ACTA ARITHMETICA
XV (1969)

# Ternäre und quaternäre quadratische Formen und Quaternionenalgebren

von

M. PETERS (Basel)

**Einleitung.** Die Arbeit untersucht Zusammenhänge zwischen Gittern in metrischen Räumen $R$ über algebraischen Zahlkörpern $K$ und Ordnungen $\mathfrak{o}$ in den zu den Räumen gehörigen 2. Clifford-Algebren $C_2(R)$.

Die metrischen Räume werden durchweg als halbeinfach vorausgesetzt, d.h. es sei $\Delta(R) \neq 0$, wobei $\Delta(R)$ die so definierte Quadratklasse in $K$ ist: $\Delta(R) \underset{2}{=} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} |(\iota_\mu \iota_\nu)|$, wenn $\iota_1, \ldots, \iota_n$ eine Basis von $R$ ist.

Die Clifford-Algebra $C_2(R)$ eines ternären Raumes $R$ ist eine Quaternionenalgebra über dem Grundkörper $K$; für einen quaternären Raum $R$ ist $C_2(R)$ eine Quaternionenalgebra über $K(\sqrt{\Delta})$, wenn $\Delta = \Delta(R) \underset{2}{\neq} 1$, andernfalls eine direkte Summe von zwei isomorphen Quaternionenalgebren über $K$.

Aus diesem Sachverhalt ergeben sich Beziehungen zwischen ternären bzw. quaternären Gittern und Ordnungen in Quaternionenalgebren, deren Untersuchung den Kern (§§ 1, 4, 5) dieser Arbeit bildet. Die Ergebnisse dieser Untersuchung lassen sich in definiten Räumen auf explizite Berechnungen von Klassenzahlen, Maßen und Spuren von Anzahlmatrizen anwenden, wie in §§ 6–9 der Arbeit ausgeführt wird.

Die Terminologie schließt sich an [5] an; die Übertragung der dortigen geometrischen, begrifflich fundierten Sprechweise in die klassische, algebraisch formale Matrizenschreibweise findet sich für den rationalen Zahlkörper $Q$ ausführlich bei P. Fuchs in [20], S. 199 ff. Die vom Üblichen abweichende Geschlechtsdefinition in [5] wird in § 2 untersucht (s. S.336 f.); es zeigen sich keine Abweichungen

a) bei ungerader Dimension von $R$ und

b) bei definiten Räumen gerader Dimension über dem rationalen Zahlkörper $Q$; insbesondere gehören hierzu alle in dieser Arbeit wesentlichen Fälle.

Der Inhalt der einzelnen Paragraphen ist folgender:

In § 1 werden Beziehungen zwischen Klassenzahlen von "Gitterkomplexen" (verallgemeinerten Idealkomplexen, s. Def. S. 333) und Anzahlen von Isomorphietypen von Ordnungen hergestellt, und zwar bei beliebiger Raumdimension nur grobe Ungleichungen, bei Dimension 3 jedoch Gleichungen und bei Dimension 4 enge Schranken, die für ungerade Idealklassenzahl $h_0$ des Grundkörpers zusammenfallen.

Die Anzahl der Geschlechter in einem Idealkomplex wird in § 2 bestimmt: bei ungerader Dimension enthält ein Idealkomplex $h_0$ Geschlechter ($h_0$ ist die Idealklassenzahl des Grundkörpers $K$), und jedes dieser Geschlechter zerfällt in die gleiche Anzahl von Ähnlichkeitsklassen; bei gerader Dimension und Raumdiskriminante $\Delta(R) \underset{2}{=} 1$ und ungeradem $h_0$ ist es ebenso; bei $\Delta(R) \underset{2}{\neq} 1$ läßt sich zwar die Anzahl der Geschlechter im Idealkomplex angeben (Satz 6), über die Klassenzahl der einzelnen Geschlechter läßt sich aber — jedenfalls bei definiten Räumen, die hier vor allem interessieren — wenig aussagen.

In § 3 werden einige Hilfssätze über Quaternionenalgebren vorweggenommen, in §§ 4 und 5 werden die Zusammenhänge ternärer bzw. quaternärer Gitter in $R$ mit den Quaternionenordnungen in $C_2(R)$ untersucht.

In den §§ 3–5 sind viele Schlüsse und Aussagen von lokaler Natur; im Falle der ternären Gitter wird so der begriffliche Hintergrund der Rechnungen in der Theorie von H. Brandt ([1]) deutlicher, und der Gültigkeitsbereich der Aussagen wird größer.

Die Resultate des ternären Falls bestehen

1) darin, daß die zu ternären Gittern gehörigen Ordnungen der Clifford-Algebra gekennzeichnet werden; es sind nämlich genau diejenigen Ordnungen der Quaternionenalgebra, deren Diskriminante gleich ist der Stufe (im Sinne von Hecke, ([12], S. 845)) der Normenform der Ordnung (genauer s. S. 340 f. und Sätze 7 und 8). Dieses Resultat findet sich schon in [18], Kap. I, unsere Behandlung bringt aber starke Vereinfachungen.

2) darin, daß sich auf Grund der Ergebnisse von § 1 Anzahlen von Ähnlichkeitsklassen von Idealkomplexen in $R$ durch Anzahlen von Isomorphietypen von Ordnungen in $C_2(R)$ ausdrücken lassen; speziell ergibt sich, daß die Anzahl der Ähnlichkeitsklassen eines ternären Geschlechts in $R$ mit reduzierter Determinante $2\mathfrak{q}$ bei quadratfreiem $\mathfrak{q}$ gleich ist der Anzahl von Isomorphietypen von Ordnungen des "Grundideals" $\mathfrak{q}$ (Def. s. S. 340) in $C_2(R)$.

Im quaternären Fall in § 5 schränken wir uns auf Räume $R$ mit $\Delta(R) \underset{2}{\neq} 1$ über dem rationalen Zahlkörper $Q$ ein. (Der Fall $\Delta(R) \underset{2}{=} 1$, wo die Clifford-Algebra direkte Summe zweier Quaternionenalgebren ist, verlangt andere Betrachtungen und ist schon vielfach behandelt von H. Brandt ([1]) und von Schülern von v.d. Waerden (s. die Arbeiten von G. Aeberli und H. Gross in [20]).)



In dem von uns behandelten Fall ist $C_2(R)$ Quaternionenalgebra über $Q(\sqrt{\Delta})$; es werden deshalb diejenigen Gitter charakterisiert, deren zugehörige Ordnung die Maximalordnung $I_{\sqrt{\Delta}}$ von $Q(\sqrt{\Delta})$ enthält. Diese Gitter werden "quasiquadratfrei" genannt, weil sich zeigt, daß sie im wesentlichen übereinstimmen mit den Gittern $\mathfrak{J}$ "2.Art" (d.h. die dyadische Erweiterung $\mathfrak{J}_2$ besitzt keine Orthogonalbasis) mit einer reduzierten Determinante, die gleich ist der Körperdiskriminante von $Q(\sqrt{\Delta})$, also bis auf einen möglichen Faktor 4 quadratfrei ist (genauer s. Satz 10). Für diese quasiquadratfreien Gitter 2. Art ist die zugehörige Ordnung der Clifford-Algebra eine Maximalordnung, und es stellt sich bei anisotropem $R$ eine umkehrbar eindeutige Zuordnung der Ähnlichkeitsklassen der Gitter zu Isomorphietypen dieser Maximalordnungen heraus; in genauer Formulierung lautet das Hauptergebnis des § 5: Die Anzahl der eigentlichen Ähnlichkeitsklassen eines Idealkomplexes von quasiquadratfreien Gittern 2. Art ist gleich der Anzahl der Isomorphietypen der Maximalordnungen derjenigen total-definiten Quaternionenalgebra über $Q(\sqrt{\Delta})$, die an allen endlichen Primstellen zerfällt.

Dieser Zusammenhang wird in § 6 für die Berechnung der Klassenzahl von Idealkomplexen verwertet: Die Anzahl der Isomorphietypen der Ordnungen mit quadratfreiem Grundideal für total-definite Quaternionenalgebren über total-reellen Zahlkörpern entnehmen wir [6]; die dortigen Ergebnisse müssen etwas erweitert und in einem Punkt korrigiert werden. Die Berechnung der Typenzahl beruht im wesentlichen auf der Berechnung von Spuren gewisser Anzahlmatrizen, welche in [6] vorgenommen ist; wir benutzen in § 8 die Gelegenheit, die Berechnung der Spuren von Anzahlmatrizen ternärer und quaternärer Idealkomplexe (unter gewissen Einschränkungen) auf die nach [6] bekannte Bestimmung von Spuren von Anzahlmatrizen zu Quaternionenalgebren zurückzuführen; im einzelnen s. § 8. Vorher, in § 7, werden Minkowski–Siegelsche Maße von ternären und quaternären Gittergeschlechtern unter dort aufgeführten Einschränkungen auf Maßberechnungen in Quaternionenalgebren zurückgeführt; letztere Maße lassen sich einfach explizit ausrechnen ([6], § 4).

Am Schluß, in § 9, werden Klassenzahlen und Maße in einigen einfachen Fällen (bei Grundkörper $Q$ und $Q(\sqrt{\Delta})$) explizit ausgerechnet, und zur Illustration werden Tabellen aufgeführt, zu deren Verständnis s. S. 360 ff.

**§ 1. Gitter und Ordnungen.** $R$ sei ein halbeinfacher metrischer Raum über einem algebraischen Zahlkörper $K$, dessen Klassenzahl mit $h_0$

bezeichnet werde. Die Maximalordnung (Hauptordnung) von $K$ sei $I$. Die zu den Primstellen $\mathfrak{p}$ von $K$ gehörigen lokalen Hüllen werden durch Anhängen des Index $\mathfrak{p}$ bezeichnet.

Gitter $\mathfrak{J}$ in $R$ sind endliche $I$-Moduln vom Höchstrang. Invariante einer Gitterisomorphieklasse ist die Norm $n(\mathfrak{J})$. $C_2(R)$ ist die 2. Clifford-Algebra des Raumes $R$. Unter einer Ordnung $\mathfrak{o}$ in $C_2(R)$ wird ein endlicher $I$-Modul vom Höchstrang verstanden, der gleichzeitig Ringstruktur besitzt und das Einselement enthält.

Die Zusammenhänge zwischen Gittern in $R$ und Ordnungen in $C_2(R)$ sind im Fall $\dim R = 2$ weitgehend geklärt, s. [5], § 14. Dort wird ferner für $\dim R \geqslant 3$ gezeigt:

Satz 1. *Es sei ein Gitter $\mathfrak{J}$ in $R$ gegeben; dann bilden alle endlichen Summen von Klammersymbolen*

$$a(\xi_1, \ldots, \xi_{2r}) \quad \textit{mit} \quad \xi_i \in \mathfrak{J}, \quad n(\mathfrak{J})^{-r} \mid a \in K$$

*eine Ordnung $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}(\mathfrak{J})$ in $C_2(R)$. Dabei gilt:*

(a) *Zu ähnlichen Gittern gehören isomorphe Ordnungen:*

$$\mathfrak{J} \sim \mathfrak{J}' \Rightarrow \mathfrak{o}(\mathfrak{J}) \cong \mathfrak{o}(\mathfrak{J}').$$

(b) *Durch die Ordnung ist das Gitter in folgender Weise festgelegt:*

$$\mathfrak{o}(\mathfrak{J}) = \mathfrak{o}(\mathfrak{J}') \Leftrightarrow \mathfrak{J}' = \mathfrak{m}\mathfrak{J} \quad \textit{mit einem Ideal } \mathfrak{m} \textit{ in } K.$$

Eine Ähnlichkeitstransformation (Ähnlichkeit) $\Sigma$ von $R$ (das ist eine lineare Abbildung, bei der sich die quadratische Form mit einem festem skalaren Faktor $n(\Sigma)$ multipliziert) liefert einen Automorphismus $S$ von $C_2(R)$ vermittels

$$(\xi_1, \ldots, \xi_{2r})^S = n(\Sigma)^r (\Sigma^{-1}\xi_1, \ldots, \Sigma^{-1}\xi_{2r}).$$

$\Sigma$ heißt eigentlich, wenn das Zentrum von $C_2(R)$ bei $S$ elementweise fest bleibt. Ein solcher Automorphismus von $C_2(R)$ ist bekanntlich ein innerer; also existiert zu eigentlichem $\Sigma$ ein bis auf einen Faktor aus dem Zentrum eindeutig bestimmtes $T(\Sigma) \in C_2(R)$ mit

$$n(\Sigma)^r (\Sigma^{-1}\xi_1, \ldots, \Sigma^{-1}\xi_{2r}) = T(\Sigma)^{-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{2r}) T(\Sigma). \tag{1}$$

Damit gilt (vergl. [5], § 14).

Satz 2. *Ist $\Sigma$ eine eigentliche Ähnlichkeit und $\mathfrak{J}$ ein Gitter in $R$, so gilt für jedes $\Sigma$ gemäß (1) darstellende Element $T(\Sigma)$ von $C_2(R)$:*

$$\mathfrak{o}(\Sigma\mathfrak{J}) = T(\Sigma)\mathfrak{o}(\mathfrak{J})T(\Sigma)^{-1}.$$

Im folgenden bedeute: $\sim$ eigentliche Ähnlichkeit (bei Gittern oder Räumen),
: $\cong$ innere Isomorphie (bei Ordnungen oder Algebren).



Wo Verwechslung ausgeschlossen, sprechen wir kurz von "ähnlich" bzw. "isomorph" ohne Zusatz.

Es ist jetzt die Aufgabe gestellt, ausgehend von Satz 1 und Satz 2 Anzahlbeziehungen zwischen Ähnlichkeitsklassen eines Idealkomplexes in einem Raum $R$ mit durchweg $\dim R \geqslant 3$ und Isomorphietypen in der Clifford-Algebra herzustellen. Die Überlegungen dieses Paragraphen sind noch so allgemein, daß man statt Idealkomplexe "Gitterkomplexe" zu Grunde legen kann (diese Verallgemeinerung findet Anwendung in § 4):

Definition. Eine Menge $\mathfrak{M}$ von Gittern $\mathfrak{J}$ in $R$, die aus einer endlichen Anzahl $k$ von Ähnlichkeitsklassen besteht und die mit $\mathfrak{J}$ auch $\mathfrak{a}\mathfrak{J}$ enthält für beliebiges Ideal $\mathfrak{a}$ in $K$, heiße *Gitterkomplex* $\mathfrak{M}$. Die Menge

$$\mathfrak{o}(\mathfrak{M}) = \{\mathfrak{o}(\mathfrak{J}) \mid \mathfrak{J} \in \mathfrak{M}\}$$

in $C_2(R)$ heiße der zu $\mathfrak{M}$ gehörige *Ordnungskomplex* $\mathfrak{o}(\mathfrak{M})$.

Satz 3. *Die Anzahl $m$ der Isomorphietypen eines Ordnungskomplexes $\mathfrak{o}(\mathfrak{M})$ ist endlich und steht zur Anzahl $k$ der Ähnlichkeitsklassen des zugrundeliegenden Gitterkomplexes $\mathfrak{M}$ in folgender Beziehung:*

$$k \geqslant h_0 m, \quad \textit{wenn } \dim R \textit{ ungerade}, \tag{2}$$

$$k \geqslant h_0' m, \quad \textit{wenn } \dim R \textit{ gerade}, \tag{3}$$

*wobei $h_0'$ die Anzahl der Idealklassen von $K$ von ungerader Ordnung bezeichnet.*

Beweis. Aus Satz 1 (a) folgt die Endlichkeit von $m$ und die Ungleichung $k \geqslant m$. Aus Satz 1(b) erkennt man, daß die Ungleichung $\left\{\begin{matrix}(2)\\(3)\end{matrix}\right\}$ bewiesen ist, sobald $\mathfrak{a}_i\mathfrak{J}$ für $\left\{\begin{matrix} i = 1, \ldots, h_0 \\ i = 1, \ldots, h_0' \end{matrix}\right\}$ (wobei $\left\{\begin{matrix} \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{h_0} \\ \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{h'_0} \end{matrix}\right\}$ ein Repräsentantensystem der $\left\{\begin{matrix}\text{Idealklassen} \\ \text{Idealklassen von ungerader Ordnung}\end{matrix}\right\}$ von $K$) als paarweise nicht ähnlich nachgewiesen sind. Wir zeigen jeweils:

$$\mathfrak{a}_i\mathfrak{J} \sim \mathfrak{a}_j\mathfrak{J} \Rightarrow i = j.$$

Aus $\mathfrak{a}_i\mathfrak{J} = \Sigma(\mathfrak{a}_j\mathfrak{J})$ folgt durch Normbildung für die Gitter:

$$\mathfrak{a}_i^2 = n(\Sigma)\mathfrak{a}_j^2.$$

1) Wenn $\dim R$ ungerade, so ist nach [5], § 23: $n(\Sigma) = t^2, t \in K$. Daher folgt $\mathfrak{a}_i = t\mathfrak{a}_j$, $t \in K$, also $i = j$.

