Le domaine de variation de la fonctionnelle $K[F(\zeta), \overline{F(\zeta)}, F'(\zeta), \overline{F'(\zeta)}]$ dans la famille des fonctions méromorphes et univalentes dans le cercle $|z| > 1$

par W. PLASKOTA (Kraków)

§ 1

1. Soit

$$(1.1) \quad F(z) = cz + c_0 + \frac{c_1}{z} + \dots$$

une fonction holomorphe et univalente dans le cercle $|z| > 1$, $z \neq \infty$, admettant un pôle simple au point $z = \infty$ et non nulle. Nous désignerons par $\tilde{\Sigma}$ la famille de toutes les fonctions de la forme (1.1). Pour les fonctions de cette famille on a $F'(\infty) = c$. En particulier, quand $c = 1$, nous désignons cette famille par Σ . Soit z_0 , $|z_0| > 1$, un point fixé. Dans les paragraphes suivants nous nous occuperons de la sous-classe $\Sigma(z_0) \subset \tilde{\Sigma}$ des fonctions qui satisfont à la condition $F(z_0) = z_0$. Si $F(z) \in \tilde{\Sigma}$ et $z_0 \neq \infty$, la fonction $\Phi(z)$ définie par la formule

$$(1.2) \quad \Phi(z) = \frac{F(z)}{F(z_0)} z_0$$

appartient à la famille $\Sigma(z_0)$. Par $\Sigma(\infty)$ nous entendrons la famille des fonctions $\Phi(z)$ qui sont définies par la formule

$$\Phi(z) = \lim_{z_0 \rightarrow \infty} \frac{F(z)}{F(z_0)/z_0}, \quad F(z) \in \tilde{\Sigma},$$

c'est-à-dire des fonctions de la forme

$$\Phi(z) = z + \frac{c_0}{c} + \frac{c_1/c}{z} + \dots$$

2. Pour étudier le domaine de variation de la fonctionnelle mentionnée dans le titre de ce travail nous nous appuyerons sur des formules variationnelles que nous établirons dans la suite pour les fonctions de la

classe $\Sigma(z_0)$. Ces formules peuvent être obtenues indirectement, en profitant des relations qui existent entre les fonctions des classes $\tilde{\Sigma}$ et $\tilde{S}$, où $\tilde{S}$ désigne la famille de toutes les fonctions $f(z)$, $f(0) = 0$, holomorphes et univalentes dans le cercle $|z| < 1$. Dans ce travail nous établirons ces formules d'une façon directe. Les formules variationnelles pour la classe S ont été obtenues par Goluzin (v. [1]) comme conséquences d'un théorème correspondant relatif aux fonctions de cette classe. Nous rappellerons ici ce théorème avec les modifications que nécessite l'étude de la famille $\tilde{S}$.

THÉOREME 1. *Supposons données une fonction $F(z) \in \tilde{\Sigma}$ et une fonction $F(z, \lambda)$ des variables z et λ , holomorphes par rapport aux variables λ et z respectivement dans le cercle $|\lambda| < \lambda_0$ et dans l'anneau $1 < |z| \leq R$, ($R > 1$), univalente pour $0 \leq \lambda < \lambda_0$ et z satisfaisant à la condition $1 < |z| < R$. Si, de plus, la fonction $F(z, \lambda)$ s'exprime, pour tout z de l'anneau $1 < |z| < R$ et pour λ petits, par la formule*

$$(1.3) \quad F(z, \lambda) = F(z) + \lambda q(z) + O(\lambda^2),$$

alors, en adjoignant à l'image de l'anneau $1 < |z| < R$ dans la représentation effectuée par la fonction $F(z, \lambda)$ le domaine extérieur par rapport à l'image de la circonférence $|z| = R$, on obtient un domaine simplement connexe B contenant le point $z = \infty$.

La fonction $F_\lambda(z)$ qui effectue la représentation univalente du cercle $|z| > 1$ sur B s'exprime par la formule:

$$(1.4) \quad F_\lambda(z) = F(z) + \lambda q(z) - \lambda z F'(z) [S(z) + c] + \lambda z F'(z) [S(1/\bar{z}) + c] + O(\lambda^2),$$

où $S(z)$ est la somme des termes qui sont des puissances positives de z dans le développement de la fonction $q(z)/zF'(z)$ dans l'anneau $1 < |z| < R$, c est une constante arbitraire, enfin $O(\lambda^2)$ est une fonction des variables z et λ telle que pour tout z fixé de l'anneau $1 < |z| < R$ son rapport à λ^2 est borné.

