Formula (7) implies that we minimalize the performance functional

$$2\Big[\int_0^r K\big(t,[x_{(1)}(t)-x^0_{(1)}(t),u_{(1)}(t)-u^0_{(1)}(t)]\big)dt+ \\ +\int_0^r K\big(t,[x_{(2)}(t)-x^0_{(2)}(t),u_{(2)}(t)-u^0_{(2)}(t)]\big)dt\Big]$$

with constraints

$$|u_{(1)j}(t)|+|u_{(2)j}(t)|\leqslant M_j \quad (j=1,2,\ldots,m).$$

The second example is the following. We consider a non-negative quadratic form $C(t,[x,u])$ defined for each fixed t on an $(m+n)$-dimensional space. Let us assume that $C(t,[x,u])$ is r-periodic and square integrable with respect to t. Let the constraint be the following:

$$\mathscr{C}(x,u)=\int_0^\omega C\big(t,[x(t),u(t)]\big)dt\leqslant M^2. \tag{8}$$

Obviously the spaces $Y_{(j)}$ are also orthogonal with respect to the inner product induced by $\mathscr{C}(x,u)$. Therefore the method of minimalizing (2) under condition (1) with constraint (8) is the following. We assume that

$$|y_{(j)}(t)|\leqslant M_j \quad (j=1,2,\ldots,N), \tag{9}$$

and minimalize (6) under condition (5) with constraint (9). This minimum depends on M. We obtain in this way the minimum of (2) under condition (1) with constraints (9). This minimum depends on $(M_1,\ldots,M_N)$. Then we minimalize this minimum with respect to $(M_1,\ldots,M_N)$ under the condition

$$M_1^2+\ldots+M_N^2\leqslant M^2.$$

We obtain a minimum of functional (2) under condition (1) with the constraint (8).

References

[1] A. Manitius, *Optymalne sterowanie procesów z opóźnieniami zmiennych stanu*, Ph. d. thesis, Politechnika Warszawska 1968.

[2] N. Namik Oğuztöreli, *Time lag control systems*, New York—London 1966.

[3] D. Przeworska-Rolewicz, *Sur les involutions d'ordre n*, Bull. Acad. Polon. Sci. 8 (1960), p. 735-739.

[4] — *On periodic solutions of linear differential-difference equations with constant coefficients*, Studia Math. 31 (1968), p. 69-73.

[5] — and S. Rolewicz, *Equations in linear spaces*, Warszawa 1968.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 27. 2. 1968

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXII. (1969)

О задаче Коши для нелинейных параболических операторных уравнений*

Г. Н. АГАЕВ (Баку)

ВВЕДЕНИЕ

Теория краевых задач для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений или систем уравнений высшего порядка, создание которой началось совсем недавно, успешно развивается в настоящее время. Первые результаты в этой области принадлежат Вишику [7, 8]. Уравнения, исследованные Вишиком, характеризуются положительной определенностью первой вариации оператора, соответствующего главной части уравнения. Этот выделенный класс нелинейных уравнений, имеющих дивергентные формы, им назван *сильно эллиптическим*. Эти исследования были продолжены Браудером [3, 4] в цикле его работ. Основываясь на им же доказанных общих теоремах существования для нелинейных функциональных уравнений, обладающих более слабым свойством непрерывности, а также свойством монотонности, он показал разрешимость краевых задач для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений, обладающих теми же свойствами. Эти работы Браудера по идее явились развитием работы Минти [18] по монотонным операторам. Отметим, что впервые монотонные функциональные уравнения были рассмотрены Вайнбергом и Качуровским [6].

В 1965 году Дубинский [10-11] дал простые доказательства основных теорем Вишика и Браудера. Одновременно он получил ряд новых результатов, относящихся к краевым задачам для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений недивергентной формы, а также для вырождающихся уравнений. Примененный им метод основывается на слабой сходимости в лебеговских пространствах L_p.

---

* Основные результаты работы были доложены в октябре-ноябре 1967 года на заседаниях Математического общества в Институте математики ПАН и в его Краковском отделении.

В том же году Лере и Лионс в их совместной работе [16] получили наиболее общие результаты по теории нелинейных операторных уравнений в сепарабельных рефлексивных банаховых пространствах, основываясь на методе Минти-Браудера. Полученные результаты были ими применены к одному классу уравнений в частных производных, содержащим уравнение Эйлера вариационного исчисления. Далее Лионс в работе [17] эти результаты перенес на исследование задачи Коши для параболических операторных уравнений, к которой примыкает и настоящая работа. Абстрактный операторный подход дает возможность единым образом охватить широкий класс краевых задач для нелинейных эллиптических, параболических и функциональных уравнений.

Отметим, что вследствие отсутствия подходящей теории нормальной разрешимости для нелинейных задач их разрешимость устанавливается приближенными методами, главным образом, различными аналогами метода Галеркина. Вопросы гладкости решений краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений высшего порядка исследовались лишь при условии слабой нелинейности в работе Крейна и Симонова [13].

Эти вопросы, а также существование классических решений достаточно полно изучены для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, которым посвящено значительное число работ, отраженных в монографиях Ладыженской и Уральцевой [14, 15] и в работе Олейник и Кружкова [20].

Ранее автором была исследована разрешимость стационарных нелинейных операторных уравнений в пространствах Гильберта [1] и Банаха [2], охватывающих и ряд квазилинейных уравнений, не обладающих свойством сильной эллиптичности и монотонности, с приложением к краевым задачам для квазилинейных дифференциальных уравнений.

Настоящая статья, являющаяся развитием работ [1, 2] автора, посвящена вопросам установления разрешимости задачи Коши для параболических операторных уравнений вида

$$\frac{du}{dt}+K_1K_2(u)+K_3(u) = h \tag{1.1}$$

при начальном условии

$$u|_{t=0} = u_0 \in X, \tag{1.2}$$

где X — сепарабельное рефлексивное банахово пространство, оператор K_1 — линейный, а $K_i(u)$, $i=2, 3$, — нелинейные. Их полная характеристика дается ниже.

Работа состоит из двух частей.

Первая часть содержит общие результаты, касающиеся разрешимости задачи Коши (1.1), (1.2). Во второй части полученные в первой части результаты применяются к решению смешанной задачи для квазилинейного дифференциального уравнения.

Для решения задачи (1.1), (1.2) по известной методике, которая названа *эллиптической регуляризацией*, уравнение (1.1) возмущается оператором $-\varepsilon\dfrac{d^2}{dt^2}$, где $\varepsilon>0$ — малый параметр, и получается вспомогательная задача для семейства операторов, которые попадают под тип операторов, рассмотренных автором в статье [2].

Далее, применяя теорему Обэна [19] о компактном вложении пространств, методом Галеркина показывается существование решения вспомогательной задачи при достаточно малом фиксированном значении малого параметра $\varepsilon>0$.

Наконец, из последнего семейства на основании полученных априорных оценок и той же теоремы компактности Обэна выделяется подмножество, сходящееся к слабому решению поставленной задачи (1.1), (1.2). При условии сильной монотонности (1.37) задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение, оператор же

$$K_0 = K_1K_2(\ )+K_3+\frac{d}{dt}$$

осуществляет гомеоморфизм между пространствами правых частей уравнения и пространством решений задачи (1.1), (1.2).

Кроме того, получен ряд структурных свойств сходимости семейства галеркинских приближений. Как, например, однопараметрическое семейство решений вспомогательной задачи сходится не только в слабом смысле при $\varepsilon\to 0$ к решению основной задачи, но и сильно. Отметим, что при условии (1.37) имеет место сходимость всей последовательности галеркинских приближений, а не только её подпоследовательности.

Во второй части работы решена смешанная задача для одного квазилинейного параболического уравнения. Это уравнение характеризуется тем, что в нем производные от искомой функции по разным координатным направлениям имеют разные порядки и принадлежат разным лебеговским пространствам. Указанная задача путем введения некоторых вектор-операторов приводится к задаче Коши для параболического операторного уравнения вида (1.1).

I. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

Прежде, чем перейти к точной постановке задачи (1.1), 1.2), предварительно введем некоторые термины, определения и нужные пространства абстрактных функций со значениями из банахова пространства.

Пусть даны три рефлексивных, вообще говоря, комплексных, банаховых пространства X, Y, B, причем X, Y суть сепарабельные и имеет место компактное вложение $X \subset B$, так, что для любого $u \in X$ выполняется неравенство

$$\|u\|_B \leqslant C\|u\|_X. \tag{1.3}$$

Здесь и в дальнейшем индекс у знака нормы означает пространство, норма которого берется, C — некоторое положительное число.

Далее пусть существует гильбертово пространство H, для которого имеют место вложения

$$X \subset B \subset H \subset B^* \subset X^*, \tag{1.4}$$

причем вложение $B \subset H$ плотное.

При определенных условиях такое гильбертово пространство можно построить. Построение такого гильбертова пространства указано, например, в работе Гохберга и Замбицкого [9].

Ясно, что вложения $X \subset H$, $X \subset X^*$ также компактные. Примером вложения (1.4) может служить,

$$X = \mathring{W}_p^{(m)}(\Omega), \quad B = \mathring{W}_p^{(m-1)}(\Omega), \quad H = \mathring{W}_2^{(m-2)},$$

$$X^* = \left(\mathring{W}_p^{(m)}(\Omega)\right)^*, \quad p \geqslant 2,$$

где Ω — ограниченная область в n-мерном эвклидовом пространстве.

Рассмотрим пространство $L_p([0,T],X)$ классов эквивалентных функций $u(t)$, отображающих отрезок $[0,T]$ в X, имеющих конечные интегралы

$$\|u\|_{X,p} = \left\{\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt\right\}^{1/p}, \quad p > 1, \tag{1.5}$$

взятых в качестве нормы.

Пространство $L_p([0,T],X)$ является сепарабельным рефлексивным банаховым пространством.

Рассмотрим подпространство $\underset{\circ}{H}_p([0,T],X)$ пространства $L_p([0,T],X)$, замкнутое в норме (1.5), для элементов $u(t)$ которого выполняется начальное условие $u(t)|_{t=0} = 0$.