2) Wenn $\dim R$ gerade, so sind nach obiger Voraussetzung $\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j$ von ungerader Ordnung. Also folgt aus

$$\left(\frac{\mathfrak{a}_i}{\mathfrak{a}_j}\right)^2 = n(\Sigma) \in K \quad \text{wiederum} \quad i = j.$$

Für spätere Anwendung notieren wir das

KOROLLAR. *In den Fällen*

1) $\dim R$ *ungerade*,

2) $\dim R$ *gerade*, $h_0$ *ungerade*

*gilt*:

$$\mathfrak{I} \sim \mathfrak{a}\mathfrak{I} \Rightarrow \mathfrak{a} \textit{ Hauptideal.}$$

ZUSATZ. *In diesen Fällen gilt sogar*:

$$\mathfrak{I}_1 \sim \mathfrak{a}\mathfrak{I}_2 \Rightarrow \mathfrak{a} \textit{ Hauptideal,}$$

*wenn* $n(\mathfrak{I}_1) = n(\Sigma)\, n(\mathfrak{I}_2)$ *für ein* $\Sigma$ *richtig ist.*

Idealverwandte Gitter mit dieser Eigenschaft nennt Eichler ([5], § 19) halbverwandt; es handelt sich um eine Vergröberung des Geschlechtsbegriffs. Diese Bemerkung wird beim Beweis von Satz 5 angewandt.

Für ternäre und quaternäre Gitter findet man auf Grund der besonderen Struktur der Clifford-Algebren auch eine obere Schranke für $k$. Das Ergebnis lautet:

SATZ 4. *Bei Benutzung der Bezeichnungen von Satz 3 gilt*:

1) $k = h_0 m$ *für* $\dim R = 3$,

2) $h_0' m \leqslant k \leqslant h_0 m$ *für* $\dim R = 4$, *insbesondere* $k = h_0 m$ *für ungerades* $h_0$, *bei anisotropem* $R$.

Beweis. In beiden Fällen 1), 2) zeigen wir

LEMMA. *Wenn* $\mathfrak{o}(\mathfrak{I})$ *und* $\mathfrak{o}(\mathfrak{K})$ *isomorph sind bei ternären oder quaternären Gittern* $\mathfrak{I}, \mathfrak{K}$, *so existiert eine Ähnlichkeit* $\Sigma$ *mit*:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{I} = \Sigma\mathfrak{K} \quad \textit{mit einem Ideal } \mathfrak{a} \textit{ in } K.$$

Aus dem Lemma folgt Satz 4 so:

Das Lemma besagt zusammen mit Satz 1:

$$\mathfrak{o}(\mathfrak{I}) \cong \mathfrak{o}(\mathfrak{K}) \Leftrightarrow \mathfrak{a}\mathfrak{I} \sim \mathfrak{K}.$$

Seien $\mathfrak{o}(\mathfrak{I}_j)$ $(j = 1, \ldots, m)$ Repräsentanten der $m$ Typen von $\mathfrak{o}(\mathfrak{M})$ Dann gilt für beliebiges $\mathfrak{K} \in \mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{K} \sim \mathfrak{a}\mathfrak{I}_{j_0} \quad (1 \leqslant j_0 \leqslant m) \quad \text{für gewisses } j_0, \mathfrak{a}.$$

Weiter ist $\mathfrak{a} = t\mathfrak{a}_{i_0}$ $(1 \leqslant i_0 \leqslant h_0)$ für gewisses $i_0$. Demnach ist $\mathfrak{K} \sim \mathfrak{a}_{i_0}\mathfrak{I}_{j_0}$ $(1 \leqslant j_0 \leqslant m;\ 1 \leqslant i_0 \leqslant h_0)$. Also ist $k \leqslant h_0 m$. Aus Satz 3 ergibt sich dann Satz 4.

Beweis des Lemmas: 1) $\dim R = 3$. Die Clifford-Algebra $C_2(R)$ ist eine Quaternionenalgebra $\Phi$. Die Voraussetzung des Lemmas besagt: $\mathfrak{a}(\mathfrak{I}) = \tau \cdot \mathfrak{o}(\mathfrak{K}) \cdot \tau^{-1}$ mit $\tau \in \Phi$.



(4) $\left\{\text{Jedes Quaternion } \tau, \text{ für welches } \tau^{-1} \text{ existiert, stellt nach [5], S. 29 einen eigentlichen Automorphismus A dar, sogar bei beliebigem Grundkörper mit von 2 verschiedener Charakteristik.}\right.$

Also ist $\tau = T(\mathrm{A})$; andererseits ist nach Satz 2:

$$\mathfrak{o}(\mathrm{A}\mathfrak{K}) = T(\mathrm{A})\mathfrak{o}(\mathfrak{K})T(\mathrm{A})^{-1}.$$

Demnach ist $\mathfrak{o}(\mathrm{A}\mathfrak{K}) = \mathfrak{o}(\mathfrak{I})$ und daher nach Satz 1 (b)

$$\mathrm{A}\mathfrak{K} = \mathfrak{a}\mathfrak{I} \quad \text{mit einem Ideal } \mathfrak{a} \text{ in } K.$$

2) $\dim R = 4$. Die Clifford-Algebra $C_2(R)$ ist

$$\Phi = \left\{\begin{array}{lll} \text{Quaternionenalgebra über } K(\sqrt{\Delta}) & \text{für} & \Delta \underset{2}{\neq} 1 \\ \text{direkte Summe zweier Quaternionenalgebren über } K & \text{für} & \Delta \underset{2}{=} 1 \end{array}\right\},$$

wobei $\Delta$ die Diskriminante von $R$ ist.

Das Zentrum von $\Phi$ ist

$$\mathrm{Z} = \left\{\begin{array}{lll} K(\sqrt{\Delta}) & \text{für} & \Delta \underset{2}{\neq} 1 \\ K \oplus K & \text{für} & \Delta \underset{2}{=} 1 \end{array}\right\}.$$

Die Voraussetzung des Lemmas ist:

$$\mathfrak{o}(\mathfrak{I}) = \tau \cdot \mathfrak{o}(\mathfrak{K}) \cdot \tau^{-1} \quad \text{mit} \quad \tau \in \Phi.$$

Mit B wird der Antiautomorphismus der Clifford-Algebra bezeichnet, der durch Umkehrung der Reihenfolge in den Klammersymbolen definiert ist: $(\xi_1, \ldots, \xi_r)^{\mathrm{B}} = (\xi_r, \ldots, \xi_1)$.

Nach [4], S. 24 wird bei $\Delta \underset{2}{=} 1$ durch

$$\tau^{\mathrm{B}}(\xi)\tau = (\eta) = (\Sigma^{-1}\xi) \tag{5}$$

bei regulärem $\tau \in \Phi$ eine eigentliche Ähnlichkeit $\Sigma$ des Raumes $R$ mit Norm $n(\Sigma^{-1}) = N_{Z/K}(\tau\tau^{\mathrm{B}})$ definiert. Die Aussage gilt bei beliebigem Grundkörper $K$ mit $\operatorname{Char} K \neq 2$. Die Überlegungen übertragen sich wörtlich auf den Fall $\Delta \underset{2}{\neq} 1$.

Mit dem durch (5) definierten $\Sigma$ gilt ersichtlich

$$(\Sigma^{-1}\xi_1, \Sigma^{-1}\xi_2) = \tau^{\mathrm{B}}(\xi_1)\tau\tau^{\mathrm{B}}(\xi_2)\tau. \tag{6}$$

Hierbei liegt $\tau\tau^{\mathrm{B}}$ in Z. Wenn man für den Raum $R$ eine Orthogonalbasis $\iota_1, \ldots, \iota_4$ zugrundelegt, so ist $\mathrm{Z} = K(\iota)$ mit $\iota = (\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4)$. Man berechnet $\left\{\begin{matrix} \iota(\xi) = -(\xi)\iota \\ \text{für } \xi \text{ mit } \xi^2 \neq 0 \end{matrix}\right\}$. Daher wird aus (6) unter Beachtung von

$$\tau^{\mathrm{B}} = \tau\tau^{\mathrm{B}}\tau^{-1} \quad (\text{denn } \tau^{\mathrm{B}} = t\tau^{-1},\ t\in \mathrm{Z}),$$

$$\begin{aligned}(\Sigma^{-1}\xi_1, \Sigma^{-1}\xi_2) &= \overline{\tau\tau^{\mathrm{B}}}\tau\tau^{\mathrm{B}}\tau^{-1}(\xi_1, \xi_2)\tau \\ &= n(\Sigma^{-1})\tau^{-1}(\xi_1, \xi_2)\tau,\end{aligned}$$

wobei der Querstrich den Konjugationsautomorphismus in Z bedeutet. Induktion ergibt

$$n(\Sigma)^r(\Sigma^{-1}\xi_1, \ldots, \Sigma^{-1}\xi_{2r}) = \tau^{-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{2r})\tau.$$

Also ist nach (1) $\tau = T(\Sigma)$, und wie unter 1) folgt weiter: $\mathfrak{o}(\mathfrak{J}) = \mathfrak{o}(\Sigma\mathfrak{K})$, also $\mathfrak{a}\mathfrak{J} = \Sigma\mathfrak{K}$ mit einem Ideal $\mathfrak{a}$ in $K$. Damit ist das Lemma bewiesen.

**§ 2. Idealkomplexe und Geschlechter.** Die in § 1 betrachteten Gitterkomplexe seien speziell Idealkomplexe von Gittern: Ein *Idealkomplex* $\mathfrak{M}$ entsteht aus einem beliebigen in ihm enthaltenen Gitter $\mathfrak{J}$ so: $\mathfrak{K}\in\mathfrak{M}$ $\Leftrightarrow \mathfrak{K}_\mathfrak{p} = \Sigma_\mathfrak{p}\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ für alle Primstellen $\mathfrak{p}$ in $K$, wobei $\Sigma_\mathfrak{p}$ eine eigentliche Ähnlichkeit von $R_\mathfrak{p}$ ist, die fast immer Einheit von $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ ist.

Noch spezieller ist der Begriff "Geschlecht": zwei Gitter $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K}$ eines Idealkomplexes gehören demselben *Geschlecht* an (in kürzerer Sprechweise: zwei idealverwandte Gitter sind verwandt), wenn es eine eigentliche Ähnlichkeit $\Sigma$ von $R$ gibt mit: $\mathfrak{K}_\mathfrak{p} = \Sigma \mathrm{T}_\mathfrak{p}\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$, wobei $\mathrm{T}_\mathfrak{p}$ eigentlicher Automorphismus von $R_\mathfrak{p}$ ist. Der so in [5], § 13 definierte Geschlechtsbegriff weicht von dem üblichen ab, vgl. [13], S. 79; üblicherweise wird nämlich noch gefordert, daß $\Sigma$ Automorphismus ist, d.h. $n(\Sigma) = 1$. Der letztere Begriff sei hier zur Unterscheidung "*feines Geschlecht*", unser oben definierter Begriff "*grobes Geschlecht*" genannt. Wir stellen kurz die Zusammenhänge heraus:

Die Gitter eines feinen Geschlechts $\mathfrak{G}_{(\mathrm{fein})}$ haben dieselbe Norm $\mathfrak{n}$, andererseits lassen sich die Ähnlichkeitsklassen des $\mathfrak{G}_{(\mathrm{fein})}$ umfassenden groben Geschlechts $\mathfrak{G}_{(\mathrm{grob})}$ durch Gitter der Norm $\mathfrak{n}$ repräsentieren. Also ist die *Ähnlichkeitsklassenzahl* für $\mathfrak{G}_{(\mathrm{fein})}$ und $\mathfrak{G}_{(\mathrm{grob})}$ dieselbe; jedoch interessiert bei den feinen Geschlechtern vor allem die Anzahl der *Isomorphieklassen*. Die Ähnlichkeitsklassen von $\mathfrak{G}_{(\mathrm{fein})}$ können mehrere Isomorphieklassen enthalten, wenn es Ähnlichkeiten $\Sigma$ mit $n(\Sigma) = e$, $e\neq 1$ Einheit in $K$ gibt; präzise ist es so (vgl. [5], S. 166): Es sei $U$ die Gruppe aller Einheiten von $K$, welche als Normen eigentlicher Ähnlichkeiten von $R$ auftreten können, und $U_\mathfrak{J}$ die Untergruppe von $U$, deren Elemente Normen von Einheiten des Gitters $\mathfrak{J}$ in $R$ sind. Der dann endliche Index $u_\mathfrak{J} = [U\colon U_\mathfrak{J}]$ ist eine Invariante der Ähnlichkeitsklasse von $\mathfrak{J}$. Seien $\mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_g$ Repräsentanten der Ähnlichkeitsklassen von $\mathfrak{G}_{(\mathrm{fein})}$ (und dann auch von $\mathfrak{G}_{(\mathrm{grob})}$) und seien $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_{u_{\mathfrak{J}_i}}$ Ähnlichkeiten, deren Normen alle Nebengruppen von $U_{\mathfrak{J}_i}$ in $U$ vertreten, dann repräsentieren $\Sigma_k\mathfrak{J}_i$ ($k = 1, \ldots, u_{\mathfrak{J}_i}$; $i = 1, \ldots, g$) alle Isomorphieklassen von $\mathfrak{G}_{(\mathrm{fein})}$. Also steht die Anzahl $g$ der Ähnlichkeitsklassen von $\mathfrak{G}$ ("fein" oder "grob") zur Anzahl $j$ der Isomorphieklassen von $\mathfrak{G}_{(\mathrm{fein})}$ in der Beziehung $j = u_{\mathfrak{J}_1} + \ldots + u_{\mathfrak{J}_g}$.

Für a) $\dim R$ ungerade

b) $\dim R$ gerade, $\sigma(R)\neq 0$ (Signatur), Grundkörper $Q$ sind die Gruppenindizes $u_{\mathfrak{J}_i} = 1$, also $j = g$. In den hier fast ausschließlich behandelten Fällen a), b) ist demnach die Anzahl der Isomorphieklassen eines feinen Geschlechts gleich der Anzahl der Ähnlichkeitsklassen des umfassenden groben Geschlechts.

SATZ 5. *Bei ungerader Dimension von $R$ enthält ein Idealkomplex $h_0$ Geschlechter, und jedes dieser Geschlechter zerfällt in die gleiche Anzahl, $g_0$, von Ähnlichkeitsklassen. Für die Anzahl $k$ der Ähnlichkeitsklassen des Idealkomplexes gilt demnach*:

$$k = h_0 g_0.$$

Beweis. $\mathfrak{K}_\mathfrak{p} = \Sigma_\mathfrak{p}\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ impliziert bei ungerader Dimension von $R$, wo die Norm jeder Ähnlichkeit Quadrat ist:

$$\mathfrak{K}_\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_\mathfrak{p}\mathrm{T}_\mathfrak{p}\mathfrak{J}_\mathfrak{p},$$

wobei $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ Ideal in $K_\mathfrak{p}$ (fast immer gleich $I_\mathfrak{p}$) und $\mathrm{T}_\mathfrak{p}$ eigentlicher Automorphismus von $R_\mathfrak{p}$ ist. Weil fast immer $\mathfrak{a}_\mathfrak{p} = I_\mathfrak{p}$, existiert das Ideal $\mathfrak{a} = \bigcap_\mathfrak{p} \mathfrak{a}_\mathfrak{p}$; mit diesem folgt:

$$\mathfrak{K}_\mathfrak{p} = \mathfrak{a}\mathrm{T}_\mathfrak{p}\mathfrak{J}_\mathfrak{p},\ \forall\mathfrak{p}.$$

Mit einem Repräsentantensystem $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{h_0}$ der Idealklassen von $K$ ist $\mathfrak{a} = t\mathfrak{a}_i$, $1\leqslant i\leqslant h_0$, und also:

$$\mathfrak{K}_\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_i\Sigma\mathrm{T}_\mathfrak{p}\mathfrak{J}_\mathfrak{p}, \quad \forall\mathfrak{p}, \quad \text{mit einer Ähnlichkeit } \Sigma.$$

Wenn $\mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_{g_0}$ die Ähnlichkeitsklassen eines Geschlechts $\mathfrak{G}$ repräsentieren, so stellen demnach $\mathfrak{a}_i\mathfrak{J}_j \left\{\begin{matrix} i = 1, \ldots, h_0 \\ j = 1, \ldots, g_0\end{matrix}\right\}$ sicher alle Klassen des Idealkomplexes dar. Nach dem Zusatz zum Korollar von Satz 3 folgt, daß alle $\mathfrak{a}_i\mathfrak{J}_j$ *verschiedene* Klassen darstellen. Die den Beweis abschließende Aussage, daß $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{G}$ für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ in $K$ gleiche Klassenzahl haben, folgt aus Symmetriegründen: die obige Wahl von $\mathfrak{G}$ ist willkürlich, ergibt aber den festen Wert $g_0 = \dfrac{k}{h_0}$.

Bei *gerader Dimension* von $R$ sind die Verhältnisse komplizierter. Hier ist nach [5], Satz 23.6 eine Zahl $s\in K$ genau dann Norm einer Ähnlichkeit von $R$ (und genau dann auch Norm einer eigentlichen Ähnlichkeit, denn in jedem Raum gibt es uneigentliche Automorphismen, und bei gerader Dimension sind diese auch uneigentliche Ähnlichkeiten der Norm 1), wenn

a) $s > 0$ in $K_\infty$ für alle reellen archimedischen Primstellen $\infty$ von $K$, für welche die Signatur $\sigma_\infty(R) \neq 0$,

b) $s$ Norm einer Zahl aus $K(\sqrt{\Delta})$ ist, sofern $\Delta(R) \underset{2}{\neq} 1$.