La démonstration du théorème 1 est analogue à celle du théorème correspondant établi dans le travail [3] pour les fonctions de la famille $\tilde{S}$.

§ 2

Du théorème 1 on déduit les deux théorèmes suivants pour les fonctions $F(z)$ de la famille $\Sigma(z_0)$.

THÉOREME 2. *Si la fonction $F(z)$, $F(z) \in \Sigma(z_0)$ représente le cercle $|z| > 1$ sur un domaine ayant des points extérieurs et a est l'un d'eux, et si $\lambda > 0$ est suffisamment petit, la fonction définie par la formule*

$$(2.1) \quad F_\lambda(z) = F(z) + A\lambda F(z) \frac{a[z_0 - F(z)]}{[F(z) - a](z_0 - a)} + O(\lambda^2)$$

appartient à la classe $\Sigma(z_0)$.

THÉOREME 3. Si la fonction $F(z) \in \Sigma(z_0)$, $a \in F(|z| > 1)$ et si $\lambda > 0$ est suffisamment petit, la fonction définie par la formule

$$(2.2) \quad F_\lambda(z) = F(z) + \lambda R(z, z_0, b) + O(\lambda^2),$$

où

$$R(z, z_0, b) = AH^2(b)T(z, z_0, b) + \overline{A} \overline{H^2(b)} T\left(z, z_0, \frac{1}{\overline{b}}\right) - AU(z, z_0, b),$$

$$U(z, z_0, b) = \frac{F(z)F(b)[F(z) - z_0]}{[F(b) - F(z)][F(b) - z_0]}, \quad H(b) = \frac{F(b)}{bF'(b)},$$

$$b = F^{-1}(a), \quad T(z, z_0, b) = \frac{1}{2}zF'(z)\frac{b+z}{b-z} - \frac{1}{2}F(z)F'(z_0)\frac{b+z_0}{b-z_0},$$

appartient à la classe $\Sigma(z_0)$.

§ 3

1. Considérons la fonction analytique

$$(3.1) \quad K[F, \overline{F}, \dots, F^{(n)}, \overline{F^{(n)}}]$$

des variables $F, \overline{F}, \dots, F^{(n)}, \overline{F^{(n)}}$ définie dans le domaine

$$\{|F| < \infty, |\overline{F}| < \infty, \dots, |F^{(n)}| < \infty, |\overline{F^{(n)}}| < \infty\}$$

et la fonctionnelle

$$(3.2) \quad K(F) = K[F(\zeta), \overline{F(\zeta)}, \dots, F^{(n)}(\zeta), \overline{F^{(n)}(\zeta)}]$$

définie dans la famille $\Sigma(z_0)$, où $\zeta, |\zeta| > 1, \zeta \neq z_0$ est un point fixé.

Nous appelons *domaine de variation* de la fonctionnelle (3.2) l'ensemble de tous les points $K(F)$ du plan complexe lorsque $F(z)$ parcourt la famille $\Sigma(z_0)$. Nous désignerons ce domaine par $D_n(\zeta)$.

La famille $\Sigma(z_0)$ étant compacte, l'ensemble $D_n(\zeta)$ est fermé et borné. De plus, comme il est l'image homéomorphe d'un cercle, cet ensemble est un domaine. Désignons par $\Gamma_n(\zeta)$ la frontière du domaine $D_n(\zeta)$ et par $F^*(z)$ une fonction telle que

$$(3.3) \quad K(F^*) \subset \Gamma_n(\zeta).$$

Toute fonction $F^*(z), F^*(z) \in \Sigma(z_0)$, satisfaisant à la condition (3.3) sera appelée *fonction frontière* par rapport à la fonctionnelle $K(F)$.

Soit $\dot{K}$ un point quelconque extérieur du domaine $D_n(\zeta)$. Il existe alors un point K^* de la frontière $\Gamma_n(\zeta)$ tel que

$$(3.4) \quad |K^* - \dot{K}| \leq |K - \dot{K}|$$

pour tous les points K' appartenant au domaine $D_n(\zeta)$ et à un voisinage suffisamment petit du point K . L'ensemble $\Gamma'_n(\zeta)$ des points K^* est dense dans l'ensemble $\Gamma_n(\zeta)$. Fermant l'ensemble $\Gamma'_n(\zeta)$ on obtient l'ensemble $\Gamma_n(\zeta)$ (v. [1]).