Аналогично определяется $L_q([0,T],X^*)$ — пространство функционалов над $L_p([0,T],X)$ с нормой элементов:

$$\|w\|_{X^*,q} = \left\{\int_0^T \|w\|_{X^*}^q dt\right\}^{1/q}, \quad q = \frac{p}{p-1}. \tag{1.6}$$

Значение функционала (антилинейного) $w \in L_q([0,T],X^*)$ в точке $u \in L_p([0,T],X)$ обозначим через

$$[u,w] = \int_0^T \left(u(t), w(t)\right) dt, \tag{1.7}$$

где $\left(u(t), w(t)\right)$ при фиксированном $t \in [0,T]$ означает значение функционала $w(t) \in X^*$ на элементе $u(t) \in X$.

В случае, когда $u(t)$ будет элементом H, знак $(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное произведение в H.

Далее введем пространство $H'_{p,q}(X,X^*)$, состоящее из тех элементов $u \in L_p([0,T],X)$, для которых $du/dt \in L_q([0,T],X^*)$, где du/dt — обобщенная производная с векторным значением в смысле Шварца [21]. Норма в этом пространстве определяется формулой

$$\|u\|'_{p,q} = \|u\|_{X,p} + \left\|\frac{du}{dt}\right\|_{X^*,q}. \tag{1.9}$$

Аналогично определим подпространство $\mathring{H}_{p,q}(X,X^*)$ пространства $H'_{p,q}(X,X^*)$, замкнутое в норме (1.9), элементы которого удовлетворяют условию $du/dt|_{t=T} = 0$.

Обозначим далее через $H'_{p,2}(X,H)$ пространство, состоящее из абстрактных функций $u(t) \in L_p([0,T],X)$, $du/dt \in L_2([0,T],H)$, с нормой элементов

$$\|u\|'_{p,2} = \|u\|_{X,p} + \left\|\frac{du}{dt}\right\|_{H,2}. \tag{1.10}$$

Через $\underset{\circ}{H}'_{p,2}(X,H)$ обозначим подпространство пространства $H'_{p,2}(X,H)$, для элементов которого выполняется условие $u(0) = 0$.

Отметим, что выполнение начального условия здесь и в дальнейшем понимается в слабом смысле, например, $u(0) = u_0$ означает, что для произвольного $e \in X^*$

$$\lim_{t\to 0}\left(u(t), e\right) = (u_0, e).$$

Аналогично определяются пространства

$$H'_{2,2}([0,T],H), \quad \underset{\circ}{H}'_{2,2}([0,T],H),$$

$$\mathring{H}_{2,2}([0,T],H), \quad H_{2,2}([0,T],H).$$

Норму в пространстве $H'_{2,2}([0,T],H)$ обозначим через

$$\|u\|'_{2,2} = \left(\|u\|_{H,2}^2 + \left\|\frac{du}{dt}\right\|_{H,2}^2\right)^{1/2}.$$

Введенная норма, очевидно, эквивалентна норме (1.9) для $p = 2$ и $q = 2$.

Ясно, что пространство $H'_{2,2}([0,T],H)$ является гильбертовым. Наконец, через $H'_{p,q}(f)$ обозначим пространство абстрактных функций $u(t)$ представимых в виде
$$u(t)=f(t)+z(t),$$
где $f(t)$ является фиксированным элементом $H'_{p,q}(X,X^*)$, а $z(t)$-произвольный элемент из $\overset{\circ}{H'_{p,q}}(X,X^*)$.

Приведем одну теорему, непосредственно вытекающую из теоремы Обэна [19], о компактности вложения.

Теорема 1.1. *Отображение $u(t)$ из $H'_{p,q}(X,X^*)$ в $L_p([0,T],B)$ является компактным. В то же время отображение из $H'_{p,2}(X,H)$ в $L_p([0,T],B)$ также компактно.*

Далее пусть операторы $K_i (i=1,2,3)$ подчинены следующим условиям:

1° Оператор K_1 — линейный ограниченный и действует из $L_p([0,T],Y)$ в $L_q([0,T],X^*)$; тогда сопряженный к нему оператор K^* будет действовать из $L_p([0,T],X)$ в $L_q([0,T],Y^*)$.

2° Оператор K_2 — вообще говоря, нелинейный, действует из $L_p([0,T],X)$ в $L_p([0,T],Y)$ и полунепрерывен, т.е. он всякую сильно сходящуюся к некоторому $u\in L_p([0,T],X)$ последовательность переводит в последовательность, слабо сходящуюся к $K_2u\in L_p([0,T],Y)$. Кроме того, пусть для любого $u\in L_p([0,T],X)$ выполняется неравенство

$$\|K_2(u)\|_{Y,p}\leqslant C(\|u\|_{X,p}^{p-1}+1), \tag{1.11}$$

где C — некоторое положительное число, которое не зависит от $u\in L_p([0,T],X)$.

3° Оператор $K_3(u)$ также, вообще говоря, нелинейный, действует из $L_p([0,T],X)$ в $L_q([0,T],X^*)$, полунепрерывен и для него выполняется неравенство

$$\|K_3(u)\|_{X^*,q}\leqslant C_1(\|u\|+1). \tag{1.11'}$$

4° Существуют числа $\gamma>0$, $\varkappa>0$, независящие от $u\in L_p([0,T],X)$, такие, что для любого $u\in L_p([0,T],X)$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}K(u,u)\geqslant\gamma\|u\|_{X,p}^p-\varkappa, \tag{1.12}$$

где
$$K(u,v)=[K_2(u),K_1^*,v]+[K_3(u),v],$$
$$u,v\in L_p([0,T],X).$$

5° Существует положительная непрерывная функция $C(R,\varrho)$ двух вещественных переменных $R\geqslant 0$, $\varrho\geqslant 0$, причем

$$\lim_{\xi\to+0}\frac{C(R,\xi\varrho)}{\xi}=0,$$

так, что выполняется условие полуограниченности

$$\operatorname{Re}\{K(u,u-v)-K(v,u-v)\}\geqslant -C(R,\|u-v\|_{B,p}) \tag{1.13}$$

для любого элемента $u\in L_p([0,T],X)$ из шара $\|u\|_{X,p}\leqslant R$ и любого $v\in L_p([0,T],X)$.

При указанных условиях будем исследовать разрешимость задачи (1.1), (1.2) в слабом смысле для любого $h\in L_q([0,T],X^*)$.

Под *слабым решением* задачи (1.1), (1.2) будем понимать любой элемент $u\in H'_{p,q}(X,X^*)$, для которого выполняется соотношение

$$\left[\frac{du}{dt},v\right]+K(u,v)=[h,v] \tag{1.14}$$

для любого $v(t)\in\overset{\circ}{H}_p([0,T],X)$ и который при $t=0$ совпадает с заданным элементом $u_0\in X$.

Пусть $f(t)\in H'_{p,q}(X,X^*)$ так, что $f(0)=u_0$. Сформулируем теорему, содержащую основной результат работы.

Теорема 1.2. *Пусть операторы $K_i (i=1,2,3)$ такие, что для них выполняются условия 1°-5° и пусть $f(t)\in H'_{p,q}(X,X^*)$ является продолжением начального условия (1.2). Тогда задача (1.1), (1.2) при любом $h\in L_q([0,T],X^*)$ имеет хотя бы одно слабое решение, принадлежащее пространству $H'_{p,q}(X,X^*)$.*

Для доказательства этой теоремы предварительно исследуем следующую специальную задачу:

Дано уравнение

$$-\varepsilon u_\varepsilon''(t)+u_\varepsilon'(t)+K_1K_2(u_\varepsilon)+K_3(u_\varepsilon)=h \tag{1.15}$$

при начальных условиях

$$u_\varepsilon(0)=u_0, \tag{1.16}$$

$$u_\varepsilon'(T)=0, \tag{1.17}$$

где $\varepsilon>0$ — произвольный малый параметр.

Задачу (1.15), (1.16), (1.17) будем решать методом Галеркина. Под *решением* этой задачи при фиксированном $\varepsilon>0$ будем понимать такую функцию $u_\varepsilon(t)\in H'_{p,2}(X,H)$, для которой выполняется соотношение

$$\varepsilon[u_\varepsilon'(t),v'(t)]+[u_\varepsilon'(t),v(t)]+K(u_\varepsilon,v)=[h,v] \tag{1.18}$$

при любом $v(t)\in\overset{\circ}{H'}_{p,2}(X,H)$ и которая при $t=0$, $t=T$ удовлетворяет начальным условиям (1.16), (1.17).

Имеет место

Теорема 1.3. *При выполнении условий* 1°-5° *задача* (1.15), (1.16), (1.17) *для любого* $h \in L_q([0,T], X^*)$ *при каждом достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *имеет хотя бы одно слабое решение, которое может быть получено как слабый предел некоторой последовательности галеркинских приближений, при этом полученное однопараметрическое семейство* $\{u_\varepsilon(t)\}$ *решений обладает следующими свойствами*:

1. *Семейство* $\{u_\varepsilon(t)\}$ *равномерно ограничено в пространстве* $L_p([0,T], X)$.

2. *Семейство* $\{u'_\varepsilon(t)\}$ *равномерно ограничено в пространстве* $L_q([0,T], X^*)$.

3. *Семейство* $\{\sqrt{\varphi(\varepsilon)}\,u'_\varepsilon\}$ *равномерно ограничено в* $L_2([0,T], H)$, *где* $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon^2/2$.

Доказательство. Выберемв $\overset{\circ}{H}{}'_{p,2}(X, H)$ полную систему $\{v_\nu(t)\}$, которую будем считать ортонормированной.