1) $\Delta(R) \underset{2}{=} 1$. In diesem Fall überlegt man sich analog wie beim Beweis von Satz 5, daß ein Idealkomplex mindestens $h'$ Geschlechter enthält, wobei (mit den Bezeichnungen von Satz 3) $h'_0 \leqslant h' \leqslant h_0$, und daß diese Geschlechter alle dieselbe Klassenzahl $g_0$ haben, daß also gilt: $h'_0 g_0 \leqslant k$. Andererseits überlegt man, daß ein Idealkomplex genau $h_0$ Geschlechter enthält; für ungerades $h_0$ ist demnach $k = h_0 g_0$. Der Beweis wird nicht ausgeführt, weil der Fall $\Delta(R) \underset{2}{=} 1$ im folgenden nur am Rande betrachtet wird.

2) $\Delta(R) \underset{2}{\neq} 1$. Der Übersichtlichkeit halber liege zunächst der rationale Zahlkörper $Q$ zugrunde, und es sei die Signatur $\sigma(R) \neq 0$.

Für die mit $\mathfrak{J}$ idealverwandten Gitter $\mathfrak{K}$ gilt: $\mathfrak{K}_p = \Sigma_p \mathfrak{J}_p$ mit $n(\Sigma_p) = s_p$, wobei $s_p$ Norm aus $Q_p(\sqrt{\Delta})$ ist, etwa $s_p = N(t_p)$ ($t_p$ fast immer Einheit von $Q_p(\sqrt{\Delta})$). Es existiert dann das Ideal $\mathfrak{t} = \bigcap_p t_p$. Genau dann, wenn $\mathfrak{t}$ im engeren Hauptgeschlecht $G^+$ von $Q(\sqrt{\Delta})$ liegt, existiert eine Zahl $\beta$ in $Q(\sqrt{\Delta})$ mit $N(\beta) = N(\mathfrak{t})$ mit $N(\beta) > 0$ (zu den Bezeichnungen vgl. [10], § 26). Genau dann existiert also ein $\Sigma$ mit $n(\Sigma) = N(\beta)$, so daß $\mathfrak{K}_p = \Sigma T_p \mathfrak{J}_p$ mit eigentlichem Automorphismus $T_p$ ist, d.h. so daß $\mathfrak{K}$ im Geschlecht von $\mathfrak{J}$ liegt. Die Anzahl der Geschlechter im Idealkomplex ist demnach gleich der Anzahl $g^+$ der engeren Geschlechter des Körpers $Q(\sqrt{\Delta})$.

Diese $g^+$ Geschlechter haben zwar bei indefiniten Gittern in vielen Fällen (Satz von A. Meyer und Verallgemeinerungen, Einzelheiten s. etwa [16], Chap. X) die gleiche Klassenzahl, bei definiten Gittern ist dies aber im allgemeinen nicht der Fall, wie folgendes Beispiel zeigt:

Die Körperdiskriminante von $Q(\sqrt{6})$ hat 2 verschiedene Primteiler, nach dem Hauptsatz über die Geschlechter ist daher $g^+ = 2$. Nach [19] sind die Repräsentanten der Formenklassen definiter quaternärer quadratischer Formen der Diskriminante 6:

$$\begin{pmatrix}1000\\0100\\0010\\0006\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1000\\0200\\0021\\0012\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1000\\0100\\0020\\0003\end{pmatrix}.$$

Man verifiziert, daß diese drei Formen dieselben Elementarteiler haben, sie liegen also im Sinne von Minkowski ([15]) in derselben Ordnung.



Nach der Formel über die Anzahl der Geschlechter einer Ordnung in [15], S. 78, ergibt sich, daß hier zwei Geschlechter vorliegen. Also sind wegen $g^+ = 2$ die obigen drei Formenklassen idealverwandt, und der Idealkomplex besteht aus zwei Geschlechtern $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ mit Klassenzahlen $g_1 = 2, g_2 = 1$. Dies läßt sich der Tabelle [19] auch unmittelbar entnehmen; auch aus der Tabelle von P. Höfliger in [20] folgt dieses Resultat.

Die Anzahl $g^+$ der engeren Geschlechter von $Q(\sqrt{\Delta})$ hängt mit der Anzahl $g$ der Geschlechter von $Q(\sqrt{\Delta})$ so zusammen (vgl. [10], S. 499):

$$g^+ = wg,$$

wobei

$$w = 1 \quad \text{für} \quad \Delta < 0,$$

und

$$w = \begin{Bmatrix} 1, & \text{wenn } v \in Q(\sqrt{\Delta}) \text{ mit } N(v) = -1 \\ 2, & \text{sonst} \end{Bmatrix} \quad \text{für } \Delta > 0.$$

Wir bilden eine Verallgemeinerung von $w$ in beliebigem Zahlkörper $K$. Man betrachte diejenigen $r$ reellen archimedischen Primstellen $\infty$, für welche die Signatur $\sigma_\infty(R) \neq 0$. Man kann Zahlen in $K$ finden, deren Konjugierte in diesen Primstellen ein gegebenes Vorzeichenverhalten zeigen (vgl. [11], Satz 49); es gibt also $2^r$ nichtleere "Vorzeichengebiete". Diejenigen Teilmengen dieser Gebiete, in denen die Zahlen liegen, die Normen aus $K(\sqrt{\Delta})$ sind, nennen wir "Normgebiete" $L_i$. Die von ihnen gebildete Gruppe $J$ habe die Ordnung $2^s$. $E$ sei die Einheitengruppe von $K$. Ein Normgebiet $L_i$ mit $L_i \cap E \neq \emptyset$ heiße "erreichbar", die Gruppe $M$ der erreichbaren Normgebiete habe die Ordnung $2^t$. Wir setzen:

$$w = [J : M] = 2^{s-t}.$$

Für quadratische Zahlkörper $Q(\sqrt{\Delta})$ ist die Geschlechterzahl $g$ bekanntlich gleich der Anzahl der ambigen Idealklassen. Eine zwanglose Verallgemeinerung des Begriffs der ambigen Idealklassen läßt sich bei relativ-zyklischen, insbesondere also bei quadratischen Erweiterungen von beliebigen Zahlkörpern durchführen. Auch dabei ist die Anzahl der ambigen Idealklassen gleich dem Index der Gruppe der Zahlnormen in der Gruppe der Idealnormen (vgl. [11], S. 158). Damit können wir das Resultat formulieren:

Satz 6. *Bei gerader Dimension von $R$ und $\Delta(R) \underset{2}{\neq} 1$ enthält ein Idealkomplex $wg$ Geschlechter, wobei $w$ soeben definiert wurde und $g$ die Anzahl der ambigen Idealklassen von $K(\sqrt{\Delta})$ ist.*

Beweis. Unter Beachtung unserer obigen Definitionen verläuft der Beweis ebenso wie der oben für den Spezialfall des Grundkörpers $Q$ durchgeführte Beweis.

**§3. Hilfsätze über Quaternionenalgebren.** Wir stellen einige im folgenden benutzte Definitionen und Hilfssätze zusammen.

$\Phi$ sei eine Quaternionenalgebra; Norm und Spur in $\Phi$ werden durch $N$ bzw. Sp bezeichnet. In [6] wird der von Hecke ([12], S. 845) eingeführte Begriff der Stufe einer quadratischen Form auch bei Quaternionenordnungen benutzt, nämlich als die Stufe der Normenform der Ordnung. Bei Quaternionenordnungen über $K(\sqrt{\Delta})$ zu quaternären quadratischen Formen der Diskriminante $\Delta$ fallen jedoch Stufe der quaternären Form und Stufe der zugehörigen Quaternionenordnung (über $K(\sqrt{\Delta})$) i.a. nicht zusammen; deshalb benutzen wir bei Quaternionenordnungen der Deutlichkeit halber einen anderen Ausdruck:

Definition. Das *Grundideal* $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}(\mathfrak{o})$ einer Quaternionenordnung $\mathfrak{o}$ ist $N(\tilde{\mathfrak{o}})^{-1}$; dabei bedeutet $\tilde{\mathfrak{o}}$ das Komplement von $\mathfrak{o}$ und $N(\tilde{\mathfrak{o}})$ den größten gemeinsamen Teiler der Normen der Elemente von $\tilde{\mathfrak{o}}$.

Wir referieren aus [6], §2: Das Grundideal ist ein ganzes $I$-Ideal und gleich dem Produkt der Grundideale der $\mathfrak{p}$-adischen Erweiterungen $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{o}$. Wenn $(\alpha_i)$ eine $I_\mathfrak{p}$-Basis von $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ ist, dann wird $\tilde{\mathfrak{o}}_\mathfrak{p}=(\tilde{\alpha}_i)$ definiert durch:

(1) $$\mathrm{Sp}(\alpha_i\tilde{\alpha}_k)=\delta_{ik} \text{ (Kroneckersymbol).}$$

Die Diskriminante von $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ ist $\mathfrak{D}(\mathfrak{o}_\mathfrak{p}) \doteq |D|I_\mathfrak{p}=|\mathrm{Sp}(\alpha_i\bar{\alpha}_k)|I_\mathfrak{p}$, wobei der Querstrich den Konjugationsantiautomorphismus von $\Phi_\mathfrak{p}$ bedeutet. Die Diskriminante von $\mathfrak{o}$ ist $\mathfrak{D}(\mathfrak{o})=\prod_\mathfrak{p}\mathfrak{D}(\mathfrak{o}_\mathfrak{p})$. $\mathfrak{D}(\mathfrak{o})$ ist stets das Quadrat eines ganzen $I$-Ideals: $\mathfrak{D}(\mathfrak{o})=\mathfrak{d}(\mathfrak{o})^2$. Wir nennen $\mathfrak{d}(\mathfrak{o})$ das *Diskriminantengrundideal* von $\mathfrak{o}$. In gleicher Weise ist das Diskriminantengrundideal

(2) $$\mathfrak{d}_\mathfrak{p}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=d_\mathfrak{p}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)I_\mathfrak{p}$$

einer beliebigen Basis $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ von $\Phi_\mathfrak{p}$ definiert. Die in dieser Festsetzung von $d_\mathfrak{p}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\sqrt{|\mathrm{Sp}(\alpha_i\bar{\alpha}_k)|}$ liegende Unbestimmtheit des Vorzeichens ist unwichtig, da es hier nur auf Teilbarkeitsbeziehungen ankommt.

Bemerkung 1. Nach [6], §2 ist für die obigen lokalen Basen:

$$(\mathrm{Sp}(\tilde{\alpha}_i\bar{\tilde{\alpha}}_k))=(\mathrm{Sp}(\alpha_i\bar{\alpha}_k))^{-1}\doteq D^{-1};$$

das Grundideal $\mathfrak{q}$ ist also das im Teilersinne kleinste Ideal mit der Eigenschaft, daß $\mathfrak{q}D^{-1}$ ganze Elemente und zusätzlich gerade Elemente in der Diagonale hat (kurz: das Multiplikationsschema eines quaternären Gitters $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ mit $n(\mathfrak{J}_\mathfrak{p})=I_\mathfrak{p}$ ist).

Hieraus sieht man: $\mathfrak{q}\,|\,|D|I_\mathfrak{p}=\mathfrak{d}^2$. Also gilt:

Hilfssatz 1. *Mit den obigen Definitionen ist für eine Quaternionenordnung* $\mathfrak{o}$: $\mathfrak{q}(\mathfrak{o})\,|\,\mathfrak{d}(\mathfrak{o})^2$.



Wir entnehmen [6], §2 den

Hilfssatz 2. *Wenn für eine Quaternionenordnung das Grundideal* $\mathfrak{q}(\mathfrak{o})$ *quadratfrei ist, so folgt:*

$$\mathfrak{q}(\mathfrak{o})=\mathfrak{d}(\mathfrak{o}).$$

Bemerkung 2. Man kann die Quaternionenalgebra $\Phi$ als quaternären metrischen Raum $R$ mit $\Delta(R)\underset{2}{=}1$ mit der Metrik $\alpha\cdot\beta=\mathrm{Sp}(\alpha\bar{\beta})$ auffassen. Die Ordnungen $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ sind dann Gitter $\mathfrak{J}(\mathfrak{o}_\mathfrak{p})$ in diesem Raum mit $n(\mathfrak{J}(\mathfrak{o}_\mathfrak{p}))=I_\mathfrak{p}$.

Es werden durchweg folgende Basen zugrunde gelegt:

(3) $$\begin{cases}\mathfrak{o}_\mathfrak{p}=\{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\} \quad \text{mit} \quad \alpha_0=1,\\ \tilde{\mathfrak{o}}_\mathfrak{p}=\{\tilde{\alpha}_0,\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\tilde{\alpha}_3\}.\end{cases}$$

Es ist $\alpha_1\tilde{\alpha}_1\in\tilde{\mathfrak{o}}_\mathfrak{p}$ (s. etwa Definition des Komplements in [3], VI, 5). Also gilt:

$$\alpha_1\tilde{\alpha}_1=\sum_{i=0}^{3}r_i\tilde{\alpha}_i \quad \text{mit} \quad r_i\in I_\mathfrak{p}.$$

Wegen $\mathrm{Sp}(\alpha_1\tilde{\alpha}_1)=\mathrm{Sp}(\tilde{\alpha}_0)=1$, $\mathrm{Sp}(\tilde{\alpha}_i)=0$, $i=1,2,3$ folgt $r_0=1$, daher ist

$$\tilde{\alpha}_0=\alpha_1\tilde{\alpha}_1-\sum_{i=1}^{3}r_i\tilde{\alpha}_i$$

also:

$$\tilde{\mathfrak{o}}_\mathfrak{p}=\mathfrak{o}_\mathfrak{p}\tilde{\alpha}_1+\mathfrak{o}_\mathfrak{p}\tilde{\alpha}_2+\mathfrak{o}_\mathfrak{p}\tilde{\alpha}_3.$$

$\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ hat — als Gitter aufgefaßt gemäß Bemerkung 2 — die Norm $I_\mathfrak{p}$; demnach gilt lokal und dann auch global:

Hilfssatz 3. $\tilde{\mathfrak{o}}$ *hat — als quaternäres Gitter mit der in Bemerkung 2 gegebenen Metrik — dieselbe Norm wie das von den Elementen von* $\tilde{\mathfrak{o}}$ *mit Spur* 0 *aufgespannte ternäre Gitter.*

Bemerkung 3. Die Aussage des Hilfssatzes 3 gilt für das Komplement $\tilde{\mathfrak{o}}$ eines beliebigen ganzzahligen Moduls $\mathfrak{o}$, der das Einselement enthält.

Es wird in §4 eine *kanonische Basis von* $\Phi$ benutzt: eine solche ist

(4) $$1,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3=\gamma_1\gamma_2 \text{ mit } \gamma_1^2=a_1,\ \gamma_2^2=a_2\ (a_1,a_2\in K),\quad \gamma_1\gamma_2=-\gamma_2\gamma_1.$$

Insbesondere ist $\mathrm{Sp}(\gamma_i)=0$, also $\bar{\gamma}_i=-\gamma_i$. Man erkennt die Rechenregeln

(5) $$\mathrm{Sp}(\gamma_i\gamma_j\gamma_k)=\mathrm{Sp}(\gamma_j\gamma_k\gamma_i);\qquad \mathrm{Sp}(\gamma_i\gamma_j\gamma_k)=-\mathrm{Sp}(\gamma_i\gamma_k\gamma_j).$$

Diese Regeln übertragen sich unmittelbar auf beliebige Elemente $\beta_i$ mit $\operatorname{Sp}\beta_i = 0$, insbesondere gilt also:

(6) Die Regeln (5) gelten auch für $\tilde{\alpha}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ statt $\gamma_i$.

**§ 4. Ternäre Gitter.** Durch die folgenden Sätze 7 und 8 werden die Zusammenhänge ternärer Gitter in $R$ mit den Quaternionenordnungen in $C_2(R)$ charakterisiert. Die Resultate finden sich bereits in [18], Kap. I, unsere Behandlung bringt aber starke Vereinfachungen.

Satz 7. *Für ein ternäres Gitter $\mathfrak{J}$ stimmen Diskriminantengrundideal $\mathfrak{d}(\mathfrak{o}(\mathfrak{J}))$ und Grundideal $\mathfrak{q}(\mathfrak{o}(\mathfrak{J}))$ der zugehörigen Ordnung $\mathfrak{o}(\mathfrak{J})$ überein, und beide sind gleich der halben reduzierten Determinante $\mathfrak{d}_{\mathrm{red}}(\mathfrak{J})$ des Gitters:*

$$\mathfrak{q}(\mathfrak{o}(\mathfrak{J})) = \mathfrak{d}(\mathfrak{o}(\mathfrak{J})) = \tfrac{1}{2}\mathfrak{d}_{\mathrm{red}}(\mathfrak{J}).$$

Beweis. Es genügt, den Beweis für die lokalen Komponenten zu führen.