En profitant de la propriété extrémale (3.4) des points frontières et de la formule variationnelle (2.2), nous allons trouver l'équation différentielle des fonctions frontières appartenant à l'ensemble $\Gamma'_n(\zeta)$ (les fonctions frontières appartenant à l'ensemble $\Gamma_n(\zeta) \setminus \Gamma'_n(\zeta)$ s'obtiennent comme limites de suites de fonctions frontières $F^*(\zeta)$ lorsque $K[F^*(\zeta)] \in \Gamma'_n(\zeta)$).

2. Soit $F^*(z)$ une fonction frontière par rapport à la fonctionnelle (3.2) définie dans la famille $\Sigma(z_0)$. En appliquant la formule variationnelle (2.2) au point $z = \zeta$ et en remplaçant le paramètre variable b par z , on aura:

$$(3.5) \quad F_\lambda(\zeta) = F^*(\zeta) + \lambda R(\zeta, z_0, z) + O(\lambda^2),$$

où

$$R(\zeta, z_0, z) = A H^2(z) T(\zeta, z_0, z) + \bar{A} \bar{H}^2(z) T(\zeta, z_0, 1/\bar{z}) - A U(\zeta, z_0, z)$$

et

$$U(\zeta, z_0, z) = \frac{F^*(\zeta) F^*(z) [F^*(\zeta) - z_0]}{[F^*(z) - F^*(\zeta)] [F^*(z) - z_0]}, \quad H(z) = \frac{F^*(z)}{z F^{**}(z)},$$

$$T(\zeta, z_0, z) = \frac{1}{2} \zeta F^{**}(\zeta) \frac{z + \zeta}{z - \zeta} - \frac{1}{2} F^{**}(z_0) F^*(\zeta) \frac{z + z_0}{z - z_0}.$$

Posons

$$(3.6) \quad \Delta K = K(F_\lambda) - K(F^*),$$

$$(3.7) \quad \Delta F^{*(k)} = F_\lambda^{(k)} - F^{*(k)}, \quad F_\lambda^{(k)} = F_\lambda^{(k)}(\zeta), \quad F^{*(k)} = F^{*(k)}(\zeta)$$

pour $k = 0, 1, 2, \dots, n$, et

$$(3.8) \quad L(F^*) = \sum_{k=0}^n [p_k R_\zeta^{(k)}(\zeta, z_0, z) + q_k \overline{R_\zeta^{(k)}(\zeta, z_0, z)}]$$

avec

$$p_k = K'_{F^{(k)}}(F^*), \quad q_k = \overline{K'_{F^{(k)}}(F^*)}.$$

La dérivée d'ordre k de la fonction $F_\lambda(\zeta)$, donnée par la formule (3.5), s'exprime par la formule

$$F_\lambda^{(k)}(\zeta) = F^{*(k)}(\zeta) + \lambda R_\zeta^{(k)}(\zeta, z_0, z) + O(\lambda^2),$$

donc

$$\Delta F^{*(k)} = \lambda R_\zeta^{(k)}(\zeta, z_0, z) + O(\lambda^2).$$

En mettant dans (3.4) $K^* = K(F^*)$, $K = K(F_\lambda)$ et en posant

$$(3.9) \quad \beta = \exp[i \arg(\overline{K^* - K})]$$

on peut donner à la condition (3.4) la forme équivalente

$$(3.10) \quad |\Delta K|^2 + 2|K^* - \dot{K}| \operatorname{re}(\beta \Delta K) \geq 0.$$

La fonctionnelle $K(F)$ se développe en série de puissances dans le voisinage du point F^* ; on a donc, en tenant compte de (3.6) et (3.8),

$$(3.11) \quad \Delta K = \lambda L(F^*) + O(\lambda^2).$$

En substituant la valeur de ΔK de (3.11) dans (3.10) on obtient l'inégalité

$$2\lambda|K^* - \dot{K}| \operatorname{re}[\beta L(F^*)] + O(\lambda^2) \geq 0.$$