Пусть V^n — конечномерное подпространство, натянутое на первые n элементов системы. Приближенное слабое решение задачи (1.15), (1.16), (1.17) будем искать в виде

$$u_{\varepsilon n}(t) = f(t) + z_{\varepsilon n}(t),$$

где $z_{\varepsilon n}(t) \in V^n$, т.е.

$$z_{\varepsilon n}(t) = \sum_{\nu=1}^{n} C^n_{\varepsilon\nu} v_\nu(t),$$

где $C^n_{\varepsilon\nu}$ суть числа, которые определяются из следующей системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\varepsilon[u'_{\varepsilon n}(t), v'_\nu(t)] + [u'_{\varepsilon n}(t), v_\nu(t)] + K(u_{\varepsilon n}, v_\nu) = [h, v_\nu], \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.18'}$$

Существование чисел $C^n_{\varepsilon\nu}$, удовлетворяющих системе (1.18′), вытекает из следующей леммы Вишика (ср. с [8]):

Лемма 1.1. *Пусть дана конечная система нелинейных уравнений*

$$A_j(\vec{C}) = A_j(C_1, C_2, \ldots, C_n) = h_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.19}$$

где A_j — *непрерывные функции своих аргументов, определенные для* $-\infty < C_j < +\infty$. *Если*

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{n} A_j(\vec{C})C_j \geqslant \gamma|\vec{C}|^{1+\varepsilon} - \varkappa_0,$$

$$|\vec{C}| = \Big(\sum_{i=1}^{n} C_i^2\Big)^{1/2},$$

то система (1.19) *имеет, по крайней мере, одно решение при любых заданных* h_j. *Здесь* γ *и* $\varkappa_0$ *не зависят от* $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Проверим выполнение условий этой леммы для системы (1.18′). Положим

$$A_j(C_1, C_2, \ldots, C_n) = \varepsilon[u'_{\varepsilon n}(t), v'_j] + [u'_{\varepsilon n}(t), v_j] + K(u_{\varepsilon n}, v_j).$$

Отсюда получаем

$$\sum_{j=1}^{n} A_j(C_1, C_2, \ldots, C_n)C_j = \varepsilon[u'_{\varepsilon n}(t), z'_{\varepsilon n}(t)] + [u'_{\varepsilon n}(t), z_{\varepsilon n}(t)] + K(u_{\varepsilon n}, z_{\varepsilon n}).$$

Так как $z_{\varepsilon n}(t) = u_{\varepsilon n}(t) - f(t)$, то

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} A_j(C_1, C_2, \ldots, C_n)C_j = \varepsilon[u'_{\varepsilon n}(t), u'_{\varepsilon n}(t)] &+ \\ &+ [u'_{\varepsilon n}(t), u_{\varepsilon n}(t)] + K\big(u_{\varepsilon n}(t), u_{\varepsilon n}(t)\big) - \\ &- \varepsilon[u'_{\varepsilon n}(t), f'(t)] - [u'_{\varepsilon n}(t), f(t)] - K\big(u_{\varepsilon n}, f(t)\big).\end{aligned}$$

Используя интегрирование по частям и неравенства (1.11), (1.11′), (1.12), находим

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{n} A_j(C_1, C_2, \ldots, C_n)C_j \\ &\geqslant \varepsilon\|u'_{\varepsilon n}(t)\|^2_{H,2} + \frac{1}{2}\big(u_{\varepsilon n}(T), u_{\varepsilon n}(T)\big) - \frac{1}{2}\big(u_{\varepsilon n}(0), u_{\varepsilon n}(0)\big) + \gamma\|u_{\varepsilon n}\|^p_{X,p} - \\ &\quad - \varkappa - \frac{\varepsilon^2}{2}\|u'_{\varepsilon n}(t)\|^2_{H,2} - \frac{1}{2}\|f'(t)\|^2_{H,2} - \operatorname{Re}[u_{\varepsilon n}(t), f'(t)] - \operatorname{Re}\big(u_{\varepsilon n}(T), f(T)\big) + \\ &\quad + \operatorname{Re}(u_{\varepsilon n}(0), f(0)) - C\|u_{\varepsilon n}\|^{p-1}_{H,p}\|K_1^* f(t)\|_{Y^*,q} - C\|K_1^* f(t)\|_{Y^*,q} - \\ &\quad - C_1\|u_{\varepsilon n}\|^{p-1}_{X,p}\|f(t)\|_{X,p} - C_1\|f\|_{X,p} \geqslant \\ &\geqslant \Big(\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}\Big)\|u'_{\varepsilon n}\|^2_{H,2} + \\ &\quad + \Big(\gamma - \frac{\delta_1^p}{p} - \frac{\delta_2^q}{q} - \frac{\delta_2^q}{q}\Big)\|u_{\varepsilon n}\|^p_{X,p} - \frac{1}{2}\|u_0\|^2_H - \frac{1}{2}\|f'(t)\|^2_{H,2} - \\ &\quad - \frac{1}{q\delta_1^q}\|f'(t)\|^q_{X^*,q} + \big(u_0, f(0)\big) - \frac{C^p}{p\delta_2^p}\|K_1^* f(t)\|_{Y^*,q} - \\ &\quad - C\|K_1^* f(t)\|_{Y^*,q} - \frac{C^p}{p\delta_3^p}\|f(t)\|^p_{X,p} - C_1\|f(t)\|_{X,p}.\end{aligned} \tag{1.20}$$

При выводе последнего неравенства использовалось неравенство Юнга. Выбрав ε, δ_1, δ_2, δ_3 достаточно малыми такими, что

$$\varphi(\varepsilon) \equiv \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} > 0, \qquad \gamma_0 = \gamma - \frac{\delta_1^p}{p} - \frac{\delta_2^q}{q} - \frac{\delta_3^q}{q} > 0,$$

получим

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{n} A_j(C_1, C_2, \ldots, C_n)C_j \geqslant \gamma_0 \|u_{\varepsilon n}\|_{X,p} - \varkappa_0,$$

где $\varkappa_0$ — некоторое положительное постоянное число, которое не зависит от $u_{\varepsilon n}$ и от ε и зависит от $f(t)$ и от u_0, p, q. Далее, т.к. в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, то при $p>1$

$$\|u_{\varepsilon n}(t)\|_{X,p}^{p} \geqslant \tilde{C}\|u_{\varepsilon n}\|_{H,2}^{2} = \tilde{C}\Big(\sum_{\nu=1}^{n} C_{\varepsilon\nu}^{2}\Big)^{p},$$

следовательно, выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{n} A_j(C_1, C_2, \ldots, C_n)C_j \geqslant \gamma\Big(\sum_{\nu=1}^{n} C_{\varepsilon\nu}^{2}\Big)^{p/2} - \varkappa_0 = \gamma|\vec{C}|^{p} - \varkappa_0,$$

где $\gamma = \tilde{C}\gamma_0$.

Непрерывность $A_j(C_{\varepsilon 1}^{n}, C_{\varepsilon 2}^{n}, \ldots, C_{\varepsilon n}^{n})$ по $C_{\varepsilon k}^{n}$ вытекает из полунепрерывности операторов K_2, K_3. Следовательно, все условия леммы 1.1 выполняются, т.е. система (1.18′) имеет хотя бы одно решение $(C_{\varepsilon 1}^{n}, C_{\varepsilon 2}^{n}, \ldots, C_{\varepsilon n}^{n})$.

Перейдем к выводу априорных оценок для галеркинских приближений. Умножим обе части ν-го уравнения (1.18′) на найденные выше $C_{\varepsilon\nu}^{n}$. Просуммировав полученные выражения по ν от 1 до n, получим

$$\varepsilon[u_{\varepsilon n}'(t), z_{\varepsilon n}'] + [u_{\varepsilon n}'(t), z_{\varepsilon n}(t)] + K(u_{\varepsilon n}, z_{\varepsilon n}) = [h, z_{\varepsilon n}].$$

Учитывая, что $z_{\varepsilon n} = u_{\varepsilon n} - f$, и вновь повторяя операции, приведшие к неравенству (1.20), получим следующее неравенство:

$$\varphi(\varepsilon)\|u_{\varepsilon n}'\|_{H,2}^{2} + \gamma_0\|u_{\varepsilon n}\|_{X,p}^{p} - \varkappa_0 \leqslant |[h, u_{\varepsilon n}]| + |[h, f]|.$$

Применяя к первому члену правой части последнего неравенства сначала неравенство Шварца, а затем неравенство Юнга, мы получаем основное неравенство

$$\varphi(\varepsilon)\|u_{\varepsilon n}'\|_{H,2}^{2} + \gamma_1\|u_{\varepsilon n}\|_{X,p}^{p} \leqslant M, \tag{1.21}$$

где

$$M = \varkappa_0 + \frac{1}{\delta_3^{q}\cdot q}\|h\|_{X^*,q}^{q} + |[h, f]|,$$

$$\gamma_1 = \gamma - \frac{\delta_1^{p}}{p} - \frac{\delta_2^{q}}{q} - \frac{\delta_3^{q}}{q}$$

при достаточно малых $\varepsilon > 0$, δ_i $(i = 1, 2, 3)$.

Ясно, что $\varphi(\varepsilon) > 0$, $\gamma_1 > 0$.

Аналогичные априорные оценки получим для галеркинских приближений $z_{\varepsilon n}(t)$:

$$\varphi(\varepsilon)\|z_{\varepsilon n}'\|_{H,2}^{2} + \gamma_2\|z_{\varepsilon n}\|_{X,p}^{p} \leqslant M_1. \tag{1.22}$$

Априорные оценки (1.21), (1.22) позволяют установить разрешимость вспомогательной задачи, следовательно, и основной.

В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$ достаточно мало и фиксировано. Неравенство (1.22) дает равномерную ограниченность семейств $\{z_{\varepsilon n}(t)\}$, $\{z_{\varepsilon n}'\}$ в $Lp([0, T], X)$ и в $\underset{\circ}{H}_{p,2}$, соответственно:

$$\|z_{\varepsilon n}\|_{X,p} \leqslant M, \tag{1.23}$$

$$\|z_{\varepsilon n}'\|_{H,2} \leqslant M_1. \tag{1.24}$$

Ввиду рефлексивности вышеуказанных пространств существует подпоследовательность $\{z_{\varepsilon r}(t)\}$, которая слабо сходится к некоторому элементу $z_\varepsilon(t)$ в $L_p([0, T], X)$, а последовательность $\{z_{\varepsilon r}'(t)\}$ — к dz_ε/dt в $\underset{\circ}{H}_{p,2}(X, H)$.