Weil $\mathfrak{d}_{\mathrm{red}}(\mathfrak{J}_\mathfrak{p})$ eine Invariante der Ähnlichkeitsklasse von $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ ist, kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $n(\mathfrak{J}_\mathfrak{p}) = I_\mathfrak{p}$ angenommen werden. $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ habe eine kanonische Basis $\{\iota_1, \iota_2, \iota_3\}$ mit Multiplikationsschema

$$(1) \qquad (\iota_j\iota_k) = \begin{pmatrix} \iota_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \iota_2^2 & \iota_2\iota_3 \\ 0 & \iota_2\iota_3 & \iota_3^2 \end{pmatrix} \doteq (F).$$

Dann ist

$$\mathfrak{d}_{\mathrm{red}}(\mathfrak{J}_\mathfrak{p}) = \iota_1^2\bigl(\iota_2^2\iota_3^2 - (\iota_2\iota_3)^2\bigr)I_\mathfrak{p}.$$

Andererseits ist

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{o}(\mathfrak{J}_\mathfrak{p}))^2 = |\operatorname{Sp}(\alpha_i\bar{\alpha}_k)|\, I_\mathfrak{p} \doteq |D|\, I_\mathfrak{p},$$

wobei

$$\mathfrak{o}(\mathfrak{J}_\mathfrak{p}) = \{\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = (\iota_2, \iota_3),\ \alpha_2 = (\iota_3, \iota_1),\ \alpha_3 = (\iota_1, \iota_2)\}.$$

Also wird

$$(2) \quad |D|\, I_\mathfrak{p} = |\operatorname{Sp}(\alpha_i\bar{\alpha}_k)|\, I_\mathfrak{p} = \left|\begin{pmatrix} 2 & \iota_2\iota_3 & 0 & 0 \\ \iota_2\iota_3 & 2\frac{\iota_2^2}{2}\frac{\iota_3^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\frac{\iota_1^2}{2}\frac{\iota_3^2}{2} & -\frac{\iota_1^2}{2}\iota_2\iota_3 \\ 0 & 0 & -\frac{\iota_1^2}{2}\iota_2\iota_3 & 2\frac{\iota_1^2}{2}\frac{\iota_2^2}{2} \end{pmatrix}\right| I_\mathfrak{p}$$

$$= \frac{\iota_1^2}{2}\bigl(\iota_2^2\iota_3^2 - (\iota_2\iota_3)^2\bigr)I_\mathfrak{p} = \bigl(\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{d}_{\mathrm{red}}(\mathfrak{J}_\mathfrak{p})\bigr)^2,$$



womit die zweite Gleichheit des Satzes gezeigt ist. Zum Beweis der ersten bildet man:

$$(3) \qquad D^{-1}I_\mathfrak{p} = \frac{1}{\mathfrak{d}(\mathfrak{o}(\mathfrak{J}_\mathfrak{p}))}\begin{pmatrix} 2\frac{\iota_1^2}{2}\frac{\iota_2^2}{2}\frac{\iota_3^2}{2} & -\frac{\iota_1^2}{2}\iota_2\iota_3 & 0 & 0 \\ -\frac{\iota_1^2}{2}\iota_2\iota_3 & \iota_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \iota_2^2 & \iota_2\iota_3 \\ 0 & 0 & \iota_2\iota_3 & \iota_3^2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $F$ aus (1) tritt in (3) als Teilmatrix auf, versehen mit dem Nenner $\mathfrak{d}(\mathfrak{o}(\mathfrak{J}_\mathfrak{p}))$; also ist wegen der Annahme $n(\mathfrak{J}_\mathfrak{p}) = I_\mathfrak{p}$ nach Bemerkung 1 des § 3: $\mathfrak{d}(\mathfrak{o}(\mathfrak{J}_\mathfrak{p})) = \mathfrak{q}(\mathfrak{o}(\mathfrak{J}_\mathfrak{p}))$, womit Satz 7 bewiesen ist.

Wir zeigen in Satz 8 die Umkehrung von Satz 7. Es ist jedoch nicht ohne weiteres möglich, die Schlußweise des obigen Beweises umzukehren; das liegt daran, daß beim Übergang von der Ordnung zu ihrer Normenformmatrix (2) Information verlorengeht, die für den Beweis nötig ist. Wir müssen beim Beweis von der Ordnung selbst (bzw. ihrem Komplement) ausgehen; dieses macht weitere Überlegungen notwendig.

Satz 8. *Zu jeder Quaternionenordnung $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{q}(\mathfrak{o}) = \mathfrak{d}(\mathfrak{o})$ existiert ein ternäres Gitter $\mathfrak{J}$ mit $\mathfrak{o}(\mathfrak{J}) \cong \mathfrak{o}$* (vgl. [18], Satz 3.6).

Beweis. a) Globale Überlegungen: Mit der in § 3, Bemerkung 2 angegebenen Metrik bilden die Elemente des Komplements $\tilde{\mathfrak{o}}$ mit Spur 0 ein ternäres Gitter $\mathfrak{J}$:

$$(4) \qquad \mathfrak{J} = \{\alpha \in \tilde{\mathfrak{o}};\ \operatorname{Sp}\alpha = 0\}.$$

Wir behaupten: $\mathfrak{o}(\mathfrak{J}) \cong \mathfrak{o}$. Sei $\Phi$ die zugrundeliegende Quaternionenalgebra und $R$ der von $\mathfrak{J}$ aufgespannte Raum. Wir zeigen zunächst: $C_2(R) \cong \Phi$. Sei eine kanonische Basis von $\Phi$ durch § 3, (4) gegeben, dann hat $R$ eine Basis $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ mit der Metrik $\gamma_i\gamma_j = \operatorname{Sp}(\gamma_i\bar{\gamma}_j)$. Weiter ist

$$C_2(R) = \{1, (\gamma_2, \gamma_3), (\gamma_3, \gamma_1), (\gamma_1, \gamma_2)\}.$$

Die Vorschrift

$$(5) \qquad \varphi\colon (\alpha, \beta) \to \alpha\bar{\beta}$$

und linear auf $C_2(R)$ übertragen, definiert eine Abbildung von $C_2(R)$ auf $\Phi$. $\varphi$ ist ein Algebrenisomorphismus über $K$, denn es gilt:

1) $\varphi$ ist nach Definition additiv und reproduziert die Reduktionsrelation in der Clifford-Algebra:

$$(\alpha, \beta) + (\beta, \alpha) = \alpha\cdot\beta = \operatorname{Sp}(\alpha\bar{\beta}) = \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha}.$$

2) $\varphi$ ist multiplikativ; der Nachweis genügt für die Basiselemente von $C_2(R)$ und werde in einem Fall vorgeführt:

$$\varphi\big((\gamma_2, \gamma_3)(\gamma_3, \gamma_1)\big) = \varphi\left(\frac{\gamma_3^2}{2}(\gamma_2, \gamma_1)\right) = N(\gamma_3)\gamma_2\bar{\gamma}_1 = \gamma_2\bar{\gamma}_3\gamma_3\bar{\gamma}_1$$
$$= \varphi\big((\gamma_2, \gamma_3)\big)\varphi\big((\gamma_3, \gamma_1)\big).$$

3) $\varphi$ ist ersichtlich eine eineindeutige Abbildung.

Also gilt: $C_2(R) \cong \Phi$.

Weil in $\Phi$: $\mathfrak{o} = \bigcap_{\mathfrak{p}} \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ und in $C_2(R)$: $\mathfrak{o}(\mathfrak{J}) = \bigcap_{\mathfrak{p}} \mathfrak{o}(\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}})$, genügt also der Beweis im lokalen Fall: $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \cong \mathfrak{o}(\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}})$.

b) Lokale Überlegungen: Wir behaupten, daß mit dem in (5) definierten (auf $\Phi_{\mathfrak{p}}$ fortgesetzten) $\varphi$ und der $\mathfrak{p}$-adischen Erweiterung $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}$ des in (4) definierten Gitters $\mathfrak{J}$ gilt:

$$\varphi\big(\mathfrak{o}(\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}})\big) = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}.$$

Für das ternäre Gitter $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}$ ist nach Hilfssatz 3 und Bemerkung 1 des § 3: $n(\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{q}(\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}})^{-1}$, nach Voraussetzung des Satzes 8 ist $\mathfrak{q}(\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{d}(\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}})$, also folgt: $n(\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{d}(\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}})^{-1}$. Für $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{p}}$ seien die Basen § 3, (3) angesetzt, und es sei $d_{\mathfrak{p}} = d_{\mathfrak{p}}(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3)$ (s. § 3, (2)); mit diesen Bezeichnungen ist:

$$\mathfrak{o}(\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}) = \{1, d_{\mathfrak{p}}(\tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3), d_{\mathfrak{p}}(\tilde{\alpha}_3, \tilde{\alpha}_1), d_{\mathfrak{p}}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)\}$$

also:

$$\varphi\big(\mathfrak{o}(\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}})\big) = \{1, d_{\mathfrak{p}}\tilde{\alpha}_2\bar{\tilde{\alpha}}_3, d_{\mathfrak{p}}\tilde{\alpha}_3\bar{\tilde{\alpha}}_1, d_{\mathfrak{p}}\tilde{\alpha}_1\bar{\tilde{\alpha}}_2\}.$$

Es werde gesetzt:

$$\alpha_0' = 1, \quad \alpha_1' = d_{\mathfrak{p}}\tilde{\alpha}_2\bar{\tilde{\alpha}}_3, \quad \alpha_2' = d_{\mathfrak{p}}\tilde{\alpha}_3\bar{\tilde{\alpha}}_1, \quad \alpha_3' = d_{\mathfrak{p}}\tilde{\alpha}_1\bar{\tilde{\alpha}}_2.$$

Durch die Definitionsgleichung § 3, (1) wird das Komplement eindeutig festgelegt; demnach ist der Beweis der Gleichung

$$\mathrm{Sp}(\alpha_i'\tilde{\alpha}_k) = \delta_{ik} \tag{6}$$

hinreichend zum Beweis der Behauptung $\varphi\big(\mathfrak{o}(\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}})\big) = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$. Nach § 3, (6) reduziert sich der Nachweis von (6) auf den Beweis von

$$\mathrm{Sp}(\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_3) = -d_{\mathfrak{p}}(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3). \tag{7}$$

Es werde angesetzt: $\tilde{\alpha}_i = \sum_{j=1}^{3} t_{ij}\gamma_j$ $(i = 1, 2, 3)$ mit der kanonischen Basis $\gamma_i$ aus § 3, (4). Daraus folgt:

$$\mathrm{Sp}(\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_3) = \sum_{i,j,k=1}^{3} t_{1i}t_{2j}t_{3k}\mathrm{Sp}(\gamma_i\gamma_j\gamma_k) = |t_{ij}|\,\mathrm{Sp}(\gamma_1\gamma_2\gamma_3), \tag{8}$$



letzteres wegen der Regeln § 3, (5). Andererseits berechnet sich $|t_{ij}|$ als Transformationsdeterminante der Diskriminanten:

$$d_{\mathfrak{p}}(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3) = |t_{ij}'|\, d_{\mathfrak{p}}(1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \tag{9}$$

wobei

$$(t_{ij}') = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\tilde{\alpha}_0)\,. & t_{01} & t_{02} & t_{03} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & . & & \\ 0 & . & (t_{ij}) & \\ 0 & . & & \end{pmatrix}.$$

Wegen $\mathrm{Sp}(\tilde{\alpha}_0) = 1$ ist also:

$$|t_{ij}'| = \tfrac{1}{2}|t_{ij}|. \tag{10}$$

Aus (8), (9), (10) ergibt sich:

$$\mathrm{Sp}(\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_3) = \frac{2d_{\mathfrak{p}}(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3)}{d_{\mathfrak{p}}(1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)}\mathrm{Sp}(\gamma_1\gamma_2\gamma_3). \tag{11}$$

Für die kanonische Basis $\gamma_i$ berechnet sich unmittelbar:

$$\mathrm{Sp}(\gamma_1\gamma_2\gamma_3) = -2N(\gamma_1)N(\gamma_2), \qquad d_{\mathfrak{p}}(1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = 4N(\gamma_1)N(\gamma_2).$$

Demnach hat (11) die den Beweis abschließende Behauptung (7) zur Folge.

Bemerkung. Beim Beweis von Satz 8 wird nur benutzt, daß die Ordnung $\mathfrak{o}$ ein ganzzahliger $I$-Modul mit Einselement ist (s. dazu § 3, Bemerkung 3). Andererseits ist $\mathfrak{o}$ isomorph zu $\mathfrak{o}(\mathfrak{J})$, also eine Ordnung. Daher gilt das merkwürdige

Korollar. *Ein ganzzahliger $I$-Modul $\mathfrak{o}$ mit Einselement und $\mathfrak{q}(\mathfrak{o}) = \mathfrak{d}(\mathfrak{o})$ in einer Quaternionenalgebra ist eine Ordnung.*

Wir betrachten die bekanntlich (vgl. [5], Satz 12.7) endliche Menge der Idealkomplexe von ternären Gittern mit fester reduzierter Determinante $2\mathfrak{q}$ in beliebigen Räumen $R$; ähnliche Räume $R_i$ fassen wir in eine Klasse $H$ zusammen und identifizieren sie. Die Idealkomplexe einer Klasse $H$ bilden einen Gitterkomplex $\mathfrak{N}$ im Sinne des § 1. Die Isomorphietypen des zugehörigen Ordnungskomplexes $\mathfrak{o}(\mathfrak{N})$ bestehen nach den Sätzen 7 und 8 aus allen Typen von Ordnungen $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(\mathfrak{o}) = \mathfrak{d}(\mathfrak{o})$ in $C_2(R)$. Nach Satz 4 gilt daher:

Satz 9. *Für die Anzahl $k$ der Ähnlichkeitsklassen der Menge der in ähnlichen ternären Räumen $R$ liegenden Idealkomplexe der reduzierten Determinante $2\mathfrak{q}$ gilt:*

$$k = h_0 m,$$

*wobei $m$ die Anzahl der Typen von Ordnungen $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(\mathfrak{o}) = \mathfrak{d}(\mathfrak{o})$ in $C_2(R)$ bedeutet.*

Im Spezialfall eines quadratfreien Grundideals $\mathfrak{q}$ existiert genau ein Idealkomplex $\mathfrak{M}$ mit reduzierter Determinante $2\mathfrak{q}$, nämlich der Idealkomplex aller maximalen Gitter mit reduzierter Determinante $2\mathfrak{q}$; wie in [5], Satz 9.3 erkennt man, daß jedes Gitter $\mathfrak{J}$ mit $\mathfrak{d}_{\mathrm{red}}(\mathfrak{J}) = 2\mathfrak{q}$ maximal ist. Andererseits enthält $\mathfrak{M}$ nach Satz 5 $h_0$ Geschlechter mit gleicher Klassenzahl. Weiter gilt nach § 3, Hilfssatz 2 für alle Ordnungen mit quadratfreiem Grundideal $\mathfrak{q}$ bereits $\mathfrak{q}(\mathfrak{o}) = \mathfrak{d}(\mathfrak{o})$. Also folgt durch Spezialisierung von Satz 9 das

KOROLLAR. *Die Anzahl der Ähnlichkeitsklassen eines Geschlechts von ternären Gittern in $R$ mit reduzierter Determinante $2\mathfrak{q}$ bei quadratfreiem $\mathfrak{q}$ ist gleich der Anzahl der Isomorphietypen von Ordnungen mit Grundideal $\mathfrak{q}$ in $C_2(R)$.*

Bemerkung. Zu diesem Spezialfall finden sich explizite Rechnungen in §§ 6 und 9.

**§ 5. Quaternäre Idealkomplexe.** Wir beschränken uns auf quaternäre Räume $R$ mit $\Delta(R) \underset{2}{\neq} 1$ über dem rationalen Zahlkörper $Q$ als Grundkörper. Es wird Nachdruck auf $\Delta \underset{2}{\neq} 1$ gelegt, da quaternäre Formen mit $\Delta \underset{2}{=} 1$ schon vielfach behandelt sind von Brandt ([1]) und von Schülern von v. d. Waerden (s. die Arbeiten von G. Aeberli und H. Gross in [20]).

In unserem Zusammenhang sind diejenigen Gitter $\mathfrak{J}$ von besonderem Interesse, deren zugehörige Ordnungen $\mathfrak{o}(\mathfrak{J})$ Ordnungen der Quaternionenalgebra über $Q(\sqrt{\Delta})$ sind, d.h. die Maximalordnung $I_{(\sqrt{\Delta})}$ von $Q(\sqrt{\Delta})$ enthalten; im Hinblick auf das unten ausgesprochene Kriterium sollen derartige Gitter $\mathfrak{J}$ *quasiquadratfrei* heißen.

In Übereinstimmung mit Brandt ([2], § 1, Nr. 1) wird definiert: Ein Gitter $\mathfrak{J}$ heißt *Gitter* 1. *Art*, wenn die dyadische Erweiterung $\mathfrak{J}_2$ eine Orthogonalbasis besitzt, andernfalls *Gitter* 2. *Art*.

Bemerkung. In der Terminologie von O'Meara ([16], S. 227) ist: Norm von $\mathfrak{J}$ ("norm"): $N(\mathfrak{J}) = \{\text{g.g.T.}\, \iota^2;\ \iota \in \mathfrak{J}\}$, (also doppelt so groß wie die Norm in der Terminologie von Eichler [5]: $N(\mathfrak{J}) = 2n(\mathfrak{J})$). Maßstab von $\mathfrak{J}$ ("scale"): $M(\mathfrak{J}) = \{\text{g.g.T.}\, \iota_i\iota_k;\ \iota_i, \iota_k \in \mathfrak{J}\}$. Hiermit lautet die obige Definition:

$$\mathfrak{J} \text{ Gitter 1. Art} \Leftrightarrow N(\mathfrak{J}) = M(\mathfrak{J}),$$

$$\mathfrak{J} \text{ Gitter 2. Art} \Leftrightarrow N(\mathfrak{J}) = 2M(\mathfrak{J}).$$

Es wird dem Ideal $\mathfrak{d}_{\mathrm{red}}(\mathfrak{J})$ die Zahl $t(\mathfrak{J})$ zugeordnet:

$$t(\mathfrak{J}) = \begin{cases} t' & \text{für} \quad \Delta(R) > 0, \\ -t' & \text{für} \quad \Delta(R) < 0, \end{cases}$$

wobei $t'$ die das Ideal $\mathfrak{d}_{\mathrm{red}}(\mathfrak{J})$ erzeugende natürliche Zahl ist.



