condition de Hölder en chaque point de la région Ω^* . Cela démontre l'existence (voir [4], p. 190) des autres dérivées de la fonction $u_0^*(X)$ qui satisfait à l'équation (1) en chaque point de la région $X \subset \Omega^*$.

En vertu de la propriété de la dérivée transversale du potentiel de simple couche ([1], théorème 8), la fonction $u_0^*(X)$ satisfait aussi à la condition aux limites (11) en chaque point P de la surface S . Le théorème est ainsi démontré.

Travaux cités

- [1] W. Pogorzelski, *Etude de la solution fondamentale de l'équation elliptique et des problèmes aux limites*, Ann. Polon. Math. 3 (1957), pp. 247-284.
- [2] — *Problème aux limites pour l'équation elliptique dont les coefficients dépendent de la fonction inconnue*, Biul. Wojsk. Akad. Techn. 29 (1957), pp. 43-62.
- [3] — *Równania całkowe i ich zastosowania*, t. I, II, Warszawa 1953, 1958.
- [4] — *Sur quelques propriétés et un problème aux limites pour l'équation elliptique*, Ann. Polon. Math. 11 (1961), pp. 177-197.

Reçu par la Rédaction le 18. 3. 1963