En divisant les deux membres de cette inégalité par λ et en passant à la limite avec $\lambda \rightarrow 0$, on obtient la condition

$$2|K^* - \dot{K}| \operatorname{re}[\beta L(F^*)] \geq 0,$$

d'où, à cause de $|K^* - \dot{K}| > 0$, résulte la condition

$$(3.12) \quad \operatorname{re}[\beta L(F^*)] \geq 0.$$

En tenant compte de (3.8) on a donc l'inégalité

$$(3.13) \quad \operatorname{re}\{\beta \Sigma[p_k R_\zeta^{(k)}(\zeta, z_0, z) + q_k \overline{R_\zeta^{(k)}(\zeta, z_0, z)}]\} \geq 0.$$

En exprimant $R_\zeta^{(k)}(\zeta, z_0, z)$ par les dérivées des fonctions $U(\zeta, z_0, z)$ et $T(\zeta, z_0, z)$, et en remplaçant les termes qui contiennent le facteur $\bar{A}$ par leurs conjugués, on aura

$$\operatorname{re} A \left\{ \sum_{k=0}^n [-a_k U_\zeta^{(k)}(\zeta, z_0, z) + a_k H^2(z) T_\zeta^{(k)}(\zeta, z_0, z) + \right. \\ \left. + \bar{a}_k H^2(z) \overline{T_\zeta^{(k)}(\zeta, z_0, 1/\bar{z})}] \right\} \geq 0$$

où

$$a_k = \beta p_k + \bar{\beta} \bar{q}_k.$$

Comme A est arbitraire, on obtient l'équation

$$(3.14) \quad \sum_{k=0}^n [-a_k U_\zeta^{(k)}(\zeta, z_0, z) + a_k H^2(z) T_\zeta^{(k)}(\zeta, z_0, z) + \\ + \bar{a}_k H^2(z) \overline{T_\zeta^{(k)}(\zeta, z_0, 1/\bar{z})}] = 0.$$

Les considérations précédentes permettent d'énoncer le

THÉOREME 4. *Toute fonction frontière $F^*(z)$ par rapport à la fonctionnelle (3.2) définie dans la famille $\Sigma(z_0)$ satisfait à l'équation*

$$(3.15) \quad M(w)(zw'/w)^2 = N(z),$$

où

$$(3.16) \quad N(z) = \sum_{k=0}^n [a_k T_{\zeta}^{(k)}(\zeta, z_0, z) + \bar{a}_k \overline{T_{\zeta}^{(k)}(\zeta, z_0, 1/\bar{z})}] ,$$

$$M(w) = \sum_{k=0}^n a_k U_{\zeta}^{(k)}(\zeta, z_0, z) , \quad U(\zeta, z_0, z) = \frac{wv(v-z_0)}{(w-v)(w-z_0)} ,$$

$$T(\zeta, z_0, z) = \frac{1}{2} \zeta v' \frac{z+\zeta}{z-\zeta} - \frac{1}{2} v v_0' \frac{z+z_0}{z-z_0} ,$$

$$F^*(z) = w , \quad F^*(\zeta) = v , \quad F^{*'}(z_0) = v_0' , \quad F'(z) = v' ,$$

$$a_k = p_k \beta + \bar{q}_k \bar{\beta} , \quad p_k = K'_{F^{(k)}}(F^*) , \quad q_k = K'_{\overline{F^{(k)}}}(F^*) ,$$

$\beta, |\beta| = 1$, étant un paramètre.

Remarquons que (3.16) entraîne l'identité

$$(3.17) \quad N(z) = \overline{N(1/\bar{z})} .$$

La propriété (3.17) de la fonction $N(z)$ sera désormais appelée *propriété (N)*.

3. De l'équation (3.15) il résulte que la fonction $w = F^*(z)$ peut être prolongée au-delà de la circonférence $|z| = 1$ sauf en un nombre fini de points. Comme les fonctions $M(w)$ et $N(z)$ sont des fonctions rationnelles de leurs arguments, la frontière du domaine B , sur lequel la fonction frontière représente le cercle $|z| > 1$ est composée d'un nombre fini d'arcs analytiques par intervalles [4].

On peut démontrer le théorème suivant:

THÉOREME 5. *Toute fonction frontière $w = F^*(z)$ par rapport à la fonctionnelle (3.2) définie dans la famille $\Sigma(z_0)$ représente le cercle $|z| > 1$ sur un domaine qu'on obtient en entaillant le plan par un nombre fini d'arcs analytiques par intervalles dont un au moins passe par le point $w = 0$.*

Remarque. Le point $w = 0$ n'appartient pas, par hypothèse, à l'ensemble des valeurs de la fonction, il est donc situé sur la frontière du domaine B . Comme le point $w = \infty$ appartient à l'ensemble des valeurs de la fonction, aucun des arcs qui forment la frontière du domaine B ne contient ce point.