Es sei $\Delta$ der quadratfreie Kern von $t(\mathfrak{J})$ und $d$ sei die Diskriminante des **Körpers** $Q(\sqrt{\Delta})$, also

$$d = \begin{cases} \Delta & \text{für} \quad \Delta \equiv 1(4), \\ 4\Delta & \text{für} \quad \Delta \equiv 2, 3(4). \end{cases}$$

Das angekündigte Kriterium lautet:

SATZ 10. *$\mathfrak{J}$ sei ein quaternäres Gitter in $R$ über $Q$ mit $\Delta(R) \underset{2}{\neq} 1$. $\mathfrak{J}$ ist genau dann quasiquadratfrei, wenn mit den soeben erklärten Bezeichnungen gilt:*

1) *$\mathfrak{J}$ ist Gitter* 1. *Art und* $t(\mathfrak{J}) = 4d$; (*dieser Fall kann nur bei* $d = 4\Delta$ *eintreten*).

2) *$\mathfrak{J}$ ist Gitter* 2. *Art und* $t(\mathfrak{J}) = d$.

Beweis. Als Basis von $I_{(\sqrt{\Delta})}$ wird $1$, $\omega$ mit $\omega = (d+\sqrt{d})/2$ genommen. Die Behauptung reduziert sich auf lokale Betrachtungen wegen

$$\omega \in \mathfrak{o}(\mathfrak{J}) \Leftrightarrow \omega \in \mathfrak{o}(\mathfrak{J}_p), \qquad \forall p.$$

a) $p = \infty$: Die den Fall $p = \infty$ ausmachende Vorzeichengleichheit ist durch die Definition von $t(\mathfrak{J})$ hergestellt.

b) $p \neq \infty$: Das Gitter $\mathfrak{J}_p = \{\iota_1, \iota_2, \iota_3\, \iota_4\}$ kann ohne Einschränkung als primitiv vorausgesetzt werden: $n(\mathfrak{J}_p) = Z_p$ (wobei $Z$ der Ring der ganzen rationalen Zahlen ist). Dann hat $\mathfrak{o}(\mathfrak{J}_p)$ die $Z_p$-Basis:

$$\mathfrak{o}(\mathfrak{J}_p) = \{1, (\iota_1, \iota_2), (\iota_1, \iota_3), (\iota_1, \iota_4), (\iota_2, \iota_3), (\iota_2, \iota_4), (\iota_3, \iota_4), (\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4)\}.$$

Die Basis von $\mathfrak{J}_p$ sei kanonisch mit dem Multiplikationsschema

$$(\iota_j\iota_k) = \begin{pmatrix} 2e_1 & e_5 & 0 & 0 \\ e_5 & 2e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2e_3 & e_6 \\ 0 & 0 & e_6 & 2e_4 \end{pmatrix},$$

dann ist $\mathfrak{d}_{\mathrm{red}}(\mathfrak{J}_p) = t(\mathfrak{J}_p)Z_p$ mit

$$(1) \qquad t(\mathfrak{J}_p) = (4e_1e_2 - e_5^2)(4e_3e_4 - e_6^2) = 16e_1e_2e_3e_4 - 4e_1e_2e_6^2 - 4e_3e_4e_5^2 + e_5^2e_6^2.$$

Man setzt:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \eta_p &= \big(2(\iota_1, \iota_2) - e_5\big)\big(2(\iota_3, \iota_4) - e_6\big) \\ &= 4(\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4) - 2e_5(\iota_3, \iota_4) - 2e_6(\iota_1, \iota_2) + e_5e_6 \end{aligned}$$

und berechnet $\eta_p^2 = t(\mathfrak{J}_p)$. Daher ist im Fall 2) des Satzes:

$$\omega Z_p = \frac{t(\mathfrak{J}_p) \pm \eta_p}{2} Z_p$$

und aus den Darstellungen (1) und (2) erkennt man wegen $e_5^2 e_6^2 + e_5 e_6 = e_5 e_6 (1 + e_5 e_6)$ gerade: $\omega \in \mathfrak{o}(\mathfrak{I}_p)$. Daß die so als hinreichend erwiesene Bedingung $t(\mathfrak{I}_p) = d_p$ für Gitter 2. Art $\mathfrak{I}$ auch notwendig ist, setzen wiederum die expliziten Formeln (1) und (2) in Evidenz. Im Fall 1) des Satzes ist $e_5 = e_6 = 0$, daher also

$$t(\mathfrak{I}_p) \equiv 0\,(16) \quad \text{und} \quad \sqrt{\Delta} Z_p = \frac{\eta_p}{4} Z_p \in \mathfrak{o}(\mathfrak{I}_p).$$

Die Behauptung folgt wie im Fall 2).

Die mit einem quasiquadratfreien Gitter idealverwandten Gitter sind ebenfalls quasiquadratfrei; nur solche quasiquadratfreien Idealkomplexe werden von jetzt an betrachtet. Die zugehörigen Ordnungskomplexe bestehen aus Ordnungen einer Quaternionenalgebra über einem quadratischen Zahlkörper; sie werden im folgenden näher gekennzeichnet.

Die Clifford-Algebra $C_2(R)$ ist eine Quaternionenalgebra $\Phi$ über dem Zentrum $Q(\sqrt{\Delta})$. $\Phi_p$ hat das Zentrum:

$$Q_p(\sqrt{\Delta}) = \begin{cases} Q_p \oplus Q_p & \text{für} \quad \Delta_2 \underset{2}{=} 1 \text{ in } Q_p \text{ (d.h. } (\Delta/p) = +1), \\ \text{quadratische Erweiterung von } Q_p & \text{für} \quad \Delta \underset{2}{\neq} 1 \text{ in } Q_p \\ & \text{(d.h. für } (\Delta/p) = 0, -1). \end{cases}$$

Bei Beachtung des Zerlegungsgesetzes der Primzahlen in $Q$ erkennt man:

$$\Phi_p \cong \begin{cases} \Phi_{\mathfrak{p}_1} \oplus \Phi_{\mathfrak{p}_2} \\ \\ \Phi_{\mathfrak{p}} \end{cases} \text{für} \quad \left(\frac{\Delta}{p}\right) = \begin{cases} +1 \\ \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases} \end{cases} \text{wenn} \quad p = \begin{cases} \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \\ \mathfrak{p}^2 \\ \mathfrak{p}. \end{cases}$$

Daher gilt für quasiquadratfreie Gitter $\mathfrak{I}$

$$\mathfrak{o}(\mathfrak{I}_p) = \mathfrak{o}(\mathfrak{I})_p = \begin{cases} \mathfrak{o}(\mathfrak{I})_{\mathfrak{p}_1} \oplus \mathfrak{o}(\mathfrak{I})_{\mathfrak{p}_2} \\ \mathfrak{o}(\mathfrak{I})_{\mathfrak{p}} \end{cases} \text{für} \quad \left(\frac{\Delta}{p}\right) = \begin{cases} +1 \\ 0, -1. \end{cases}$$

Die zu idealverwandten quasiquadratfreien Gittern $\mathfrak{I}$ gehörigen Ordnungen $\mathfrak{o}(\mathfrak{I})$ haben alle dasselbe Grundideal $\mathfrak{q}(\mathfrak{o}(\mathfrak{I}))$ in $C_2(R)$ über $Q(\sqrt{\Delta})$, denn die Gitter sind lokal ähnlich, die zugehörigen Ordnungen sind demnach lokal isomorph, haben also dasselbe lokale Grundideal. Zur *expliziten Berechnung von* $\mathfrak{q}(\mathfrak{o}(\mathfrak{I}))$ können wir also ohne Einschränkung ein Gitter mit $n(\mathfrak{I}) = Z$ zugrundelegen. Wir unterscheiden die Fälle:

I) $\begin{Bmatrix} p \neq 2 \\ p = 2 \text{ für Gitter 1. Art} \end{Bmatrix}$. In diesen Fällen existiert eine



Orthogonalbasis $\{\iota_j\}$ von $\mathfrak{I}_p$ mit Multiplikationsschema

$$(\iota_j \iota_k) = \begin{pmatrix} 2e_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2e_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p^c e_4 \end{pmatrix}$$

mit $c = 0$ oder $1$, $e_i$ Einheiten von $Z_p$.

Wenn $\iota = (\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4)$ gesetzt wird, so ist einerseits $\iota^2 = \Delta$ und andererseits:

$$\iota(\iota_2, \iota_3) = -e_2 e_3 (\iota_1, \iota_4), \quad \iota(\iota_3, \iota_1) = -e_3 e_1 (\iota_2, \iota_4), \quad \iota(\iota_1, \iota_2) = -e_1 e_2 (\iota_3, \iota_4).$$

Also ist $\{1, (\iota_2, \iota_3), (\iota_3, \iota_1), (\iota_1, \iota_2)\}$ eine Basis von $\mathfrak{o}(\mathfrak{I}_p)$ über dem Zentrum $\{1, \iota\}$ (der Fall $\Delta \equiv 1\,(4)$ kann nach Satz 10, 1) nicht eintreten). Gemäß § 4, (2) berechnet sich:

$$\mathfrak{q}(\mathfrak{o}(\mathfrak{I}_p)) = \begin{Bmatrix} Z_p & \text{für} & p \neq 2 \\ 4Z_2 & \text{für} & p = 2 \end{Bmatrix}.$$

II) $p = 2$ für Gitter 2. Art: Hier wird zunächst das Diskriminantengrundideal $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}(\mathfrak{o}(\mathfrak{I}_2))$ berechnet. Eine Basis über dem Zentrum ist hier nicht ohne weiteres zur Hand. Wenn man statt einer Basis mit drei beliebigen Elementen $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3 \in \mathfrak{I}_2$ bildet:

$$\mathfrak{d}^* = \mathfrak{d}_2(1, (\varkappa_2, \varkappa_3), (\varkappa_3, \varkappa_1), (\varkappa_1, \varkappa_2)),$$

so erhält man ein Vielfaches $\mathfrak{d}^*$ von $\mathfrak{d}$ (vgl. Definition in § 3, (2)). In diesem Fall 2) des Satzes 10, wo $t(\mathfrak{I}) = d$, existieren — wie eine kleine Diskussion zeigt — $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3 \in \mathfrak{I}_2$ mit

$$(\varkappa_i \varkappa_j) = \begin{pmatrix} \varkappa_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \varkappa_2^2 & \varkappa_2 \varkappa_3 \\ 0 & \varkappa_2 \varkappa_3 & \varkappa_3^2 \end{pmatrix},$$

wobei $\varkappa_1^2/2, \varkappa_2 \varkappa_3 \neq 0$ Einheiten in $Z_2$ sind. Es folgt gemäß § 4, (2):

$$\mathfrak{d} \mid \mathfrak{d}^* = \frac{\varkappa_1^2}{2} (\varkappa_2^2 \varkappa_3^2 - (\varkappa_2 \varkappa_3)^2) \cdot Z_2 = Z_2,$$

also $\mathfrak{d}(\mathfrak{o}(\mathfrak{I}_2)) = Z_2$. Aus § 3, Hilfssatz 1 folgt weiter: $\mathfrak{q}(\mathfrak{o}(\mathfrak{I}_2)) = Z_2$. Insgesamt gilt damit:

Satz 11. *Für quasiquadratfreie Gitter $\mathfrak{I}$ eines quaternären Raumes $R$ mit $\Delta(R) \underset{2}{\neq} 1$ über $Q$ gilt: Das Grundideal $\mathfrak{q}(\mathfrak{o}(\mathfrak{I}))$ der zugehörigen Ordnung ist gleich*

$$\begin{Bmatrix} (4) \\ (1) \end{Bmatrix} \textit{ für Gitter } \begin{Bmatrix} 1. \textit{ Art} \\ 2. \textit{ Art} \end{Bmatrix}.$$

Im folgenden werden *nur Gitter* 2. *Art* behandelt, weil die angewandte Schlußweise nur für quadratfreies Grundideal richtig ist. In diesem Fall läßt sich zeigen:

Satz 12. *Es liege ein anisotroper Raum* $R$ *über* $Q$ *mit* $\dim R = 4$ *und* $\Delta(R) \underset{2}{\neq} 1$ *zugrunde. Dann ist die Anzahl* $k$ *der Ähnlichkeitsklassen eines Idealkomplexes* $\mathfrak{M}$ *von quasiquadratfreien Gittern* 2. *Art gleich der Anzahl* $m$ *der Isomorphietypen von Ordnungen des Grundideals* 1 *über dem Körper* $Q(\sqrt{\Delta})$.

Beweis. Nach Satz 11 und § 1, Satz 4 ist nur noch zu zeigen, daß die Ordnungen $\mathfrak{o}(\mathfrak{J})$ zu Gittern $\mathfrak{J} \in \mathfrak{M}$ *sämtliche* Typen des Grundideals 1 erfassen.

Nach [6], Satz 4 bilden die Ideale einer Quaternionenalgebra, deren Links- oder Rechtsordnung ein festes quadratfreies Grundideal $\mathfrak{q}$ haben, ein Gruppoid. Wenn also $\mathfrak{o}(\mathfrak{J})$ Einheit dieses Gruppoids ist, so existiert bekanntlich zu jeder weiteren Einheit, also zu jeder Ordnung $\mathfrak{o}'$ vom Grundideal $\mathfrak{q}$ ein Ideal, das $\mathfrak{o}(\mathfrak{J})$ als Linksordnung und $\mathfrak{o}'$ als Rechtsordnung hat, so daß also für die lokalen Komponenten gilt:

$$a_{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{o}(\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}})\,a_{\mathfrak{p}}^{-1} = \mathfrak{o}'_{\mathfrak{p}} \quad \text{mit} \quad a_{\mathfrak{p}} \in \Phi_{\mathfrak{p}},$$

wobei $a_{\mathfrak{p}}$ fast immer Einheit von $\mathfrak{o}(\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}})$ ist.

Die Anwendung auf den vorliegenden Fall mit $\mathfrak{q} = 1$ ergibt unter Benutzung von § 1, (5) und den weiteren Ausführungen auf S. 335: Es existiert eine Ähnlichkeit $\Sigma_p$ (welche fast immer Einheit von $\mathfrak{J}_p$ ist) mit

$$T(\Sigma_p)\,\mathfrak{o}(\mathfrak{J}_p)\,T(\Sigma_p)^{-1} = \mathfrak{o}'_p = \mathfrak{o}(\Sigma_p \mathfrak{J}_p).$$

Man setzt $\mathfrak{K}_p = \Sigma_p \mathfrak{J}_p$; dann existiert das Gitter $\mathfrak{K} = \bigcap_p \mathfrak{K}_p$, und es gilt $\mathfrak{o}(\mathfrak{K}) = \mathfrak{o}'$. Damit ist Satz 12 bewiesen.

Korollar. *Zu jeder Quaternionenordnung* $\mathfrak{o}$ *vom Grundideal* 1 *über einem reell-quadratischen Zahlkörper* $Q(\sqrt{\Delta})$ *existiert ein definites quaternäres Gitter* $\mathfrak{J}$ *über dem Grundkörper* $Q$ *mit* $\mathfrak{o}(\mathfrak{J}) = \mathfrak{o}$.

Beweis. Es ist nur noch zu zeigen, daß es zu jeder als Diskriminante eines reell-quadratischen Zahlkörpers auftretenden Zahl $d$ tatsächlich Gitter $\mathfrak{J}$ mit $t(\mathfrak{J}) = d$ in einem definiten quaternären Raum gibt. Dies ist bereits von O. Weber bewiesen (s. [20], S. 99). Für diesen Satz sei hier ein einfacherer Beweis skizziert (bezüglich der benutzten Theorie (und Bezeichnungen) der $Q$-Räume und der Kennzeichnung der Raumtypen sei auf [5], §§ 2, 22, 23 verwiesen).

Sei $p_0 \nmid 2$, $d$ und sei $Q'$ ein $Q$-Raum, der in $p_0$ und $\infty$ verzweigt ist, und sei $D_d \sim \{x_1^2 - d x_2^2\}$, wobei $\sim$ kerngleich bedeute. Dann existiert ein Raum $R$ mit

$$R \oplus \{1, -1\} \sim Q' \oplus D_d.$$



(Hierbei bedeute $\{1, -1\} = \{x_1^2 - x_2^2\}$ den der Form $x_1^2 - x_2^2$ zugeordneten Raum.)

Es ist dann $\dim R = 4$, $\Delta(R) \underset{2}{=} d$ und $R$ ist definit. Für alle Primzahlen $p \neq p_0$ ist $R_p$ einem binären Raum kerngleich. Ein maximales Gitter in $R_p$ hat als reduzierte Determinante die kleinste ganze Zahl $d'_p$ in der Quadratklasse von $\Delta_p$, welche $\equiv 0, 1\,(4)$ ist. Jedes $p^2$-fache von $d'_p$ kommt ebenfalls als reduzierte Determinante eines Gitters vor. Daraus folgt, daß es zu jedem natürlichen $d \equiv 0, 1\,(4)$ $(d \neq 1)$ eine definite quaternäre Form mit dieser Diskriminante gibt, also gilt die Behauptung.