Ясно, что отображение $H_{p,2}'(X, H)$ в $L_p([0, T], X)$ определено и непрерывно.

Ввиду наличия вложения $X \subset B \subset H$ и так как первое вложение компактно, на основании теоремы 1.1 заключаем, что указанное отображение будет компактным из $H_{p,2}'(X, H)$ в $L_p([0, T], B)$. На основании неравенств (1.23), (1.24),

$$z_{\varepsilon n}(t) \in \underset{\circ}{H}_{p,2}'(X, H) \subset H_{p,2}'(X, H)$$

и формулы (1.9) для нормы в $H_{p,2}^{1}(X, H)$ имеем

$$\|z_{\varepsilon r}\|_{p,2}' \leqslant M_3.$$

Тогда $\{z_{\varepsilon r}\}$ указанным отображением переводится в компактное семейство в $L_p([0, T], B)$. Следовательно, из семейства $\{z_{\varepsilon r}(t)\}$ можно выделить сильно сходящуюся в $L_p([0, T], B)$ подпоследовательность $\{z_{\varepsilon m}(t)\}$. Полученная подпоследовательность $\{z_{\varepsilon m}(t)\}$ при $m \to \infty$ обладает следующей сходимостью:

1. $z_{\varepsilon m}(t) \to z_\varepsilon(t)$ слабо в $L_p([0, T], X)$,
2. $z_{\varepsilon m}'(t) \to z_\varepsilon'(t)$ слабо в $\underset{\circ}{H}_{p,2}([0, T], H)$,
3. $z_{\varepsilon m}(t) \to z_\varepsilon(t)$ сильно в $L_p([0, T], B)$.

Далее, т. к. $u_{\varepsilon m}(t) = f(t) + z_{\varepsilon m}(t)$, то при $m \to \infty$ получаем следующее соотношение

$$u_\varepsilon(t) = f(t) + z_\varepsilon(t).$$

Покажем, что $u_\varepsilon(t)$ является решением вспомогательной задачи (1.15), (1.16), (1.17). Для этого соотношение (1.18) перепишем в виде

$$\varepsilon[u'_{\varepsilon m}(t), v'(t)]+[u'_{\varepsilon m}(t), v(t)]+K\big(u_{\varepsilon m}(t), v(t)\big) = [h, v(t)], \quad v\in V^l,\ l<m. \tag{1.25}$$

Если учесть оценку (1.11) и равномерную ограниченность последовательности $\{u_{\varepsilon m}(t)\}$, то легко видеть, что совокупность $\{K_2(u_{\varepsilon m})\}$ равномерно ограничена в пространстве $L_p([0,T], Y)$. Кроме того, совокупность $K_\varepsilon(u_{\varepsilon m})$ равномерно ограничена в $L_q([0,T], X^*)$ и ввиду рефлексивности пространств $L_p([0,T], Y)$ и $L_q([0,T], X^*)$ последовательности $\{K_2(u_{\varepsilon m})\}$ и $\{K_3(u_{\varepsilon m})\}$ будут слабо сходиться к некоторым пределам ω_ε и w_ε, соответственно (в случае надобности выделяется подпоследовательность). Это дает возможность в (1.25) перейти к пределу при $m\to\infty$ при фиксированном l:

$$\varepsilon[u'_\varepsilon(t), v'(t)]+[u'_\varepsilon(t), v(t)]+[\omega_\varepsilon, K_1^*]+[w_\varepsilon, v(t)] = [h, v(t)], \quad v(t)\in V^l. \tag{1.26}$$

Теперь, т.к. множество $\bigcup\limits_l V^l$ всюду плотно в $\mathop{H}\limits_{\circ}{}'_{p,2}(X, H)$, то, замыкая его в норме $\mathop{H}\limits_{\circ}{}'_{p,2}(X, H)$, получаем, что соотношение (1.26) остается в силе для любого $v\in \mathop{H}\limits_{\circ}{}'_{p,2}(X, H)$. Далее, т. к. $u_{\varepsilon m}(t) = f(t)+z_{\varepsilon m}(t)$, то для любого $e\in H$ мы имеем

$$\big(u_{\varepsilon m}(t), e\big) = \big(f(t), e\big)+\big(z_{\varepsilon m}(t), e\big).$$

Переходя здесь к пределу при $t\to 0$, получаем $\big(u_{\varepsilon m}(0), e\big) = (u_0, e)$, а значит

$$\lim_{m\to\infty}\big(u_{\varepsilon m}(0), e\big) = (u_0, e).$$

Последнее означает, что $u_\varepsilon(t)$ удовлетворяет начальному условию (1.16). Аналогично проверяется выполнение условия (1.17).

Основываясь на условии полуограниченности (1.13) и теореме 1.1, покажем, что для любого $v\in \mathop{H}\limits_{\circ}{}'_{p,2}(X, H)$ справедливо тождество

$$K(u_\varepsilon, v) \equiv [\omega_\varepsilon, K_1^* v]+[w_\varepsilon, v], \tag{1.27}$$

чем будет доказано ввиду (1.26), что $u_\varepsilon(t)$ является слабым решением уравнения (1.18).

В силу неравенства (1.13) получаем

$$\operatorname{Re}\{K(u_{\varepsilon m}, u_{\varepsilon m}-v)-K(v, u_{\varepsilon m}-v)\} \geqslant -C\big(R, \|u_{\varepsilon m}(t)-v(t)\|_{B,p}\big).$$

К левой части этого неравенства прибавим положительный член $\varepsilon[u'_{\varepsilon m}(t)-v', u'_{\varepsilon m}(t)-v']$, а затем к обеим частям полученного неравенства прибавим выражение

$$\operatorname{Re}[u'_{\varepsilon m}-v', u_{\varepsilon m}-v] \equiv \tfrac{1}{2}\|u_{\varepsilon m}(T)-v(T)\|_H^2-\tfrac{1}{2}\|u_{\varepsilon m}(0)-v(0)\|_H^2.$$

В правой части полученного неравенства, отбрасывая положительный член $\frac{1}{2}\|u_{\varepsilon m}(T)-v(T)\|^2_{B,p}$, мы получаем:

$$\begin{aligned}\varepsilon[u'_{\varepsilon m}-v', u'_{\varepsilon m}-v']&+\operatorname{Re}[u'_{\varepsilon m}-v', u_{\varepsilon m}-v]+\\ &+\operatorname{Re}\{K(u_{\varepsilon m}, u_{\varepsilon m}-v)-K(v, u_{\varepsilon m}-v)\}\geqslant\\ &\geqslant -C(R, \|u_{\varepsilon m}-v\|_{B,p})-\tfrac{1}{2}\|u_{\varepsilon m}(0)-v(0)\|_H^2.\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая соотношение (1.25), в котором надо заменить $v(t)$ через $u_{\varepsilon m}(t)-v(t)$ мы получаем следующее неравенство:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[h, u_{\varepsilon m}(t)-v(t)]-\operatorname{Re}\varepsilon[v', u'_{\varepsilon m}-v']-\operatorname{Re}[v', u_{\varepsilon m}-v]-\operatorname{Re}K(v, u_{\varepsilon m}-v)\geqslant\\ \geqslant -C(R, \|u_{\varepsilon m}-v\|_{B,p})-\tfrac{1}{2}\|u_{\varepsilon m}(0)-v(0)\|_H^2.\end{aligned}$$

Как видно из полученного соотношения, здесь отсутствуют нелинейные члены $K_2(u_{\varepsilon m})$ и $K_3(u_{\varepsilon m})$, следовательно, если в нем перейти к пределу при $m\to\infty$, в силу теоремы 1.1 и слабой непрерывности оператора K_1 получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[h, u_\varepsilon(t)-v(t)]-\operatorname{Re}\varepsilon[v', u'_\varepsilon(t)-v'(t)]-\operatorname{Re}[v', u_\varepsilon-v]-\operatorname{Re}K(v, u_\varepsilon-v)\geqslant\\ \geqslant -C(R, \|u_\varepsilon(t)-v\|_{B,p})-\tfrac{1}{2}\|u_\varepsilon(0)-v(0)\|_H^2.\end{aligned}$$

Принимая теперь во внимание соотношение (1.26), будем иметь

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\{\varepsilon[u'_\varepsilon(t)-v'(t), u'_\varepsilon(t)-v'(t)]&+[u'_\varepsilon(t)-v'(t), u_\varepsilon(t)-v(t)]+\\ +[\omega_\varepsilon, K_1^*\big(u_\varepsilon(t)-v(t)\big)]&+[w_\varepsilon, u_\varepsilon(t)-v(t)]-K(v, u_\varepsilon-v)\}\geqslant\\ &\geqslant -C(R, \|u_\varepsilon(t)-v(t)\|_{B,p})-\tfrac{1}{2}\|u_\varepsilon(0)-v(0)\|_H^2.\end{aligned}$$

В последнем неравенстве, положив $v = u_\varepsilon-\xi z$, где $\xi>0$, а z — произвольный элемент пространства $H'_{p,2}(X, H)$ получим

$$\begin{aligned}\xi^2\operatorname{Re}\{\varepsilon[z', z']+[z', z]\}&+\xi\operatorname{Re}\{[\omega_\varepsilon, K_1^*z]+\\ &+[w_\varepsilon, z]\}-\xi\operatorname{Re}\{[K_2(u_\varepsilon-\xi z), K_1^*z]+[K_3(u_\varepsilon-\xi z), z]\}\geqslant\\ &\geqslant -C(R, \xi\|z\|_{B,p})-\frac{\xi^2}{2}\|z(0)\|_H^2.\end{aligned}$$

Разделив на ξ и переходя к пределу при $\xi\to 0$, учитывая полунепрерывность операторов K_2 и K_3, получаем, что при любом $z\in \mathop{H}\limits_{\circ}{}'_{p,2}(X, H)$ имеет место неравенство

$$\operatorname{Re}\{[\omega_\varepsilon-K_2(u_\varepsilon), K_1^*z]+[w_\varepsilon-K_3(u_\varepsilon), z]\}\geqslant 0. \tag{1.28}$$

В силу произвольности z последнее соотношение верно лишь в случае, когда

$$[\omega_\varepsilon, K_1^* z] + [w_\varepsilon, z] \equiv [K_2(u_\varepsilon), K_1^* z] + [K_3(u_\varepsilon), z]$$

(при получении последнего тождества из неравенства (1.28) мы использовали тот факт, что его мнимая часть также равна нулю, что легко получить заменой z на iz в самом неравенстве), т.е. тождество (1.27) доказано, а значит

$$\varepsilon[u_\varepsilon', v'] + [u_\varepsilon', v] + K(u_\varepsilon, v) = [h, v] \tag{1.26'}$$

при любом $v \in \overset{\circ}{H}{}^1_{p,2}(X, H)$.