§ 4

1. Dans le cas où $n = 1$ la fonctionnelle (3.2) prend la forme

$$(4.1) \quad K(F) = K[F(\zeta), \overline{F(\zeta)}, F'(\zeta), \overline{F'(\zeta)}] .$$

Nous nous proposons, dans ce qui suit, de trouver le domaine de variation $D_1(\zeta)$ de la fonctionnelle (4.1). Le problème sera résolu lorsque

nous aurons déterminé la frontière $\Gamma_1(\zeta)$ de ce domaine. Comme l'équation de la frontière du domaine des valeurs de la fonctionnelle (4.1) est de la forme

$$(4.2) \quad \Omega = K(V, \bar{V}, V', \bar{V}'), \quad V = F^*(\zeta),$$

il s'agira de trouver les valeurs de $V, \bar{V}, V', \bar{V}'$.

Dans ce but, considérons l'équation (3.15) pour $n = 1$. On aura:

$$(4.3) \quad [a_0 U(\zeta, z_0, z) + a_1 U'_\zeta(\zeta, z_0, z)](zw'/w)^2 \\ = a_0 T(\zeta, z_0, z) + \bar{a}_0 \overline{T(\zeta, z_0, 1/\bar{z})} + a_1 T'_\zeta(\zeta, z_0, z) + \bar{a}_1 \overline{T'_\zeta(\zeta, z_0, 1/\bar{z})}.$$

Après quelques simples transformations on tire de (4.3) l'équation

$$(4.4) \quad w \frac{kw - l}{w(-v)^2(w - z_0)} \left(\frac{zw'}{w} \right)^2 = \frac{L_6(z)}{(z - \zeta)^2(z - 1/\bar{\zeta})^2(z - z_0)(z - 1/\bar{z}_0)},$$

où $k = (a_0 v + a_1 v')(v - z_0) + a_1 v v'$, $l = v^2(a_0 v + a_1 v') - a_0 v^2 z_0$ et $L_6(z)$ est un polynôme de degré 6 au plus.

Comme

$$N(z) = \frac{L_6(z)}{(z - \zeta)^2(z - 1/\bar{\zeta})^2(z - z_0)(z - 1/\bar{z}_0)}$$

on a

$$\overline{N(1/\bar{z})} = \frac{\overline{L_6(1/\bar{z})}}{(z - \zeta)^2(z - 1/\bar{\zeta})^2(z - z_0)(z - 1/\bar{z}_0)} \cdot \frac{z^6 \zeta^2 z_0}{\bar{z}_0 \bar{\zeta}^2}.$$

De la propriété (N) on déduit l'égalité

$$(4.5) \quad L_6(z) = \overline{L_6\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \cdot \frac{z^6 \zeta^2 z_0}{z_0 \bar{\zeta}^2}.$$

Posons

$$L_6(z) = s_0 z^6 + s_1 z^5 + s_2 z^4 + s_3 z^3 + s_4 z^2 + s_5 z + s_6, \quad y = \frac{\zeta^2 z_0}{\bar{\zeta}^2 \bar{z}_0}.$$

En tenant compte de (4.5) on obtient alors les relations

$$(4.6) \quad s_0 = \bar{s}_6 y, \quad s_1 = \bar{s}_5 y, \quad s_2 = \bar{s}_4 y, \quad s_3 = \bar{s}_3 y, \\ s_4 = \bar{s}_2 y, \quad s_5 = \bar{s}_1 y, \quad s_6 = \bar{s}_0 y.$$

Lorsque $z \rightarrow \infty$, on a $w \rightarrow \infty$. Par conséquent le premier membre de l'équation (4.4) tend vers zéro et il doit en être de même du second. Il en résulte que $s_6 = 0$ et $s_0 = 0$. L'équation (4.4) prend alors la forme

$$(4.7) \quad w \frac{kw - l}{(w - v)^2(w - z_0)} \left(\frac{zw'}{w} \right)^2 = \frac{z L_4(z)}{(z - \zeta)^2(z - 1/\bar{\zeta})^2(z - z_0)(z - 1/\bar{z}_0)}.$$