**§ 6. Typenzahlen von Quaternionenalgebren.** Für den übrigen Teil der Arbeit werden jetzt die folgenden Voraussetzungen gemacht:

I) Der Grundkörper $K$ sei ein total-reeller algebraischer Zahlkörper, d.h. $K_\infty$ sei der reelle Zahlkörper für alle unendlichen Primstellen $\infty$.

II) Der Raum $R_\infty$ sei anisotrop für alle unendlichen Primstellen $\infty$ (d.h. die zugehörige quadratische Form sei total-definit).

Für einen ternären Raum $R$ mit Orthogonalbasis $\{\iota_1, \iota_2, \iota_3\}$ ist dann in jeder (reellen) archimedischen Hülle $K_\infty$:

$$(\iota_1, \iota_2)^2 = -\frac{\iota_1^2}{2}\frac{\iota_2^2}{2} \doteq a < 0,$$

$$(\iota_2, \iota_3)^2 = -\frac{\iota_2^2}{2}\frac{\iota_3^2}{2} \doteq b < 0.$$

Also ist die Normenform $\xi_0^2 - a\xi_1^2 - b\xi_2^2 + ab\xi_3^2$ total-definit; daher ist $C_2(R)$ eine total-definite Quaternionenalgebra.

Für einen quaternären Raum $R$ mit Orthogonalbasis $\{\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4\}$ hat die Clifford-Algebra folgende Struktur:

$$C_2(R) = \{1, (\iota_1, \iota_2), (\iota_2, \iota_3), (\iota_3, \iota_1)\} \otimes \{1, (\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4)\}.$$

Für $\Delta(R) \underset{2}{\neq} 1$ ist $(\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4) = \sqrt{\Delta(R)}$ wegen I) und II)) total-reell.

Wir fassen die Resultate zusammen:

Satz 13. *Für einen total-reellen Grundkörper* $K$ *und total-anisotrope Räume* $R$ *mit* $\begin{Bmatrix} \dim R = 3 \\ \dim R = 4,\ \Delta(R) \underset{2}{\neq} 1 \end{Bmatrix}$ *ist* $C_2(R)$ *eine total-definite Quaternionenalgebra über dem total-reellen Zahlkörper* $\begin{Bmatrix} K \\ K(\sqrt{\Delta}) \end{Bmatrix}$.

Für total-definite Quaternionenalgebren über einem total-reellen Zahlkörper läßt sich die Anzahl der Isomorphietypen von Ordnungen mit quadratfreiem Grundideal angeben. Die in [6], Satz 11 angeführte Formel bedarf jedoch einer Modifikation a) für nicht-maximale Ordnungen und b) für Klassenzahl des Grundkörpers $h_0 > 1$.

Wir übernehmen bzw. modifizieren die Bezeichnungen von [6]. $\mathfrak{o}_1, \ldots, \mathfrak{o}_T$ sei ein Repräsentantensystem der $T$ Isomorphietypen von Ordnungen des quadratfreien Grundideals $\mathfrak{q}$. $H_i$ sei die Anzahl der Klassen ambiger $\mathfrak{o}_i$-Ideale. $\pi_{ii}(\mathfrak{t})$ sei die Anzahl der ganzen $\mathfrak{o}_i$-Links-Hauptideale der Norm $\mathfrak{t}$. $\pi_{ii}^*(\mathfrak{t})$ sei die Anzahl der ganzen *ambigen* $\mathfrak{o}_i$-Hauptideale der Norm $\mathfrak{t}$. Die Spur der in [6], § 5 definierten Anzahlmatrix $P(\mathfrak{t})$ zur Norm $\mathfrak{t}$ ist:

$$\operatorname{Sp} P(\mathfrak{t}) = \sum_{i=1}^{T} H_i \pi_{ii}(\mathfrak{t}).$$

Wir brauchen hier modifizierte Anzahlmatrizen $P^*$, die aus den Anzahlmatrizen $P$ durch Beschränkung auf ambige Ideale hervorgehen; von ihnen interessiert hier nur die Spur:

$$\operatorname{Sp} P^*(\mathfrak{t}) = \sum_{i=1}^{T} H_i \pi_{ii}^*(\mathfrak{t}).$$

Die Anzahl der ganzen ambigen $\mathfrak{o}_i$-Ideale, deren Normen in $\mathfrak{q}$ aufgehen, ist $2^{\varkappa}$, wobei $\varkappa$ die Primteileranzahl von $\mathfrak{q}$ ist (s. [6], § 4). Die Hauptideale darunter haben die Anzahl $\sum_{\mathfrak{t}|\mathfrak{q}} \pi_{ii}^*(\mathfrak{t})$. Für Klassenzahl $h_0 = 1$ folgt demnach:

$$H_i = \frac{2^{\varkappa}}{\sum_{\mathfrak{t}|\mathfrak{q}} \pi_{ii}^*(\mathfrak{t})}.$$

Für $h_0 > 1$ müssen wir statt der obigen $2^{\varkappa}$ Ideale deren Produkte mit einem Repräsentantensystem $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{h_0}$ der Idealklassen von $K$ zugrunde legen (welche wir ohne Einschränkung als ganz und primitiv annehmen), denn jedes ambige $\mathfrak{o}_i$-Ideal läßt sich als Produkt eines ganzen ambigen $\mathfrak{o}_i$-Ideals, dessen Norm in $\mathfrak{q}$ aufgeht, und eines Ideals in $K$ schreiben. Die Anzahl der Hauptideale unter diesen $h_0 \cdot 2^{\varkappa}$ Idealen ist $\sum_{k=1}^{h_0} \sum_{\mathfrak{t}|\mathfrak{q}} \pi_{ii}^*(\mathfrak{t}\mathfrak{a}_k^2)$. Demnach ist

$$H_i = \frac{h_0 \cdot 2^{\varkappa}}{\sum_{k=1}^{h_0} \sum_{\mathfrak{t}|\mathfrak{q}} \pi_{ii}^*(\mathfrak{t}\mathfrak{a}_k^2)}.$$

Wir können daher schließen:

$$\sum_{k=1}^{h_0} \sum_{\mathfrak{t}|\mathfrak{q}} \operatorname{Sp} P^*(\mathfrak{t}\mathfrak{a}_k^2) = \sum_{k=1}^{h_0} \sum_{\mathfrak{t}|\mathfrak{q}} \sum_{i=1}^{T} H_i \pi_{ii}^*(\mathfrak{t}\mathfrak{a}_k^2)$$
$$= \sum_{i=1}^{T} \sum_{k=1}^{h_0} \sum_{\mathfrak{t}|\mathfrak{q}} \frac{h_0 \cdot 2^{\varkappa}}{\sum_{k'=1}^{h_0} \sum_{\mathfrak{t}'|\mathfrak{q}} \pi_{ii}^*(\mathfrak{t}'\mathfrak{a}_{k'}^2)} \pi_{ii}^*(\mathfrak{t}\mathfrak{a}_k^2) = T \cdot h_0 \cdot 2^{\varkappa}.$$

Daraus folgt:



Satz 14. *In einer total-definiten Quaternionenalgebra $\Phi$ über einem total-reellen Zahlkörper, dessen Idealklassen durch die ganzen primitiven Ideale $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{h_0}$ repräsentiert seien, ist die Anzahl $T^{\mathfrak{q}}(\Phi)$ der Isomorphietypen von Ordnungen des quadratfreien Grundideals $\mathfrak{q}$:*

$$T^{\mathfrak{q}}(\Phi) = \frac{\sum_{k=1}^{h_0} \sum_{\mathfrak{t}|\mathfrak{q}} \operatorname{Sp} P^*(\mathfrak{t}\mathfrak{a}_k^2)}{h_0 \cdot 2^{\varkappa}}$$

*wobei $\varkappa$ die Primteileranzahl von $\mathfrak{q}$ ist und die Spuren der modifizierten Anzahlmatrizen $\operatorname{Sp} P^*$ soeben definiert wurden.*

Es bleibt die Aufgabe, $\operatorname{Sp} P^*$ zu berechnen. Zunächst werde das Ergebnis der Berechnung von $\operatorname{Sp} P$ aus [6] referiert:

Für eine Ordnung $\mathfrak{O}$ des Körpers $K(\sqrt{v})$ und ein Primideal $\mathfrak{p}$ in $K$ bedeute

$$\left\{\frac{\mathfrak{O}}{\mathfrak{p}}\right\} = \begin{cases} \left(\dfrac{K(\sqrt{v})}{\mathfrak{p}}\right), & \text{falls } \mathfrak{p} \text{ zum Führer von } \mathfrak{O} \text{ prim} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $\left(\dfrac{K(\sqrt{v})}{\mathfrak{p}}\right)$ das Artinsymbol ist.

Die Einheiten $e_1, \ldots, e_r$ seien ein minimales Vertretersystem der "Quadratklassen" von Einheiten von $K$, d.h. jede Einheit $e$ kann in der Form $e = e'^2 e_i$ mit einer weiteren Einheit $e'$ und passendem $e_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ geschrieben werden. Wenn $\mathfrak{n}$ kein Hauptideal ist, wird $\operatorname{Sp} P(\mathfrak{n}) = 0$. Sei also $\mathfrak{n} = In_0$. Dann bilde man erstens alle Produkte $n = n_0 e_i$ mit den soeben erklärten Einheiten $e_i$, zweitens alle $s \in I$ derart, daß für alle unendlichen Primstellen $\infty$: $s^2 < 4n$ in $K_\infty$ ist, drittens alle Ordnungen $\mathfrak{O} \supseteq I[x]$, $x^2 - sx + n = 0$. Bezeichnen nun $h(\mathfrak{O})$ und $w(\mathfrak{O})$ die Anzahl der Idealklassen von $\mathfrak{O}$ und den Index der Einheitengruppe von $I$ in der von $\mathfrak{O}$, so ist

$$\operatorname{Sp} P(\mathfrak{n}) = (M) + \frac{1}{2} \sum_{i,s,\mathfrak{O}} \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{q}_1} \left(1 - \left\{\frac{\mathfrak{O}}{\mathfrak{p}}\right\}\right) \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{q}_2} \left(1 + \left\{\frac{\mathfrak{O}}{\mathfrak{p}}\right\}\right) \frac{h(\mathfrak{O})}{w(\mathfrak{O})} \tag{1}$$

wobei $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ und $\mathfrak{q}_1$ die Grundzahl der Quaternionenalgebra $\Phi$ (d.h. das Produkt aller $\mathfrak{p}$, für die $\Phi_{\mathfrak{p}}$ nullteilerfrei ist) und $(M)$ gleich dem Maß $M$ oder 0, je nachdem ob $\mathfrak{n}$ das Quadrat eines Hauptideals ist oder nicht; dabei ist

$$M = \frac{2h_0 \zeta_0(2) D_0^{3/2}}{(2\pi)^{2n}} \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{q}_1} (N(\mathfrak{p}) - 1) \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{q}_2} (N(\mathfrak{p}) + 1). \tag{2}$$

Hierin bedeutet $n$ den Grad, $h_0$ die Klassenzahl, $\zeta_0(s)$ die Zetafunktion und $D_0$ die Diskriminante von $K$.

Zur Berechnung von $\operatorname{Sp} P^*$ müssen wir eine in diesem Zusammenhang geeignete Kennzeichnung der ambigen Ideale finden. Wir behaupten, daß diese Kennzeichnung im Fall $\mathfrak{n}\,|\,\mathfrak{q}$ bereits durch die Bedingung

$$s \equiv 0\,(\mathfrak{n}) \tag{3}$$

geliefert wird. Die gesuchte Lösung wird dann durch Formel (1) unter Hinzunahme der Bedingung (3) bei der Summation angegeben.

Satz 15. *Für Teiler* $\mathfrak{n}$ *des quadratfreien Grundideals* $\mathfrak{q}$ *ist*

$$\operatorname{Sp} P^*(\mathfrak{n}) = (M) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,s,\mathfrak{O}\\ s\equiv 0(\mathfrak{n})}} \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{q}_1} \left(1 - \left\{\frac{\mathfrak{O}}{\mathfrak{p}}\right\}\right) \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{q}_2} \left(1 + \left\{\frac{\mathfrak{O}}{\mathfrak{p}}\right\}\right) \frac{h(\mathfrak{O})}{w(\mathfrak{O})}$$

*mit den soeben bei* (1) *und* (2) *erklärten Bezeichnungen.*

Beweis. Wir brauchen nur das in (3) ausgesprochene Kriterium für ambige Ideale zu zeigen.

Für $\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{q}_2$ haben die $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-Linksideale der Norm $\pi$ (Primelement für $\mathfrak{p}$) die Normalgestalt (vgl. [6], § 2) $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}\mu$ mit

$$\mu \cong \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & \pi \end{pmatrix}, \quad c \bmod \mathfrak{p}$$

oder

$$\mu \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi & c \end{pmatrix}, \quad c \bmod \mathfrak{p}.$$

Das Symbol $\cong$ bedeute hier Assoziiertheit.

Das einzige ambige $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-Ideal darunter ist $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}\mu$ mit $\mu \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$. Es ist $\operatorname{Sp}(\mu) = 0$ genau in diesem Fall. Genau in diesem Fall gilt auch $\mathfrak{n}_\mathfrak{p}\,|\,s_\mathfrak{p}$.

Für $\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{q}_1$ ist jedes Ideal ambig, andererseits kann für $N(\mu) \cong \pi$ nicht $\operatorname{Sp}(\mu)$ Einheit in $K_\mathfrak{p}$ sein, sonst wäre $\operatorname{Sp}(\mu)^2 - 4N(\mu)$ quadratischer Rest mod $4\mathfrak{p}$, also Quadrat in $K_\mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p}$ in $K(\mu)$ zerlegt. Das ist aber in total-definiten Quaternionenalgebren nach [6], Satz 1 unmöglich. Also gilt auch hier $\mathfrak{n}_\mathfrak{p}\,|\,s_\mathfrak{p}$.

Wegen $\mathfrak{n}\,|\,\mathfrak{q}$ sind die entsprechenden Aussagen für Primideale $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{q}$ leer. Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung. Analog überlegt man: Für $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2$ mit $\mathfrak{n}_1\,|\,\mathfrak{q}$, $\mathfrak{n}_2^2 = 2$ ist Bedingung (3) für ambige Ideale notwendig, jedoch nicht hinreichend. Ähnliche Überlegungen sind in weiteren Einzelfällen möglich; eine allgemeine Lösung ist nicht bekannt.

**§ 7. Maßformeln.** Wie in § 6 sei der Grundkörper $K$ total-reell und der Raum $R$ total-anisotrop. Dann ist nach [5], Satz 16.1 die Gruppe $U(\mathfrak{J})$ der eigentlichen automorphen Einheiten von $\mathfrak{J}$ von endlicher Ordnung $u(\mathfrak{J})$. (Eine automorphe Einheit E von $\mathfrak{J}$ ist ein Automorphismus E des Raumes $R$ mit $\mathrm{E}\mathfrak{J} = \mathfrak{J}$.) Das $\mathrm{E} \in U(\mathfrak{J})$ in $C_2(R)$ darstellende (bis auf einen Faktor aus dem Zentrum Z eindeutig bestimmte) Element $T(\mathrm{E})$ vermittelt einen inneren Automorphismus von $C_2(R)$ mit

$$\mathfrak{o}(\mathrm{E}\mathfrak{J}) = \mathfrak{o}(\mathfrak{J}) = T(\mathrm{E})\,\mathfrak{o}(\mathfrak{J})\,T(\mathrm{E})^{-1}.$$

In [4] wird gezeigt: Die Zuordnung $\Sigma/\{s\} \to T(\Sigma)$ ist treu; dabei ist $\{s\}$ die Gruppe der Ähnlichkeiten $\Sigma = s$ (d.h. $\Sigma\xi = s\xi$), $s \neq 0$ in $K$. Offenbar ist

$$\{s\} \cap U(\mathfrak{J}) = \left.\begin{cases} \{+1\} & \text{für} \quad \dim R \text{ ungerade} \\ \{+1, -1\} & \text{für} \quad \dim R \text{ gerade} \end{cases}\right\} \mathrel{\hat=} V.$$

(Bei ungerader Dimension ist zwar jede Ähnlichkeit eigentlich, jedoch nur solche Automorphismen sind eigentlich, deren Determinante der Darstellungsmatrix $+1$ ist.) Es folgt, daß die Abbildung

$$\varphi\colon \mathrm{E}/V \to T(\mathrm{E})/\mathrm{Z} \tag{1}$$

von $U(\mathfrak{J})/V$ in $A(\mathfrak{o}(\mathfrak{J}))$ injektiv ist; dabei bedeute $A(\mathfrak{o}(\mathfrak{J}))$ die Gruppe der inneren Automorphismen von $\mathfrak{o}(\mathfrak{J})$ in $C_2(R)$.

Im ternären und quaternären Fall lassen sich weitere Aussagen machen:

Satz 16. *In den Fällen:* I) $\mathfrak{J}$ *ist ein ternäres Gitter und* II) $\mathfrak{J}$ *ist ein quaternäres Gitter über dem rationalen Zahlkörper, gilt:* $U(\mathfrak{J})/V \cong A(\mathfrak{o}(\mathfrak{J}))$. *Hierbei ist* $U(\mathfrak{J})$ *die Gruppe der eigentlichen automorphen Einheiten von* $\mathfrak{J}$, $V = \begin{cases} +1, & \dim R = 3 \\ \{+1, -1\}, & \dim R = 4 \end{cases}$ *und* $A(\mathfrak{o}(\mathfrak{J}))$ *die Gruppe der inneren Automorphismen von* $\mathfrak{o}(\mathfrak{J})$ *in der Clifford-Algebra.*

Beweis. Es ist nur noch zu zeigen, daß die in (1) definierte Abbildung $\varphi$ in beiden Fällen surjektiv ist.