Следовательно, $u_\varepsilon(t)$ действительно является решением вспомогательной задачи.

Перейдем к доказательству второй части теоремы 1.3. В соотношении (1.26′) произведем замену $v(t) \equiv u_\varepsilon(t) - f(t)$:

$$\varepsilon[u_\varepsilon'(t), u_\varepsilon'(t)] + [u_\varepsilon'(t), u_\varepsilon(t)] + K(u_\varepsilon, u_\varepsilon) =$$
$$= [h, u_\varepsilon] + \varepsilon[u_\varepsilon'(t), f'(t)] + [u_\varepsilon'(t), f(t)] + K(u_\varepsilon, f) - [h, f].$$

Рассуждениями, аналогичными тем, при помощи которых была получена априорная оценка (1.21), из последнего соотношения $u_\varepsilon(t)$ получаем априорную оценку

$$\varphi(\varepsilon)\|u_\varepsilon'\|^2_{H,2} + \gamma_3\|u_\varepsilon\|^p_{X,p} \leqslant M_3, \tag{1.29}$$

где M_3 — некоторое положительное число, которое не зависит от u_ε, но зависит от h, f; γ_3 — также положительное постоянное число и $\varphi(\varepsilon) > 0$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Из неравенства (1.29) можем сделать заключение о равномерной ограниченности семейства $\{u_\varepsilon\}$:

$$\|u_\varepsilon\|^p_{X,p} \leqslant M_2.$$

Теперь докажем равномерную ограниченность $\{u_\varepsilon'(t)\}$ в $L_q([0, T], X^*)$. Для этого в (1.26′) положим $v(t) = e\varphi(t)$, где $e \in X$, $\varphi(t) \in C_0^\infty(0, T)$, тогда первый член этого соотношения принимает вид

$$\varepsilon\int_0^T (u_\varepsilon'(t), e)\varphi'(t)\,dt = -\varepsilon\int_0^T (u_\varepsilon'(t), e)\varphi(t)\,dt = -\varepsilon[u_\varepsilon'', v].$$

Следовательно, из (1.26′) получаем

$$[-\varepsilon u_\varepsilon'' + u_\varepsilon', v] + K(u_\varepsilon, v) = [h, v]$$

для любого $v \in \overset{\circ}{H}{}^2_{p,2}(X, H)$.

Положим

$$-\varepsilon u_\varepsilon'' + u_\varepsilon' = h_\varepsilon, \tag{1.30}$$

так что

$$[h_\varepsilon, v] = [h, v] - K(u_\varepsilon, v). \tag{1.31}$$

Оценим (1.31) сверху:

$$|[h_\varepsilon, v]| \leqslant$$
$$\leqslant \|h\|_{X^*,q}\|v\|_{X,p} + C(\|u_\varepsilon\|^{p-1}_{X,p} + 1)\|K_1^*\|\,\|v\|_{X,p} + C_1\|u_\varepsilon\|^{p-1}_{X,p}\|v\|_{X,p} + C_1\|v\|_{X,p} \leqslant$$
$$\leqslant \|h\|_{X^*,q}\|v\|_{X,p} + M_3\|v\|_{X,p} + (C\|K_1^*\| + C_1)\|v\|_{X,p},$$

где $M_3 = (C\|K_1\| + C_1)M_2^{1/q}$.

Из последнего неравенства заключаем, что

$$\sup_{v \in \overset{\circ}{H}{}'_{p,q}(X,H)} \frac{|[h_\varepsilon, v]|}{\|v\|_{X,p}} \leqslant M_4,$$

где $M_4 = \|h\|_{X^*,q} + M_3 + C\|K_1^*\| + C_1$. Это показывает, что $h_\varepsilon \in L_q([0, T], X^*)$ и $\|h_\varepsilon\|_{X^*,q} \leqslant M_4$. Далее в силу соотношения (1.30) и неравенства (1.29) при фиксированном достаточно малом $\varepsilon > 0$. получаем, что

$$u_\varepsilon''(t) \in L_q([0, T], X^*).$$

Но тогда для любого $v \in \overset{\circ}{H}{}'_{p,2}(X, H)$ мы имеем, что

$$[-u_\varepsilon'', v] = [u_\varepsilon', v'] - (u_\varepsilon'(T), v(T)).$$

Из (1.30) получаем

$$[-\varepsilon u_\varepsilon'', v] + [u_\varepsilon', v] = [h_\varepsilon, v]$$

или, преобразуя, имеем

$$\varepsilon[u_\varepsilon', v'] + [u_\varepsilon', v] - \varepsilon(u_\varepsilon'(T), v(T)) = [h_\varepsilon, v]. \tag{1.32}$$

Принимая во внимание соотношение (1.26′), из (1.32) получаем тождество

$$[h, v] - K(u_\varepsilon, v) - \varepsilon(u_\varepsilon'(T), v(T)) = [h_\varepsilon, v].$$

Учитывая соотношение (1.31), приходим к равенству

$$(u_\varepsilon'(T), v(T))_H = 0.$$

Отсюда, вследствие плотности $v(T)$ в H, получаем начальное условие

$$u_\varepsilon'(T) = 0, \tag{1.33}$$

которое понимается в слабом смысле.

Итак, для определения $u_\varepsilon'(t)$ мы получаем задачу Коши для уравнения (1.30) при начальном условии (1.33).

Решение этой задачи представляется формулой

$$u_\varepsilon'(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^T h_\varepsilon(T-\eta)\, e^{-(\tau-\eta)/\varepsilon} d\eta,$$

где $\tau = T-t$.

Оценивая последний интеграл в норме пространства $L_q([0, T], X^*)$ с помощью интегрального неравенства Минковского вида

$$\Big[\int\Big\{\int f(x, y)\,dy\Big\}^q dx\Big]^{1/q} < \int\Big\{\int f^q(x, y)\,dx\Big\}^{1/q} dy,$$

получаем, что $\|u_\varepsilon'\|_{X^*,q} < M_5$, где M_5 не зависит от ε. Следовательно, $u_\varepsilon'(t)\in L_q([0, T], X^*)$.

Из неравенства (1.29) получаем также равномерную ограниченность семейства $\{\sqrt{\varphi(\varepsilon)}\, u_\varepsilon'(t)\}$ в $L_2([0, T], H)$.

Итак, теорема 1.3 полностью доказана.

Теперь докажем теорему 1.2. На основании только что доказанной теоремы $\{u_\varepsilon(t)\}, \{u_\varepsilon'(t)\}, \{K_2(u_\varepsilon)\}, \{K_3(u_\varepsilon)\}$ суть равномерно ограниченные семейства в соответствующих пространствах. Тогда из указанных семейств можно выделить бесконечное подмножество (опять его обозначим через $\{u_\varepsilon(t)\}$), для которого имеют место следующие сходимости:

(а) семейство $\{u_\varepsilon(t)\}$ при $\varepsilon\to 0$ в пространстве $L_p([0, T], X)$ слабо сходится к некоторому элементу $u\in L_p([0, T], X)$

(б) семейство $\{u_\varepsilon'(t)\}$ при $\varepsilon\to 0$ слабо сходится к некоторому $u'\in L_q([0, T], X^*)$.

(в) семейства $\{K_2(u_\varepsilon)\}, \{K_3(u_\varepsilon)\}$ при $\varepsilon\to 0$ слабо сходятся к $\omega\in L_p([0, T], Y)$, $w\in L_q([0, T], X^*)$, соответственно.

(г) семейство $\{\varepsilon u_\varepsilon'\}$ при $\varepsilon\to 0$ слабо сходится к нулю в $L_2([0, T], H)$.

Утверждения (а), (б) и (в) вытекают из рефлексивности пространств $L_p([0, T], X)$, $L_p([0, T], Y)$ и $L_q([0, T], X^*)$.

Справедливость (г) устанавливается на основании следующей оценки

$$|\varepsilon[u_\varepsilon', v]| \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon/2}}\, \|\sqrt{\varphi(\varepsilon)}\, u_\varepsilon'\|_{H,2}\|v\|_{H,2} \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon/2}}\, \sqrt{M_2}\|v\|_{H,2}.$$

Отсюда, очевидно, что $\varepsilon u_\varepsilon' \to 0$ слабо при $\varepsilon\to 0$. Учитывая указанные сходимости и переходя в соотношении (1.26) к пределу при $\varepsilon\to 0$, мы получаем

$$[u', v]+[\omega, K_1^* v]+[w, v] = [h, v] \tag{1.34}$$

для любого $v\in \overset{\circ}{H}{}'_{p,2}(X, H)$.

Так как $\overset{\circ}{H}{}'_{p,2}(X, H)$ плотно в $\overset{\circ}{H}_p([0, T], X)$, то соотношение (1.34) остается справедливым при любом $v\in \overset{\circ}{H}_p([0, T], X)$. Легко показать, что $u(0) = 0$ в слабом смысле.

Остается доказать справедливость тождества

$$[\omega, K_1^* v]+[w, v] \equiv [K_2(u), K_1^* v]+[K_3(u), v] \tag{1.35}$$

для любого $v\in \overset{\circ}{H}_p([0, T], X)$.