Désignons par B_0 le domaine sur lequel la fonction frontière $F^*(z)$ représente le cercle $|z| > 1$ et par L_0 sa frontière. La frontière L_0 étant composée d'arcs analytiques, il existe sur la circonférence $|z| = 1$ un point $\hat{z}$ tel que $F^*(\hat{z}) = \hat{w}$, où $\hat{w}$ ($\hat{w} \neq 0$) désigne l'origine l'un de ces arcs. La fonction $F^*(z)$ est bivalente sur un arc de la circonférence $|z| = 1$ qui appartient à un voisinage suffisamment petit du point $\hat{z}$, la dérivée de la fonction $F^*(z)$ existe donc en ce point et elle s'y annule. En tenant compte de ce fait et de la forme de l'équation (4.7) on conclut que le point $\hat{z}$ est une racine double de la fonction $N(z)$. La frontière L_0 ne peut être composée que de deux arcs analytiques au plus dont l'extrémité commune est le point zéro.

2. Supposons que la frontière L_0 soit composée d'un seul arc analytique. Désignons par $z^\sim$ le point dont le transformé est son extrémité $w^\sim$. En ce point la fonction est bivalente, donc $F^{*'}(z^\sim) = 0$. De plus on a évidemment $w^\sim = 0$. Si $l \neq 0$, le premier membre de l'équation (4.7) ne s'annule pas au point $w = 0$.

En effet, observons d'abord que

$$\left. \frac{kw - l}{(w - v)^2(w - z_0)} \right|_{w=0} \neq 0.$$

La fonction $F^*(z)$ étant bivalente dans un voisinage du point $z^\sim$, on peut la représenter, pour les z de ce voisinage, sous la forme

$$(4.8) \quad F^*(z) = x^2(a_1 + y),$$

où $x = z - z^\sim$, $a_1 \neq 0$, $y = O(z - z^\sim)$.

On tire de là

$$(4.9) \quad F^{*'}(z) = x(b_1 + y), \quad b_1 \neq 0.$$

Divisant (4.8) et (4.9) on obtient

$$\frac{[F^{*'}(z)]^2}{F^*(z)} = \frac{(b_1 + y)^2}{a_1 + y}.$$

Donc

$$M(w) \left(\frac{zw'}{w} \right)^2 \Big|_{w=0} \neq 0.$$

Il en résulte que pour $l \neq 0$ on a $N(z^\sim) \neq 0$. Si, au contraire, $l = 0$, il s'ensuit que

$$(4.10) \quad M(w) \left(\frac{zw'}{w} \right)^2 = \frac{kz^2}{(w - v)^2(w - z_0)} w'^2.$$

Comme $F^{*'}(z^\sim) = 0$ on a donc

$$(4.11) \quad N(z^\sim) = 0.$$

D'une façon analogue, lorsque L_0 est composée de deux arcs analytiques passant par $w = 0$, on a $N(z^\sim) \neq 0$ lorsque $l \neq 0$ et $N(z^\sim) = 0$ lorsque $l = 0$, $z^\sim$ étant le point dont le transformé est l'extrémité du second arc.

Dans les deux cas l'équation (4.7) peut être mise sous la forme

$$(4.12) \quad w \frac{kw - l}{(w - v)^2(w - z_0)} \left(\frac{zw'}{w} \right)^2 = \frac{z(z - \hat{z})^2(pz^2 + qz + r)}{(z - \zeta)^2(z - 1/\bar{\zeta})^2(z - z_0)(z - 1/\bar{z}_0)},$$

où p, q, r sont des nombres tels que $|p|^2 + |q|^2 + |r|^2 > 0$. Soit $k \neq 0$. Nous allons prouver que $p \neq 0$. En supposant le contraire, on déduit de la propriété (N) que $r = 0$ et de l'équation (4.12) on obtient l'égalité

$$(4.13) \quad \left(\frac{zw'}{w} \right)^2 = \frac{qz^2(z - \hat{z})^2}{(z - \zeta)^2(z - 1/\bar{\zeta})^2(z - z_0)(z - 1/\bar{z}_0)} \cdot \frac{(w - v)^2(w - z_0)}{kw(w - \tilde{w})},$$

où $\tilde{w} = lk^{-1}$. Le premier membre de (4.13) converge vers un lorsque $z \rightarrow \infty$, tandis que le second tend vers zéro, ce qui est impossible. Donc $p \neq 0$. Par conséquent l'équation (4.12) peut être mise sous la forme