I) Nach § 1, (4) gibt es zu jedem regulären $\tau \in \Phi = C_2(R)$ einen eigentlichen Automorphismus E mit $\tau = T(\mathrm{E})$; hierbei ist E Einheit von $\mathfrak{J}$, weil $\mathfrak{o}(\mathrm{E}\mathfrak{J}) = \mathfrak{o}(\mathfrak{J})$ nach Satz 1, b) zur Folge hat: $\mathrm{E}\mathfrak{J} = \mathfrak{m}\mathfrak{J}$, wobei $\mathfrak{m} = 1$, wie Normbildung für die Gitter zeigt.

II) Nach § 1, (5) und den weiteren Ausführungen auf S. 335 existiert zu jedem regulären $\tau \in \Phi = C_2(R)$ eine eigentliche Ähnlichkeit $\Sigma$ mit $\tau = T(\Sigma)$. Aus $\mathfrak{o}(\Sigma\mathfrak{J}) = \mathfrak{o}(\mathfrak{J})$ folgt $\Sigma\mathfrak{J} = m\mathfrak{J}$. (Im Hinblick auf den unteren Zusatz merken wir an: Bei Grundkörper $K$ mit ungerader Klassenzahl folgt aus $\Sigma\mathfrak{J} = \mathfrak{m}\mathfrak{J}$ nach dem Korollar zu Satz 3 $\mathfrak{m} = (m)$ mit $m \in K$, also ebenfalls $\Sigma\mathfrak{J} = m\mathfrak{J}$.) Man bilde $\Sigma' = m^{-1}\Sigma$, dann gilt $\Sigma'\mathfrak{J} = \mathfrak{J}$ mit $T(\Sigma') = \tau$. Weil der Grundkörper nach Voraussetzung $Q$ ist, folgt $n(\Sigma') = 1$, also ist $\Sigma' \in U(\mathfrak{J})$. Demnach ist $\varphi$ surjektiv.

Zusatz. *Es sei* $W(\mathfrak{J})$ *die Gruppe der (nicht notwendig automorphen) eigentlichen Einheiten von* $\mathfrak{J}$. *Dann ist für quaternäre Gitter* $\mathfrak{J}$ *über einem*

*Grundkörper $K$ mit ungerader Klassenzahl:*

$$W(\mathfrak{I})/\{e\} \cong A(\mathfrak{o}(\mathfrak{I})),$$

*$e$ Einheit in $K$.*

(Für Grundkörper $Q$ fällt dieser Zusatz mit Satz 16, II) zusammen.)

Die Ordnung der Gruppe $A(\mathfrak{o}(\mathfrak{I}))$ ist in den Fällen des Satzes 16 endlich und sei mit $a(\mathfrak{o}(\mathfrak{I}))$ bezeichnet. Für Ordnungen $\mathfrak{o}$ von quadratfreiem Grundideal $\mathfrak{q}$ wird in [6], Formel (16) angegeben:

$$a(\mathfrak{o}) = h_0 2^{\varkappa} \frac{e(\mathfrak{o})}{H(\mathfrak{o})}, \tag{2}$$

wobei $a(\mathfrak{o})$ die Anzahl der inneren Automorphismen von $\mathfrak{o}$, $\varkappa$ die Anzahl der Primteiler von $\mathfrak{q}$, $H(\mathfrak{o})$ die Klassenzahl ambiger $\mathfrak{o}$-Ideale und $e(\mathfrak{o})$ der Index der Einheitengruppe von $I$ in der Einheitengruppe von $\mathfrak{o}$ ist.

Nach Satz 16 und (2) ist man in der Lage, Minkowski–Siegelsche Maße von ternären und quaternären Gittergeschlechtern auf Maßberechnungen in Quaternionenalgebren zurückzuführen.

I) Ternäre Geschlechter. Das Maß eines ternären Geschlechts $\mathfrak{G}$ ist $M(\mathfrak{G}) = \sum_{i=1}^{g_0} \frac{1}{u(\mathfrak{I}_i)}$, wobei $\mathfrak{I}_i$ Repräsentanten der $g_0$ Ähnlichkeitsklassen von $\mathfrak{G}$ sind. Nach Satz 16 folgt $u(\mathfrak{I}_i) = a(\mathfrak{o}(\mathfrak{I}_i))$, daher wird nach (2) und dem Korollar zu Satz 9 (S. 346) für Geschlechter $\mathfrak{G}$ mit reduzierter Determinante $2\mathfrak{q}$ bei quadratfreiem $\mathfrak{q}$:

$$M(\mathfrak{G}) = \frac{1}{h_0 2^{\varkappa}} \sum_{i=1}^{T} \frac{H(\mathfrak{o}(\mathfrak{I}_i))}{e(\mathfrak{o}(\mathfrak{I}_i))}.$$

Die hierin auftretende Summe ist gerade das in § 6, (2) explizit angegebene Maß der Ordnungen des Grundideals $\mathfrak{q}$ der Clifford-Algebra. Daraus ergibt sich

Satz 17. *Das Minkowski–Siegelsche Maß eines ternären Geschlechts mit der reduzierten Determinante $2\mathfrak{q}$ bei quadratfreiem $\mathfrak{q}$ ist:*

$$M(\mathfrak{G}) = \frac{2 D_0^{3/2} \zeta_0(2)}{2^{\varkappa} (2\pi)^{2n}} \prod_{\mathfrak{p} | \mathfrak{q}_1} (N(\mathfrak{p}) - 1) \prod_{\mathfrak{p} | \mathfrak{q}_2} (N(\mathfrak{p}) + 1). \tag{3}$$

*Dabei bedeuten $D_0$, $\zeta_0(s)$, $n$ Diskriminante, Zetafunktion und Körpergrad von $K$, $\mathfrak{q}_1$ das Produkt aller Primideale $\mathfrak{p}$, für welche $\Phi_{\mathfrak{p}} = C_2(R_{\mathfrak{p}})$ nullteilerfrei ist, $\mathfrak{q}_2 = \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}_1}$ und $\varkappa$ die Anzahl der Primteiler von $\mathfrak{q}$.*



II) Quaternäre Idealkomplexe. Es liege ein quasiquadratfreier Idealkomplex $\mathfrak{M}$ von Gittern 2. Art in einem quaternären Raum $R$ über $Q$ mit $\Delta(R) \underset{2}{\neq} 1$ vor. Das Maß $M(\mathfrak{M})$ werde definiert als die Summe der Maße der in $\mathfrak{M}$ liegenden Geschlechter $\mathfrak{G}_i$:

$$M(\mathfrak{M}) = \sum_{i=1}^{g^+} M(\mathfrak{G}_i) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{u(\mathfrak{I}_j)},$$

wobei $\mathfrak{I}_j$ Vertreter der $k$ Ähnlichkeitsklassen von $\mathfrak{M}$ sind; $g^+$ ist die Anzahl der engeren Geschlechter von $Q(\sqrt{\Delta})$ (vgl. Satz 6). Wichtig ist der Fall $g^+ = 1$; nach dem Hauptsatz über die Geschlechter in quadratischen Körpern liegt dieser Fall genau dann vor, wenn die Diskriminante von $Q(\sqrt{\Delta})$ keine verschiedenen Primteiler enthält. Analog zu (3) berechnet man unter Benutzung von Satz 12, Satz 16 und (2):

Satz 18. *Das Minkowski–Siegelsche Maß eines quasiquadratfreien Idealkomplexes 2. Art $\mathfrak{M}$ in einem quaternären Raum $R$ über $Q$ mit $\Delta(R) \underset{2}{\neq} 1$ ist*

$$M(\mathfrak{M}) = \frac{D_0^{3/2} \zeta_0(2)}{16\pi^4}, \tag{4}$$

*wobei $D_0$, $\zeta_0(s)$, Diskriminante, Zetafunktion von $Q(\sqrt{\Delta})$ bedeuten.*

Eine weitergehende *explizite Auswertung* von (3), (4) wird ermöglicht durch die Bestimmung der Werte der Zetafunktion in [14], S. 135. Dort wird für die Zetafunktion $\zeta_K$ eines total-reellen Körpers $K$ gezeigt:

$$\zeta_K(2) = \frac{\pi^{2n} B_K^2}{D_0^{3/2}}, \quad \text{wobei} \quad B_K^2 = \prod_{\chi(-1)=+1} B_\chi^2$$

(das Produkt erstreckt sich über alle Charaktere $\chi$ von $K$ mit $\chi(-1) = +1$). Die "verallgemeinerten Bernoullischen Zahlen" $B_\chi^2$ wiederum berechnen sich aus:

$$B_\chi^2 = f^{-1} \sum_{i=1}^{f} \chi(i)(fB + i - f)^2;$$

dabei ist $f$ der Führer von $\chi$, $B^1 = +\frac{1}{2}$, $B^2 = +\frac{1}{6}$ (gewöhnliche Bernoullische Zahlen). Hiermit wird aus (3):

$$M(\mathfrak{G}) = 2^{-(\varkappa+2n)} B_K^2 \prod_{\mathfrak{p} | \mathfrak{q}_1} (N(\mathfrak{p}) - 1) \prod_{\mathfrak{p} | \mathfrak{q}_2} (N(\mathfrak{p}) + 1)$$

und aus (4):

$$M(\mathfrak{M}) = \tfrac{1}{16} B^2_{Q(\sqrt{\Delta})}.$$

Diese Berechnungen finden in § 9 Anwendung.

Bemerkung. Für den Fall des Grundkörpers $Q$ finden sich allgemeine Maßformeln, die durch Ausrechnung p-adischer Darstellungsdichten gewonnen werden, in [15], Abh. IV, und in [17]. Der etwas mühsame Nachweis der Übereinstimmung dieser Formeln mit Ergebnissen der Sätze 17 und 18 wurde nur in Spezialfällen vorgenommen.

**§ 8. Spuren von Anzahlmatrizen.** In [5], Kap. IV, werden Anzahlmatrizen quadratischer Formen untersucht, die besonders deshalb von Interesse sind, weil sie in enger Beziehung zu Darstellungen von Heckeschen Operatoren stehen. Wir bestimmen die Spuren dieser Anzahlmatrizen $A$ für ternäre und quaternäre Idealkomplexe durch Rückführung auf die Berechnung von Spuren von Anzahlmatrizen $P$ zu Quaternionenalgebren, die auf S. 353 behandelt wurde.

Gegeben ist ein Idealkomplex, dessen eigentliche Ähnlichkeitsklassen durch $\mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_k$ repräsentiert seien. Die Spur der Anzahlmatrix dieses Idealkomplexes zur (ganzen) Norm $n$ ist

$$\operatorname{Sp} A(n) = \sum_{i=1}^{k} p_{ii}(n),$$

wobei $p_{ii}(n)$ die Anzahl der ganzen "Gitterhauptideale $\mathfrak{K}/\mathfrak{J}_i$ der Norm $n$" bedeutet, d.h. (vgl. [5], § 13) $\mathfrak{K} = \Sigma\mathfrak{J}_i \subseteq \mathfrak{J}_i$ mit $n(\Sigma) = n$.

I) Ternäre Idealkomplexe. In diesem Fall ist $\operatorname{Sp} A(n) \neq 0$ genau für $n = r^2$ ($r$ ganz). Dann ist $\Sigma = r\mathrm{E}$ mit einem Automorphismus $\mathrm{E}$ und $r\mathrm{E}\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{J}$, also $\mathrm{E}\mathfrak{J} \subseteq r^{-1}\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{J}$, daher $\mathrm{E}\mathfrak{J} = \mathfrak{J}$. Demnach folgt: $\operatorname{Sp} A(r^2) = \operatorname{Sp} A(1) = k$, wobei $k$ die Anzahl der Ähnlichkeitsklassen des zugrundeliegenden Idealkomplexes ist. Speziell ergibt sich also für Idealkomplexe mit reduzierter Determinante $2\mathfrak{q}$ mit quadratfreiem $\mathfrak{q}$ nach dem Korollar zu Satz 9:

$$\operatorname{Sp} A(n) = \begin{Bmatrix} T^{\mathfrak{q}}(\Phi), & \text{wenn } n \text{ Quadrat in } K \\ 0, & \text{sonst} \end{Bmatrix}.$$

Hierbei bedeutet $T^{\mathfrak{q}}(\Phi)$ die Anzahl der Isomorphietypen von Ordnungen des Grundideals $\mathfrak{q}$ in $\Phi = C_2(R)$, die in Satz 14 berechnet wurde.

II) Quaternäre Idealkomplexe. Es sei ein quasiquadratfreier Idealkomplex von Gittern 2. Art in einem quaternären anisotropen Raum $R$ über $Q$ mit $\Delta(R) \underset{2}{\neq} 1$ zugrunde gelegt.

Einem Hauptideal $\mathfrak{K} = \Sigma\mathfrak{J}/\mathfrak{J}$ in $R$ entspricht in $C_2(R)$ ein Hauptideal

$$\mathfrak{o}(\mathfrak{J})T(\Sigma)^{-1} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{o}(\mathfrak{K}) = T(\Sigma)\mathfrak{o}(\mathfrak{J})T(\Sigma)^{-1}$$

(vgl. § 1, S. 332; s. auch [5], § 14). $\Sigma\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{J}$ bedeutet, daß $\Sigma$ ganz ist in bezug auf $\mathfrak{J}$. Andererseits bedeutet $T(\Sigma)^{-1} \in \mathfrak{o}(\mathfrak{J})$, daß $T(\Sigma)^{-1}$ ganz in bezug auf $\mathfrak{o}(\mathfrak{J})$ ist. Aus § 1, (5) erkennt man:

$$\Sigma\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{J} \Leftrightarrow T(\Sigma)^{-1} \in \mathfrak{o}(\mathfrak{J}),$$



also entspricht einem ganzen Hauptideal in $R$ ein ganzes Hauptideal in $\Phi = C_2(R)$ und umgekehrt; dabei gilt nach S. 335:

$$n(\Sigma) = N_{Q(\sqrt{\Delta})/Q}\big(T(\Sigma)^{-1}\big(T(\Sigma)^{-1}\big)^{\mathrm{B}}\big).$$

Sei $f$ eine ganze Zahl aus $Q(\sqrt{\Delta})$ mit $N(f) = n$ (hierbei sei $N = N_{Q(\sqrt{\Delta})/Q}$). Dann ist (wenn $n$ kein Quadrat):

$$p_{ii}(n) = \sum_{\substack{f \\ N(f)=n}} \frac{\pi_{ii}(f)\, e\big(\mathfrak{o}(\mathfrak{J}_i)\big)}{a\big(\mathfrak{o}(\mathfrak{J}_i)\big)},$$

denn die Anzahl der $T(\Sigma)^{-1}$ der Norm $f$ aus $\mathfrak{o}(\mathfrak{J}_i)$ (bis auf assoziierte) ist $\pi_{ii}(f)\, e\big(\mathfrak{o}(\mathfrak{J}_i)\big)$, und genau innere Automorphismen in $\mathfrak{o}(\mathfrak{J}_i)$ (in der Anzahl $a\big(\mathfrak{o}(\mathfrak{J}_i)\big)$) liefern dieselben Ideale in $R$. Nach § 7, (2) ist

$$\frac{e\big(\mathfrak{o}(\mathfrak{J}_i)\big)}{a\big(\mathfrak{o}(\mathfrak{J}_i)\big)} = \frac{H\big(\mathfrak{o}(\mathfrak{J}_i)\big)}{h_0}.$$

also folgt:

$$p_{ii}(n) = \frac{1}{h_0} \sum_{\substack{f \\ N(f)=n}} H_i \pi_{ii}(f),$$

demnach ist

$$\operatorname{Sp} A(n) = \frac{1}{h_0} \sum_{\substack{f \\ N(f)=n}} \sum_{i=1}^{T} H_i \pi_{ii}(f) = \frac{1}{h_0} \sum_{\substack{f \\ N(f)=n}} \operatorname{Sp} P(f)$$

mit den Bezeichnungen von § 6, S. 352. Das Resultat wird zusammengefaßt in

SATZ 19. *Zu einem quasiquadratfreien Idealkomplex 2. Art in einem quaternären anisotropen Raum $R$ mit $\Delta(R) \underset{2}{\neq} 1$ über dem rationalen Zahlkörper $Q$ berechnet sich die Spur der Anzahlmatrix $A$ wie folgt:*

$$\operatorname{Sp} A(n) = \frac{1}{h_0} \sum_{\substack{f \text{ ganz in } Q(\sqrt{\Delta}) \\ \text{mit } N_{Q(\sqrt{\Delta})/Q}(f) = n \ (f \text{ Assoziiertenklasse})}} \operatorname{Sp} P(f),$$

*wenn $n$ kein Quadrat, wobei $P(f)$ Anzahlmatrix in $\Phi = C_2(R)$ zur Norm (in der Quaternionenalgebra $\Phi$) $f$ von Ordnungen des Grundideals 1 in $Q(\sqrt{\Delta})$ und $h_0$ die Klassenzahl von $Q(\sqrt{\Delta})$ ist. Wenn $n$ Quadrat, ist* $\operatorname{Sp} A(n) = \operatorname{Sp} A(1) = k$ *wie im ternären Fall* (S. 358).