Это утверждение доказывается по схеме аналогичной доказательству тождества (1.27). Учитывая указанные утверждения, мы получаем, что найденное $u\in H'_{p,q}(X, X^*)$ для любого $v\in \overset{\circ}{H}_p([0, T], X])$ удовлетворяет соотношению

$$[u', v]+K(u, v) = [h, v]. \tag{1.36}$$

Тем самым показано, что $u\in H'_{p,q}(X, X^*)$ является слабым решением задачи (1.1), (1.2).

Замечание 1.1. Теорема 1.2 доказана нами при предположениях 1°, 2°, 3°, наложенных на операторы K_1, K_2, K_3. Однако возможны другие условия на операторы K_1, K_2 и K_3, при которых теорема 1.2 остается справедливой с соответствующей модификацией. Вчастности, можно взять линейный ограниченный оператор K_1^*, действующий из $L_p([0, T], X)$ в $L_p([0, T], Y)$, а нелинейный оператор K_2, действующий из $L_p([0, T], X)$ в $L_q([0, T], Y^*)$, причем остальные условия предполагаются выполненными с учетом областей определения и значения операторов K_1, K_2 и K_3.

Далее отметим один важный класс уравнений вида (1.1).

Условие полуограниченности (1.13) использовалось лишь при доказательстве тождества (1.35), причем операторы K_2, K_3 предполагались полунепрерывными, а оператор K_1 — линейным ограниченным. Если, в частности, операторы K_2, K_3 будут слабонепрерывными и выполняется лишь неравенство (1.12), то, переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ в соотношении (1.26′), убеждаемся, что задача (1.1), (1.2) имеет слабое решение.

Этот частный класс операторных уравнений содержит также квазилинейные параболические дифференциальные уравнения, которые не являются не сильно параболическими и не монотонными уравнениями.

Далее, в теореме 1.2 нами было установлено существование слабого решения задачи Коши (1.1), (1.2) без единственности её решения. Вопрос о единственности решения задачи Коши решает следующая

Теорема 1.4. *Если выполняются условия* 1°-4° *теоремы* 1.2 *и если для любых* u, v *из* $H'_{p,q}(X, X^*)$ *выполняется условие сильной монотонности*

$$\mathrm{Re}\{K(u, u-v)-K(v, u-v)\} \geqslant C\|u-v\|^p_{X,p}, \tag{1.37}$$

то задача (1.1), (1.2) *имеет единственное решение в* $H'_{p,q}(X, X^*)$.

В самом деле, пусть u_1, u_2 суть два слабых решения задачи (1.1), (1.2). Тогда ввиду того, что каждый элемент u_1, u_2 удовлетворяет соотношению (1.36), разность u_1-u_2 для любого $v \in \mathring{H}_p([0, T], X)$ будет удовлетворять тождеству $[u'_1-u'_2, v]+K(u_1, v)-K(u_2, v) = 0$ и $u_1(0)-u_2(0) = 0$ при $t = 0$.

Положив в этом тождестве $v = u_1-u_2$, получим

$$[u'_1-u'_2, u_1-u_2]+K(u_1, u_1-u_2)-K(u_2, u_1-u_2) = 0. \tag{1.38}$$

Так как $\mathrm{Re}[u'_1-u'_2, u_1-u_2] = \frac{1}{2}\|u_1(T)-u_2(T)\|^2_H$, то в силу (1.37) из (1.38) получаем

$$\tfrac{1}{2}\|u_1(T)-u_2(T)\|^2_H+C\|u_1-u_2\|^p_{X,p} \leqslant 0.$$

Следовательно, $u_1 = u_2$.

Таким образом доказаны существование и единственность решения задачи (1.1), (1.2). Тем самым доказано существование обратного оператора K_0^{-1}, который каждому элементу $h \in L_q([0, T], X^*)$ сопоставляет единственный элемент пространства $H'_{p,q}(X, X^*)$, являющийся решением задачи Коши (1.1), (1.2). Теперь покажем его непрерывность.

Пусть $h_\nu \in L_q([0, T], X^*)$ и $\|h_\nu-h\|_{X^*,q} \to 0$ при $\nu \to \infty$. Слабые решения задачи (1.1), (1.2), отвечающие правой части уравнения (1.1) h и h_ν, соответственно, обозначим через $u(t)$ и u_ν. Тогда в соответствии с (1.36) получаем соотношение

$$[u'-u'_\nu, u-u_\nu]+K(u, u-u_\nu)-K(u_\nu, u-u_\nu) = [h-h_\nu, u-u_\nu]. \tag{1.39}$$

Переходя к оценке действительной части соотношения (1.39), получаем, что

$$C\|u-u_\nu\|^{p-1}_{X,p} \leqslant \|h-h_\nu\|_{X^*,q}.$$

Так как $p > 1$, то $u_\nu(t) \to u(t)$ при $\nu \to \infty$.

Покажем, что $u'_\nu(t) \to u'(t)$ в $L_p([0, T], X)^*$.

Так как

$$\|u'(t)-u'_\nu(t)\|_{X^*,q} = \sup_v \frac{|[u'-u'_\nu, v]|}{\|v\|_{X,p}} \leqslant \sup_v \frac{|[h-h_\nu, v]|+|K(u, v)-K(u_\nu, v)|}{\|v\|_{X,p}} \leqslant$$
$$\leqslant \|h-h_\nu\|_{X^*,q}+\sup_v \frac{|K(u, v)-K(u_\nu, v)|}{\|v\|_{X,p}},$$

причем

$$\sup_v \frac{|K(u, v)-K(u_\nu, v)|}{\|v\|_{X,p}} \to 0 \quad \text{при} \quad \nu \to \infty.$$

В самом деле, так как

$$K(u, v)-K(u_\nu, v) = [K_2(u)-K_2(u_\nu), K^*v]+[K_3(u)-K_3(u_\nu), v],$$

то

$$\left|\frac{K(u, v)-K(u_\nu, v)}{\|v\|_{X,p}}\right| \leqslant |[K_2(u)-K_2(u_\nu), K_1^*, w]|+|[K_3(u)-K_3(u_\nu), w]|, \tag{1.40}$$

где w — любой элемент из единичного шара пространства $L_p([0, T], X)$. Так как операторы $K_2(u)$ и $K_3(u)$ суть полунепрерывные и последовательность $\{u_\nu\}$ сильно сходится к $u(t)$ в $L_p([0, T], X)$, то правая часть неравенства (1.40) при $\nu \to 0$ стремится к нулю, что показывает справедливость нашего утверждения.

Итак, имеет место

Теорема 1.5. *При выполнении условий теоремы* 1.4 *отображение*

$$K_0 = \frac{d}{dt}+K_1K_2(\ )+K_3(\ )$$

пространства $H'_{p,q}(X, X^*)$ *в пространство* $L_q([0, T], X^*)$ *есть гомеоморфизм.*

В связи с доказательством теоремы 1.2 сделаем одно важное замечание. При доказательстве этой теоремы мы видели, что семейство решений $\{u_\varepsilon(t)\}$ вспомогательной задачи (1.15)-(1.17) при $\varepsilon \to 0$ слабо сходится к решению основной задачи (1.1), (1.2). Однако, при выполнении условий теоремы 1.4 указанное семейство при $\varepsilon \to 0$ не только сходится слабо к $u(t)$, но и сильно в метрике $L_p([0, T], X)$.

В самом деле, пусть $u(t)$ есть слабый предел при $\varepsilon \to 0$ семейства $\{u_\varepsilon(t)\}$ решений задачи (1.15)-(1.17). Тогда в силу (1.18) и (1.36) для любого $v \in \mathring{H}^1_p([0, T], X)$ будем иметь соотношение

$$\varepsilon[u'_\varepsilon(t), v'(t)]+[u'_\varepsilon(t)-u'(t), v(t)]+K(u_\varepsilon, v)-K(u, v) = 0.$$

Положив здесь $v = u_\varepsilon-u$, получим

$$[u'_\varepsilon(t)-u'(t), u_\varepsilon(t)-u(t)]+K(u_\varepsilon, u_\varepsilon-u)-K(u, u_\varepsilon-u) = -\varepsilon[u'_\varepsilon, u'_\varepsilon-u'].$$

Отсюда в силу (1.37) получаем

$$C\|u_\varepsilon-u\|^{p-1}_{X,p} \leqslant \varepsilon\|u'_\varepsilon\|_{H,2} < \sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon/2}}\sqrt{M} \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$, т.е. $u_\varepsilon \to u$ сильно в $L_p([0, T], X)$.

II. ПРИЛОЖЕНИЕ К СМЕШАННЫМ ЗАДАЧАМ

Полученные в первой части общие результаты применим теперь к установлению разрешимости смешанной задачи для одного квазилинейного параболического уравнения.

В работах [1] и [2] автором рассмотрены аналогичные вопросы для стационарных уравнений. Полученные общие результаты применимы также для установления разрешимости нелинейных интегральных и функциональных уравнений. Указанная схема также применима к нелинейным задачам механики (см. работу [12]).

Предварительно введем некоторые функциональные пространства, являющиеся конкретной реализацией пространств из первой части, приспособленные для постановки и решения задачи.

Пусть Ω — некоторая ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве R^n с достаточно гладкой границей Γ; $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — точка области Ω, $t\in[0,T]$; $Q=\Omega\times[0,T]$ — цилиндр с боковой поверхностью $S=\Gamma\times[0,T]$.