$$(4.14) \quad kw \frac{w - \tilde{w}}{(w - v)^2(w - z_0)} \left(\frac{zw'}{w} \right)^2 = \frac{pz(z - \hat{z})^2 L_2(z)}{(z - z_3)^2(z - z_4)^2(z - z_5)(z - z_6)},$$

où $z_3 = \zeta$, $z_4 = 1/\bar{\zeta}$, $z_5 = z_0$, $z_6 = 1/\bar{z}_0$ et $\frac{1}{2}L_2''(z) = 1$. Si $k \neq 0$ et $l = 0$, il résulte de l'égalité (4.11) que le second membre de l'équation (4.14) ne peut avoir de racines que sur la circonférence $|z| = 1$. La frontière L_0 du domaine B_0 ne peut être composée que d'un seul arc analytique; si elle en contenait deux, le numérateur de la fonction $N(z)$ devrait être de degré six, ce qui est impossible.

L'équation (4.14) a donc, pour $k \neq 0$ et $l = 0$, la forme

$$(4.15) \quad \frac{kw^2}{(w - v)^2(w - z_0)} \left(\frac{zw'}{w} \right)^2 = \frac{pz(z - \hat{z})^4}{(z - z_3)^2(z - z_4)^2(z - z_5)(z - z_6)}.$$

Nous allons maintenant prouver que dans le cas où $k = 0$ et $l \neq 0$ on a $p = 0$. Supposons le contraire. Alors on tire de (4.12)

$$(4.16) \quad \left(\frac{zw'}{w} \right)^2 = \frac{z(z - \hat{z})^2(pz^2 + qz + r)}{(z - z_3)^2(z - z_4)^2(z - z_5)(z - z_6)} \cdot \frac{(w - v)^2(w - z_0)}{-lw}.$$

En passant à la limite avec $z \rightarrow \infty$ dans l'équation (4.16) on aboutit à une contradiction avec l'hypothèse $p \neq 0$. On a donc nécessairement $p = 0$ et par suite $r = 0$. Par conséquent l'équation (4.12) prend la forme

$$(4.17) \quad \frac{-lw}{(w - v)^2(w - z_0)} \left(\frac{zw'}{w} \right)^2 = \frac{qz^2(z - \hat{z})^2}{(z - z_3)^2(z - z_4)^2(z - z_5)(z - z_6)}.$$

La fonction frontière $w = F^*(z)$, solution de l'équation (4.17), représente le cercle $|z| > 1$ sur un domaine B_0 dont la frontière est composée

d'un arc analytique. Revenons à l'équation (4.14). De même que dans le travail [2] on démontre que, dans le cas où $k \neq 0$ et $l \neq 0$, cette équation peut être mise sous l'une des quatre formes suivantes:

$$(I) \quad \frac{k w (w - \tilde{w})}{(w - v)^2 (w - z_0)} \left(\frac{z w'}{w} \right)^2 = \frac{p z (z - \hat{z})^2 (z - z_1) (z - z_2)}{(z - z_3)^2 (z - z_4)^2 (z - z_5) (z - z_6)},$$

où $|z_1| > 1$, $z_2 = 1/\bar{z}_1$, soit

$$(II) \quad \frac{k w (w - \tilde{w})}{(w - v)^2 (w - z_0)} \left(\frac{z w'}{w} \right)^2 = \frac{p z (z - \hat{z})^2 (z - z_1) (z - z_2)}{(z - z_3)^2 (z - z_4)^2 (z - z_5) (z - z_6)},$$

où $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$, $z_1 \neq z_2$, soit

$$(III) \quad \frac{k w (w - \tilde{w})}{(w - v)^2 (w - z_0)} \left(\frac{z w'}{w} \right)^2 = \frac{p z (z - \hat{z})^2 (z - z_1)^2}{(z - z_3)^2 (z - z_4)^2 (z - z_5) (z - z_6)},$$

où $|z_1| = 1$, $z_1 \neq \hat{z}$, soit enfin

$$(IV) \quad \frac{k w (w - \tilde{w})}{(w - v)^2 (w - z_0)} \left(\frac{z w'}{w} \right)^2 = \frac{p z (z - \hat{z})^2}{(z - z_3)^2 (z - z_4)^2 (z - z_5) (z - z_6)}.$$

Si l'équation de la fonction frontière prend l'une des formes (I), (II) ou (IV), la frontière du domaine B_0 sur lequel cette fonction représente le cercle $|z| > 1$ est un arc analytique, tandis que dans le cas (III) la frontière est un arc analytique par intervalles, composé de deux ou trois arcs analytiques faisant respectivement les angles $\frac{2}{3}\pi$ et $\frac{4}{3}\pi$ ou $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$.