**§ 9. Explizite Formeln und Tabellen.** Es werden Typenzahlen und Maße für definite Quaternionenalgebren über dem rationalen Zahlkörper $Q$ und reell-quadratischen Körpern $Q(\sqrt{\Delta})$ berechnet, und es wird der Zusammenhang mit der Berechnung von Klassenzahlen von Geschlechtern quadratischer Formen erneut erläutert.

I) Typenzahlen von definiten Quaternionenalgebren $\Phi$ über $Q$. Bezeichnungen: Es bedeutet $q_1^2$ die Diskriminante von $\Phi$. Betrachtet werden Ordnungen der Diskriminante $q_1^2 q_2^2$ mit quadratfreiem $q = q_1 q_2$. Die Anzahl der Isomorphietypen dieser Ordnungen ist $T(q_1, q_2)$. Die *Bedeutung* dieser Anzahlen für die Berechnung von Klassenzahlen von Geschlechtern ternärer quadratischer Formen ist folgende: Aus dem Korollar zu Satz 9 (S. 346) ergibt sich:

$$\sum_{\substack{q_1 q_2 = q \\ q_1, q_2 \text{ nat. Zahlen}}} T(q_1, q_2) = F(2q),$$

wobei $F(2q)$ die Anzahl der Formenklassen von uneigentlichen ternären quadratischen Formen der Determinante $2q$ ist. Die Werte von $F(2q)$ lassen sich einer Tabelle von Eisenstein ([7]) entnehmen und zum Vergleich heranziehen. (Eisenstein ([8], S. 363 ff.) gibt übrigens in Spezialfällen ebenfalls Formeln für $F(2q)$ an, die er aus der Maßformel gewinnt.)

In Tabelle 1 sind sämtliche $T(q_1, q_2)$ für quadratfreies $q = q_1 q_2$ mit $q \leqslant 30$ berechnet und mit den Werten $F(2q)$ verglichen.

TABELLE 1

| $q$ | 2 | 3 | 5 | 6 | | 7 | 10 | | 11 | 13 | 14 | | 15 | | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_1$ | 2 | 3 | 5 | 2 | 3 | 7 | 2 | 5 | 11 | 13 | 2 | 7 | 3 | 5 | 17 |
| $q_2$ | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 5 | 2 | 1 | 1 | 7 | 2 | 5 | 3 | 1 |
| $T(q_1, q_2)$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| $F(2q)$ | 1 | 1 | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 2 | 1 | 3 | | 3 | | 2 |

| $q$ | 19 | 21 | | 22 | | 23 | 26 | | 29 | 30 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_1$ | 19 | 3 | 7 | 2 | 11 | 23 | 2 | 13 | 29 | 2 | 3 | 5 | 30 |
| $q_2$ | 1 | 7 | 3 | 11 | 2 | 1 | 13 | 2 | 1 | 15 | 10 | 6 | 1 |
| $T(q_1, q_2)$ | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| $F(2q)$ | 2 | 3 | | 3 | | 3 | 4 | | 3 | 6 | | | |

(Man beachte, daß $q_1$ als Grundzahl der Algebra stets eine ungerade Anzahl von Primteilern enthalten muß.)



Die *Berechnung* der Tabelle 1 beruht auf folgenden (durch Spezialisierung der Ergebnisse der §§ 6 und 7 gewonnenen) Formeln:

$$T(q_1, q_2) = \frac{\sum\limits_{t | q_1 q_2} \operatorname{Sp} P^*(t)}{\sum\limits_{t | q_1 q_2} 1},$$

wobei

$$\operatorname{Sp} P^*(1) = \frac{1}{12} \prod_{p|q_1} (p-1) \prod_{p|q_2} (p+1) + \frac{1}{4} \prod_{p|q_1} \left(1 - \left(\frac{-4}{p}\right)\right) \prod_{p|q_2} \left(1 + \left(\frac{-4}{p}\right)\right) + \frac{1}{3} \prod_{p|q_1} \left(1 - \left(\frac{-3}{p}\right)\right) \prod_{p|q_2} \left(1 + \left(\frac{-3}{p}\right)\right)$$

und für $t > 1$, $t | q$:

$$\operatorname{Sp} P^*(t) = \frac{1}{2} \sum_{s,f} \prod_{p|q_1} \left(1 - \left\{\frac{(s^2-4t)/f^2}{p}\right\}\right) \prod_{p|q_2} \left(1 + \left\{\frac{(s^2-4t)/f^2}{p}\right\}\right) \frac{h\left(\frac{s^2-4t}{f^2}\right)}{w\left(\frac{s^2-4t}{f^2}\right)}$$

mit $|s| < 2\sqrt{t}$, $t | s$, $f > 0$, $(s^2 - 4t)/f^2 \equiv 0, 1\,(4)$.

Hierbei bedeutet $h(-d)$ die Idealklassenzahl, $w(-d)$ die halbe Einheitenanzahl von $Q(\sqrt{-d})$, wobei $-d$ die Diskriminante eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers ist. Ferner ist

$$\left\{\frac{-d}{p}\right\} = \begin{cases} \left(\frac{-d}{p}\right), & \text{falls } \frac{d}{p^2} \text{ nicht} \\ 1, & \text{falls } \frac{d}{p^2} \end{cases} \equiv 0, 1\,(4).$$

Die Bedingungen $|s| < 2\sqrt{t}$, $t | s$ besagen für $t > 3 : s = 0$. Demnach ist für $t > 3$, $t | q$:

$$\operatorname{Sp} P^*(t) = \frac{1}{2} \prod_{p|q_1} \left(1 - \left\{\frac{-4t}{p}\right\}\right) \prod_{p|q_2} \left(1 + \left\{\frac{-4t}{p}\right\}\right) \frac{h(-4t)}{w(-4t)} + \frac{1}{2} \prod_{p|q_1} \left(1 - \left\{\frac{-t}{p}\right\}\right) \prod_{p|q_2} \left(1 + \left\{\frac{-t}{p}\right\}\right) \frac{h(-t)}{w(-t)},$$

wobei der zweite Term für $-t \not\equiv 0, 1\,(4)$ verschwindet.

II) Typenzahlen von total-definiten Quaternionenalgebren über reell-quadratischen Zahlkörpern $Q(\sqrt{\Delta})$. Bezeichnungen: Es sei $M(\Delta)$ das Maß, $H(\Delta)$ die Anzahl der Klassen, $T(\Delta)$ die Anzahl der Typen von Maximalordnungen derjenigen Quaternionenalgebra $\Phi$ über $Q(\sqrt{\Delta})$, die an den beiden archimedischen Primstellen verzweigt ist, sonst aber überall zerfällt. (In der Terminologie der §§ 3 und 6 handelt es sich um die Ordnungen mit Grundideal 1 einer total-definiten Quaternionenalgebra über $Q(\sqrt{\Delta})$.)

Die Bedeutung dieser Kennzahlen von Quaternionenalgebren für quadratische Formen ist folgende:

a) Nach Satz 12 (S. 350) ist $T(\Delta)$ gleich der Anzahl der Ähnlichkeitsklassen eines quaternären Idealkomplexes von "quasiquadratfreien" Gittern "2. Art" in einem anisotropen Raum über $Q$, d.h. Gittern, deren reduzierte Determinante gleich der Diskriminante von $Q(\sqrt{\Delta})$ ist und deren dyadische Erweiterungen keine Orthogonalbasis besitzen (genauer s. S. 346).

Durch $M(\Delta)$ läßt sich gemäß Satz 18 (S. 357) das Minkowski–Siegelsche Maß desselben Idealkomplexes berechnen.

b) Die Kenntnis von $H(\Delta)$ und $M(\Delta)$ kann gemäß dem Korollar zu Satz 9 (S. 346) mit Nutzen bei der Berechnung von Anzahlen von Ähnlichkeitsklassen ternärer Gitter über $Q(\sqrt{\Delta})$ verwendet werden; diese Berechnung ist explizit nur in einigen Fällen möglich und wird hier nicht weiter verfolgt.

Wir führen in Tabelle 2 die Werte von $M(\Delta), H(\Delta), T(\Delta)$ für quadratfreies $\Delta$ auf, für welches der Zahlkörper $Q(\sqrt{\Delta})$ Klassenzahl 1 und Grundeinheit $\varepsilon$ mit $N(\varepsilon) = -1$ hat. In diesem Fall ist $H(\Delta) = T(\Delta)$; (zur Begründung der Voraussetzungen s. u.). Der Vergleich der Tabelle 2 mit der von K. Germann in [20], S. 146, mittels der Reduktionstheorie gewonnenen Tabelle (bis zur Diskriminante 61) zeigt Übereinstimmung.

TABELLE 2

| $\Delta$ : | 2 | 5 | 13 | 17 | 29 | 37 | 41 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M(\Delta)$ : | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{60}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{5}{12}$ | $\frac{2}{3}$ |
| $H(\Delta) = T(\Delta)$ : | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |

| $\Delta$ : | 53 | 61 | 73 | 89 | 97 | 101 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $M(\Delta)$ : | $\frac{7}{12}$ | $\frac{11}{12}$ | $\frac{11}{6}$ | $\frac{13}{6}$ | $\frac{17}{6}$ | $\frac{19}{12}$ |
| $H(\Delta) = T(\Delta)$ : | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |



Zur *Berechnung* der Tabelle ist folgendes zu sagen: $M(\Delta)$ wurde bereits in § 7 (S. 357) zur zahlenmäßigen Berechnung vorbereitet.

Zur Berechnung von $H(\Delta) = \mathrm{Sp}P(1)$ muß nach § 6, S. 353, ein Vertretersystem $e_i$ der Quadratklassen von Einheiten von $I_{(\sqrt{\Delta})}$ zugrunde gelegt werden. Ein solches ist hier: $e_i = +1, -1, +\varepsilon, -\varepsilon$, wobei $\varepsilon$ die Grundeinheit von $Q(\sqrt{\Delta})$ ist. Man muß dann alle $s \in I_{(\sqrt{\Delta})}$ suchen, für welche $(s^2 - 4e_i)_{\infty_{1,2}} < 0$ für die beiden archimedischen Primstellen $\infty_{1,2}$. Solche $s$ gibt es nur für $e_i = +1, +\varepsilon$. Man überlegt leicht: für $\Delta > 5$ treten bei $e_1 = +1$ genau $s = 0, 1$ auf. Für $e_2 = \varepsilon$ hängen die Werte von $s$ der Gestalt von $\varepsilon$ ab; außerdem treten bei den folgenden Rechnungen Klassenzahlen von Zahlkörpern $Q(\sqrt{\Delta}, \sqrt{-4\varepsilon})$ auf, die sich nicht allgemein ausrechnen lassen. Bei $N(\varepsilon) = -1$ fallen die entsprechenden Terme von $\mathrm{Sp}P(1)$ jedoch weg, wie aus [6], (52), folgt, da die Quaternionenalgebra definit ist. Daher beschränken wir uns auf Körper mit $N(\varepsilon) = -1$. Dann folgt aus § 6, S. 353: Wenn man die Ordnungen

$$\mathfrak{O} \supseteq I[x],$$

mit

$$x^2 - sx + 1 = 0 \quad (s = 0, 1 \text{ bei } \Delta > 5)$$

bildet, dann ist:

$$\mathrm{Sp}P(1) = M(\Delta) + \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{O}} \frac{h(\mathfrak{O})}{w(\mathfrak{O})}.$$

Hierbei bezeichnen:

$h(\mathfrak{O})$ die Anzahl der Idealklassen von $\mathfrak{O}$,

$w(\mathfrak{O})$ den Index der Einheitengruppe von $I_{(\sqrt{\Delta})}$ in der von $\mathfrak{O}$.

Es wird hier für $\Delta > 5$ summiert über die Maximalordnungen der Körper $Q(\sqrt{\Delta}, \sqrt{-1})$ und $Q(\sqrt{\Delta}, \sqrt{-3})$. Dieses sind bizyklische biquadratische Körper, deren Klassenzahlen schon im 19. Jahrhundert bekannt waren (vgl. [9], S. 72).

Mit diesen Ergebnissen erhält man:

$$H(\Delta) = M(\Delta) + \tfrac{1}{8}h(\Delta)h(-\Delta) + \tfrac{1}{6}h(\Delta)h(-3\Delta) \quad \text{für} \quad \Delta > 5,$$

wobei $h(-\Delta)$ die Klassenzahl von $Q(\sqrt{-\Delta})$ bedeutet.

Für $h(\Delta) = 1$ ist nach Satz 14 (S. 353): $T(\Delta) = H(\Delta)$.

Für $h(\Delta) > 1$ benötigt man zur Berechnung von $T(\Delta)$ die Spuren $\mathrm{Sp}P^*(\mathfrak{a}_i^2)$ (s. S. 352), wobei $\mathfrak{a}_i$ Vertreter der Idealklassen von $Q(\sqrt{\Delta})$ sind. Diese Spuren lassen sich nach der Bemerkung am Schluß von § 6 (S. 354) gelegentlich abschätzen und zuweilen sogar berechnen, die Resultate bleiben in diesem Fall aber lückenhaft.

## Bezeichnungen

kleine lateinische Buchstaben: Elemente des Grundkörpers $a, b, \ldots$
große lateinische Buchstaben: Grundkörper $K$, dessen Maximalordnung $I$, metrischer Raum $R$, rationaler Zahlkörper $Q$, Ring der ganzen rationalem Zahlen $Z$, einer Ähnlichkeit $\Sigma$ gemäß § 1, (1) zugeordnetes $T(\Sigma)$ und gewisse später im Text erklärte Anzahlen,
kleine deutsche Buchstaben: Ideale des Grundkörpers: $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{p}, \ldots$ und Ordnungen $\mathfrak{o}$ der Clifford-Algebren $C_2(R)$ von $R$,
große deutsche Buchstaben: Gitter oder Komplexe von Gittern in metrischen Räumen: $\mathfrak{J}, \mathfrak{K}, \ldots, \mathfrak{M}, \ldots$,
und: Diskriminante $\mathfrak{D}$ einer Ordnung,
kleine griechische Buchstaben:
1) Vektoren des metrischen Raumes $R$: $\alpha, \beta, \ldots, \iota, \varkappa, \ldots, \xi, \ldots$
2) Elemente einer Quaternionenalgebra: $\alpha, \beta, \ldots, \tau, \ldots$
3) gewisse Anzahlen $\pi_{it}(f)$, $\varkappa$ (s. S. 352),
große griechische Buchstaben: Ähnlichkeiten oder Automorphismen eines metrischen Raumes: $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{E}, \ldots, \Sigma, \mathrm{T}, \ldots$
und Quaternionenalgebra $\Phi$, deren Zentrum Z
und Diskriminante $\Delta$ eines metrischen Raumes.

Wenn neue Symbole mittels einer Gleichung definiert werden, so wird $\doteqdot$ geschrieben.

Ziffern (z. B. [5]) weisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit hin.

### Literaturverzeichnis

[1] H. Brandt, (1) *Zur Zahlentheorie der Quaternionen*, Jahresbericht DMV 53 (1943) und weitere, dort zitierte Arbeiten des gleichen Verfassers.

[2] — (2) *Der Kompositionsbegriff bei den quaternären quadratischen Formen*, Math. Ann. 91 (1924).

[3] M. Deuring, *Algebren*, Ergebnisse der Math. Bd. 4, Heft 1, Berlin 1935.

[4] M. Eichler, (1) *Idealtheorie der quadratischen Formen*, Hamburger Abh. 18 (1952).

[5] — (2) *Quadratische Formen und orthogonale Gruppen*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1952.

[6] — (3) *Zur Zahlentheorie der Quaternionenalgebren*, J. reine u. angew. Math. 195 (1956).

[7] G. Eisenstein, (1) *Tabelle der reducierten positiven ternären quadratischen Formen*, J. reine u. angew. Math. 41 (1851).

[8] — (2) Verhandlungen Kgl. Akad. Wiss. Berlin, 1852, S. 350–387.

[9] H. Hasse, (1) *Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper*, Berlin 1952.

[10] — (2) *Zahlentheorie*, 2. Aufl., Berlin 1963.

[11] — (3) *Vorlesungen über Klassenkörpertheorie*, Würzburg 1967.

[12] E. Hecke, Math. Werke, Göttingen 1959.



[13] M. Kneser, *Klassenzahlen quadratischer Formen*, Jahresbericht DMV 61 (1958).

[14] H. W. Leopoldt, *Eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Zahlen*, Hamburger Abh. 22 (1958).

[15] H. Minkowski, Ges. Abh. Bd. 1, Leipzig-Berlin 1911.

[16] O. T. O'Meara, *Introduction to Quadratic Forms*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1963.

[17] G. Pall, *The Weight of a Genus of Positive N-ary Quadratic Forms*, Proc. of Symp. in Pure Maths. 8 (1965).

[18] F. Sohn, *Beiträge zur Zahlentheorie der ternären quadratischen Formen und der Quaternionenalgebren*, Diss. Münster 1957.

[19] S. B. Townes, *Table of Reduced Positive Quaternary Quadratic Forms*, Annals of Math. 41 (1940).

[20] B. L. van der Waerden und H. Gross, *Studien zur Theorie der quadratischen Formen*, Basel 1968.

*Reçu par la Rédaction le 29. 7. 1968*