Определим пространство $W_{p_i}^{(m_i)}(Q)$ как пространство функций с нормой

$$(2.1)\qquad \|u\|_{m_i,p_i}=\left(\int_0^T\int_\Omega\left|\frac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}}\right|^{p_i}dx\,dt\right)^{1/p_i}<\infty.$$

Введем векторы с числовыми координатами $\vec{p}=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$, $\vec{m}=(m_1,m_2,\ldots,m_n)$, где m_i — неотрицательные целые числа, $p_i\geqslant 2$. Далее пусть $W_{\vec{p}}^{(\vec{m})}(Q)$ есть пространство функций с нормой

$$(2.1')\qquad \|u\|_{\vec{m},\vec{p}}=\sum_{i=1}^n\left(\int_0^T\int_\Omega\left|\frac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}}\right|^{p_i}dx\,dt\right)^{1/p_i}<\infty.$$

Пространство линейных непрерывных функционалов над $W_{\vec{p}}^{(\vec{m})}(Q)$ обозначим через $W_{\vec{q}}^{(-\vec{m})}$ где $\vec{q}=(q_1,q_2,\ldots,q_n)$, $q_i=p_i(p_i-1)^{-1}$. Далее, пусть $\mathring{W}_{\vec{p}}^{(\vec{m})}(Q)$ — пополнение множества $C_0^\infty(Q)$ в норме (2.1′). Пространство $L_{\vec{q}}$ определяется, как пространство функций f с нормой

$$\|f\|_{\vec{q}}=\sum_{i=1}^n\left(\int_0^T\int_\Omega|f|^{q_i}dx\,dt\right)^{1/q_i}.$$

Введем также пространство $H_{\vec{p},\vec{q}}(\mathring{W}_{\vec{p}}^{(\vec{m})},\mathring{W}_{\vec{q}}^{(-\vec{m})})$ функций

$$u(x,t)\in\mathring{W}_{\vec{p}}^{(\vec{m})}(Q),$$

производные по t которых принадлежат пространству $\mathring{W}_{\vec{q}}^{(-\vec{m})}$. Норма в этом пространстве вводится следующим образом:

$$(2.2)\qquad \|u\|^{1}_{\vec{p},\vec{q}}=\|u\|_{\vec{m},\vec{p}}+\left\|\frac{du}{dt}\right\|_{-\vec{m},\vec{q}}$$

В дальнейшем используется

Лемма 2.1. *Пусть* $u(x,t)\in\mathring{W}_{\vec{p}}^{(\vec{m})}(Q)$; *тогда существуют такие положительные постоянные* C, C_0, *независящие от* u, *что выполняется неравенство*

$$(2.3)\qquad \sum_{i=1}^n\int_0^T\left(\int_\Omega\left|\frac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}}\right|^{p_i}dx\right)dt\geqslant C\|u\|^{p_0}_{\vec{m},\vec{p}}-C_0,$$

где $p_0=\min(p_1,p_2,\ldots,p_n)$.

Доказательство. Введем обозначение

$$(2.4)\qquad a_i=\int_0^T\left(\int_\Omega\left|\frac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}}\right|^{p_i}dx\right)dt\qquad(i=1,2,\ldots,n).$$

Легко проверяется справедливость алгебраического неравенства

$$(2.5)\qquad \sum_{i=1}^n a_i\geqslant C\left(\sum_{i=1}^n a_i^{1/p_i}\right)^{p_0}-C_0,$$

выполняющегося для некоторых $C, C_0>0$. Подставив (2.4) в (2.5), получаем неравенство (2.3).

Рассмотрим смешанную задачу для параболического уравнения

$$(2.6)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^n(-1)^{m_i}\frac{\partial^{m_i}}{\partial x_i^{m_i}}\left(a_i(x,t)\left|\frac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}}\right|^{p_i-1}+\right.$$
$$\left.+b_i(x,t)\left|\frac{\partial^{n_i}u}{\partial x_i^{n_i}}\right|^{r_i}\right)\operatorname{sign}\frac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}}=h(x,t)$$

в пространстве $\overset{1}{\underset{\circ}{H}}_{\vec{p},\vec{q}}(\mathring{W}_{\vec{p}}^{(\vec{m})},\mathring{W}_{\vec{q}}^{(-\vec{m})})$, где $n_i<m_i$, $r_i<p_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ коэффициенты $a_i(x,t)$, $b_i(x,t)$, для простоты, предполагаются непрерывными в Q функциями, причем

$$a_i(x,t)>a_0>0,\qquad b_i(x,t)\geqslant b_0\geqslant 0\qquad(i=1,2,\ldots,n).$$

Отметим, что в уравнении (2.6) производные от искомой функции по разным координатным направлениям имеют разные порядки и принадлежат лебеговским пространствам L_{p_i}.

Для установления разрешимости смешанной задачи (2.6) сведем её к задаче Коши для операторного уравнения вида (1.1), (1.2) и проверим выполнение всех условий теоремы 1.2.

С этой целью введем следующие вектор-операторы:

$$(2.6')\quad \begin{cases} K_1 = (K_1', K_2', \ldots, K_n'), \quad K_1^* = (K_1^{1*}, \ldots, K_n^{1*}), \\ K_2 = (K_1^2, K_2^2, \ldots, K_n^2), \quad K_i^1 = (-1)^{m_i}\dfrac{\partial^{m_i}}{\partial x^{m_i}}, \\ K_i^{1*} = \dfrac{\partial^{m_i}}{\partial x_i^{m_i}}, \\ K_i^2(u) = \left(a_i(x,t)\left|\dfrac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}}\right|^{p_i-1} + b_i(x,t)\left|\dfrac{\partial^{n_i}u}{\partial x_i^{n_i}}\right|^{r_i}\right)\operatorname{sign}\dfrac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}}, \\ \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Действия введенных вектор-операторов определим формулой:

$$K(u, v) \equiv [K_2(u), K_1^* v] = \sum_{i=1}^{n} [K_i^2(u), K_i^{1*} v].$$

Перейдем к проверке выполнения условий теоремы 1.2.

Вначале проверим выполнение неравенства (1.12), т.е. неравенства

$$(2.6'')\qquad K(u, u) \geqslant C_1 \|u\|^{p_0}_{\vec{m}, \vec{p}} - C_2.$$

Линейный оператор K_1^* непрерывно действует из $W^{(\vec{m})}_{\vec{p}}(Q)$ в $L_{\vec{p}}(Q)$, а оператор $K_2(u)$ действует из $W^{(\vec{m})}_{\vec{p}}(Q)$ в $L_{\vec{q}}(Q)$.

Очевидно

(2.7)

$$K(u, u) = \sum_{i=1}^{n}\left[a_i(x,t)\left|\frac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}}\right|^{p_i-1}\operatorname{sign}\frac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}}, \frac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}}\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\left[b_i(x,t)\left|\frac{\partial^{n_i}u}{\partial x_i^{n_i}}\right|^{r_i}\operatorname{sign}\frac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}}, \frac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}}\right] \geqslant$$

$$\geqslant a_0 \sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega \left|\frac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}}\right|^{p_i} dx\,dt + b_0 \sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega \left|\frac{\partial^{n_i}u}{\partial x_i^{n_i}}\right|^{r_i}\left|\frac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}}\right| dx\,dt.$$

Первое слагаемое правой части последнего неравенства оценим на основании леммы 2.1:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^T\int_\Omega \left|\frac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}}\right|^{p_i} dx\,dt\right) \geqslant C\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^T\int_\Omega \left|\frac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}}\right|^{p_i} dx\,dt\right)^{1/p_i}\right]^{p_0} - C_0 =$$

$$= C\|u\|^{p_0}_{\vec{m}, \vec{p}} - C_0.$$

Покажем, что второй член в правой части неравенства (2.7) конечен, тогда, т.к. он неотрицателен, то, отбрасывая его, получим неравенство (1.12).

Оценим слагаемое второго члена правой части в (2.7) по неравенству Гельдера:

$$(2.8)\qquad \int_0^T\int_\Omega \left|\frac{\partial^{n_i}u}{\partial x_i^{n_i}}\right|^{r_i}\left|\frac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}}\right| dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^T\int_\Omega \left|\frac{\partial^{n_i}u}{\partial x_i^{n_i}}\right|^{\alpha_i r_i} dx\,dt\right)^{1/\alpha_i}\left(\int_0^T\int_\Omega \left|\frac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}}\right|^{\beta_i} dx\,dt\right)^{1/\beta_i}.$$

Полагая $\alpha_i r_i = p_i$, получим, что $\beta_i = p/(p_i - r_i)$, при этом вследствие определения нормы (2.1) получаем конечность первого сомножителя. При этом использовалось известное неравенство

$$\int_Q |u|^{p_i} dx\,dt \leqslant K\left(\int_Q |D_j u|^{p_i} dx + \int_{\partial Q} |u|^{p_i} d\gamma\right)$$

для финитных в Q функций (см. напр. [10]).

Покажем теперь конечность второго сомножителя. Так как $1/(p_i - r_i) < 1$, то воспользовавшись очевидным неравенством

$$\int_0^T |v|^\beta dt \leqslant C\left(\int_0^T |v|\,dt\right)^\beta \qquad (\beta < 1)$$

получаем конечность второго сомножителя. Итак, выполнение неравенства (1.12) для задачи (2.6) проверено.

Проверим теперь выполнение неравенства (1.13), т.е. покажем, что для любого $v \in \overset{\circ}{W}{}^{(\vec{m})}_{\vec{p}}(Q)$ из шара $\|v\|_{\vec{m}, \vec{p}} \leqslant K$ и любого $u \in \overset{\circ}{W}{}^{(\vec{m})}_{\vec{p}}(Q)$ справедливо неравенство

$$(2.9)\qquad K(u, u-v) - K(v, u-v) \geqslant -C(R, \|u-v\|_{\vec{m}-1, \vec{p}}),$$

где

$$\lim_{\xi \to +0} \frac{C(R, \varrho\xi)}{\xi} = 0.$$

Выражение, стоящее в левой части неравенства (2.9), оценим снизу:

$$(2.10)\qquad K(u,u-v)-K(v,u-v)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega a_i(x,t)\left[\left|\frac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}}\right|^{p_i-1}\operatorname{sign}\frac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}}-\right.$$
$$\left.-\left|\frac{\partial^{m_i}v}{\partial x_i^{m_i}}\right|^{p_i-1}\operatorname{sign}\frac{\partial^{m_i}v}{\partial x_i^{m_i}}\right]\frac{\partial^{m_i}(u-v)}{\partial x_i^{m_i}}\,dx\,dt+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega b_i(x,t)\left[\left|\frac{\partial^{n_i}u}{\partial x_i^{n_i}}\right|^{r_i}\operatorname{sign}\frac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}}-\right.$$
$$\left.-\left|\frac{\partial^{n_i}v}{\partial x_i^{n_i}}\right|^{r_i}\operatorname{sign}\frac{\partial^{m_i}v}{\partial x_i^{m_i}}\right]\frac{\partial^{m_i}(u-v)}{\partial x_i^{m_i}}\,dx\,dt\equiv I_1+I_2.$$

Учитывая равенство

$$(2.11)\qquad f(u)-f(v)=(u-v)\int_0^1\frac{\partial(f\theta)}{\partial\theta}\,d\tau,$$

где $\theta=v+\tau(u-v)$, и вводя обозначение

$$f(u)\equiv\left|\frac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}}\right|^{p_i-1}\operatorname{sign}\frac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}},$$

для I_1 получим следующее выражение:

$$I_1\equiv\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega a_i(x,t)\frac{\partial^{m_i}(u-v)}{\partial x_i^{m_i}}(p_i-1)\times$$
$$\times\left\{\int_0^1\left|\frac{\partial^{m_i}v}{\partial x_i^{m_i}}+\tau\frac{\partial^{m_i}(u-v)}{\partial x_i^{m_i}}\right|^{p_i-2}d\tau\right\}\frac{\partial^{m_i}(u-v)}{\partial x_i^{m_i}}\,dx\,dt.$$

Легко проверяется справедливость такого неравенства

$$\int_0^1\left|\frac{\partial^{m_i}v}{\partial x_i^{m_i}}+\tau\frac{\partial^{m_i}(u-v)}{\partial x_i^{m_i}}\right|^{p_i-2}d\tau\geqslant C_1\left|\frac{\partial^{m_i}(u-v)}{\partial x_i^{m_i}}\right|^{p_i-2}$$

с некоторой константой $C_1>0$.

Следовательно, учитывая еще, что $a_i(x,t)>a_0>0$, $p_i-1\geqslant 1$ и лемму 2.1, получаем

$$(2.12)\qquad I_1>a_0C_1\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega\left|\frac{\partial^{m_i}(u-v)}{\partial x_i^{m_i}}\right|^{p_i}dx\,dt\geqslant C_2\|u-v\|_{\vec m,\vec p}^{p_0}-\varkappa.$$

Применением к I_2 формулы (2.11), неравенства Гельдера и Юнга для всех v из шара $\|v\|_{\vec m,\vec p}\leqslant R$ легко доказывается справедливость неравенства

$$I_2\leqslant C_2\varepsilon\|u-v\|_{\vec m,\vec p}^{p_0}+\varphi(R,\|u-v\|_{\vec m-1,\vec p}),$$

где φ есть функция типа функции C из формулы (1.13).

Теперь, объединяя полученные оценки для I_1 и I_2, получаем

$$K(u,u-v)-K(v,u-v)\geqslant(C_1-C_2\varepsilon)\|u-v\|_{\vec m,\vec p}^{p_0}-C(R,\|u-v\|_{\vec m-1,\vec p}).$$

Выбирая ε таким, чтобы $C_1-C_2\varepsilon=0$, видим справедливость неравенства (1.13) для задачи (2.6), т.е.

$$(2.13)\qquad K(u,u-v)-K(v,u-v)\geqslant -C(R,\|u-v\|_{\vec m-1,\vec p}).$$

Остается доказать полунепрерывность оператора

$$K_2(u)=\left(K_1^2(u),\ldots,K_n^2(u)\right).$$

Оператор $K_2(u)$ действует из $\mathring{W}\equiv\mathring{W}_{p_1}^{(m_1)}(Q)\times\ldots\times\mathring{W}_{p_n}^{(m_n)}(Q)$ в $L\equiv L_{q_1}(Q)\times\ldots\times L_{q_n}(Q)$. Действительно,

$$\int_Q|K_i^2(u)|^{q_i}dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\int_Q\left\{a_i(x,t)\left|\frac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}}\right|^{p_i-1}+b_i(x,t)\left|\frac{\partial^{n_i}u}{\partial x_i^{n_i}}\right|^{r_i}\right\}^{q_i}dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant C\int_Q\left(1+\left|\frac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}}\right|^{p_i-1}\right)^{q_i}dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant 2^{q_i}C\operatorname{mes}Q+2^{q_i}C\int_Q\left|\frac{\partial^{m_i}u}{\partial x_i^{m_i}}\right|^{p_i}dx\,dt<\infty$$

для любого i $(i=1,2,\ldots,n)$.

Проверим, что оператор $K_i^2(u)$ непрерывно действует из $W_{p_i}^{(m_i)}(Q)$ в $L_{q_i}(Q)$ для каждого i $(i=1,2,\ldots,n)$.

Для этого воспользуемся леммой Вайнберга [5]:

Лемма 2.2. *Для того, чтобы оператор $h(v)=g(v(x),x)$, где $g(v,x)$ функция, удовлетворяющая условиям Каратеодори, был непрерывным оператором, действующим из L_p в L_{p_1} $(p,p_1>0)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$|g(v,x)|\leqslant a(x)+b|v|^{p/p_1}\qquad(b>0,\ a(x)\in L_{p_1}).$$

Очевидно оператор $K_i^2(u)$ удовлетворяет условиям этой леммы с $p=p_i$, $p_1=q_i$, $p/p_i=p_i-1$.

В силу того, что топологии пространства $W^{(\vec{m})}_{\vec{p}}(Q)$ с нормой (2.1′) и пространства $\mathring{W}$, равно как и топологии пространств $L_{\vec{q}_0}(Q)$ и L, эквивалентны, оператор $K_2(u)$ непрерывно действует из $\mathring{W}^{(\vec{m})}_{\vec{p}}(Q)$ в $L_{\vec{q}}(Q)$. Легко проверяется также выполнение неравенства (1.11):

$$\|K_2 u\|_{\vec{q}} \leqslant C(\|u\|^{p_0-1}_{\vec{p},\vec{m}}+1). \tag{2.14}$$

В результате доказана

Теорема 2.1. *Смешанная задача для параболического уравнения* (2.6) *в пространстве* $H^1_{o\,\vec{p},\vec{q}}(\mathring{W}^{(\vec{m})}_{\vec{p}}, \mathring{W}^{(-\vec{m})}_{\vec{q}})$ *всегда разрешима при любой правой части из пространства* $\mathring{W}^{(-\vec{m})}_{\vec{q}}(Q)$.

Теорема единственности для уравнения (2.6), вообще говоря, не имеет места, однако в случае отсутствия младших членов в самом уравнении (2.6) ($b_i(x,t)\equiv 0$) будут выполняться неравенства

$$K(u,u)\geqslant C\|u\|^{p_0}_{\vec{m},\vec{p}}-C_0,$$

$$K(u,u-v)-K(v,u-v)\geqslant \gamma\|u-v\|^{p_0}_{\vec{m},\vec{p}}$$

и значит будет верна теорема единственности для уравнения (2.6).

В этом случае заметим, что смешанная задача для уравнения, полученного из исходного уравнения (2.6) возмущением младшими членами, возможно будет иметь конечное или бесконечное число решений.

Цитированная литература

[1] Г. Н. Агаев, *К теории нелинейных операторных уравнений в пространстве Гильберта*, Известия АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук 5 (1966), стр. 9-16.

[2] — *О разрешимости нелинейных операторных уравнений в пространстве Банаха*, ДАН СССР 174, № 6 (1967), стр. 1239-1242.

[3] F. Browder, *Nonlinear elliptic boundary value problems*, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), стр. 862-874.

[4] — *Strongly nonlinear parabolic boundary value problems*, Amer. J. Math. 86 (1964), стр. 339-357.

[5] М. М. Вайнберг, *Вариационные методы исследования нелинейных операторов*, Москва 1956.

[6] — и Р. И. Качуровский, *О вариационной теории нелинейных операторов и уравнений*, ДАН СССР 129 (1959), стр. 1199-1202.

[7] М. И. Вишик, *О разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений*, Матем. сб. 19 (101), 289 (1962), стр. 288-325.

[8] — *Квазилинейные сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений*, Труды Московского матем. об-ва 12 (1963), стр. 125-184.

[9] И. Ц. Гохберг, М. К. Замбицкий, *К теории линейных операторов в пространствах с двумя нормами*, Укр. матем. журнал 18, № 1 (1966), стр. 11-23.

[10] Ю. А. Дубинский, *Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях*, 1965, Матем. сб. 67 (109): 4, стр. 609-642.

[11] — *Нелинейные параболические уравнения на плоскости*, там же 1966, т. 69 (111): 3, стр. 470-496.

[12] — *Об одной операторной схеме и разрешимости ряда квазилинейных уравнений механики*, ДАН СССР 176, № 3 (1967), стр. 506-508.

[13] С. Г. Крейн, А. С. Симонов, *Теорема о гомеоморфизмах и квазилинейные уравнения*, там же 167, № 6 (1966), стр. 1226-1228.

[14] О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Москва 1964.

[15] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Москва 1967.

[16] J. Leray, L. Lions, *Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques nonlinéaires par les méthodes de Minty-Browder*, Bull. Soc. Math. France 93 (1965), стр. 97-107.

[17] L. Lions, *Sur certaines équations parabolique non linéaires*, тамже 93 (1965), стр. 155-175

[18] G. S. Minty, *Monotone* (nonlinear) *operators in Hilbert space*, Duke Math. J. 29 (1962), стр. 341-446.

[19] J. P. Aubin, *Un théorème de compacité*, C. R. Acad. Sci. 256 (1963), стр. 5042-5044.

[20] О. А. Олейник, С. Н. Кружков, *Квазилинейные параболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными*, УМН 16, в. 5 (1961), стр. 115-155.

[21] L. Schwartz, *Théorie des distributions à valeurs vectorielles I, II*, Ann. Inst. Fourier 7 (1957), cép. 1-139; 8 (1958), стр. 1-209.

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

Reçu par la Rédaction le 5. 3. 1968