3. Si la fonctionnelle est de la forme

$$K(F) = K[F(\zeta), \overline{F(\zeta)}],$$

l'équation de la fonction frontière se déduit de l'équation (4.3) en y posant $\alpha_1 = 0$. Elle prendra alors la forme

$$(4.18) \quad \frac{\alpha_0 v (v - z_0) w}{(w - v) (w - z_0)} \left(\frac{z w'}{w} \right)^2 = \frac{p z (z - \hat{z})^2}{(z - z_3) (z - z_4) (z - z_5) (z - z_6)},$$

où $p \neq 0$.

La frontière du domaine sur lequel la fonction frontière représente le cercle $|z| > 1$ est un arc analytique.

§ 5

1. Soit $w = F(z)$, $F(\infty) = \infty$, $F'(\infty) > 0$, $F(z) \neq 0$, une fonction univalente dans le cercle $|z| > 1$ et holomorphe dans ce cercle sauf au point $z = \infty$, où elle admet un pôle simple. Supposons encore qu'elle représente le cercle $|z| > 1$ sur le domaine B_0 que l'on obtient en entaillant le plan (w) par un arc de Jordan L_0 passant par le point $w = 0$ et ne pas-

sant pas par le point $w = \infty$. L'équation de l'arc L_0 peut s'écrire sous la forme

$$w = w(t^*), \quad 0 \leq t^* \leq \infty, \quad w(\infty) = 0.$$

Pour un $t \geq 0$ fixé considérons le domaine B_t dont la frontière $L_t \subset L_0$ est représentée par l'équation

$$(5.1) \quad w = w(t^*), \quad t \leq t^* \leq \infty.$$

Désignons par $g(z, t)$, $g(\infty, t) = \infty$, $g'_z(\infty, t) = c$, $g(z, t) \neq 0$ la fonction qui effectue la représentation conforme du cercle $|z| > 1$ sur le domaine B_t . La fonction $g(z, t)$ ainsi définie satisfait à la condition $g(z, 0) = F(z)$ en vertu de la définition du domaine B_t . La dérivée $g'_z(\infty, t)$ est une fonction décroissante de la variable t (v. [5]); en changeant donc au besoin la paramétrisation de l'arc L_t on peut admettre que

$$g'_z(\infty, t) = ce^{-t}, \quad c = F'(\infty).$$

La fonction $g(z, t)$ appartient à la famille $\tilde{\Sigma}$. Désignons par $h(w, t)$ la fonction inverse de $g(z, t)$ par rapport au premier argument. En profitant du théorème 1 et de la relation (1.2) on obtient, en effectuant les variations intermédiaires, la formule variationnelle suivante dans la classe $\Sigma(z_0)$:

$$(5.2) \quad F_\lambda(z) = F(z) + \lambda R(z, z_0, b, t) + O(\lambda^2),$$

où

$$R(z, z_0, b, t) = -AU(z, z_0, b, t) + AH^2(b, t)T(z, z_0, b, t) + \\ + \overline{AH^2(b, t)} T(z, z_0, 1/\bar{b}, t),$$

et

$$U(z, z_0, b, t) = \frac{g(b, t)F(z)[F(z) - z_0]}{[g(b, t) - F(z)][g(b, t) - z_0]}, \quad H(b, t) = \frac{g(b, t)}{bg'_z(b, t)}, \\ T(z, z_0, b, t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{h[F(z), t]}{h'_w[F(z), t]} \cdot \frac{b + h[F(z), t]}{b - h[F(z), t]} - \frac{1}{2} \cdot \frac{F(z)h(z_0, t)}{z_0 h'_w(z_0, t)} \cdot \frac{b + h(z_0, t)}{b - h(z_0, t)}.$$

2. Considérons la fonction frontière $F^*(z) \in \Sigma(z_0)$. Appliquons à cette fonction la formule (5.2) au point $z = \zeta$ et, en même temps, remplaçons le paramètre variable b par z . On déduit alors de (5.2)

$$(5.3) \quad F_\lambda(\zeta) = v + \lambda R(h, w, v, z_0, t) + O(\lambda^2),$$

où

$$R(h, w, v, z_0, t) = -AU(w, v, z_0) + AH^2(w, t)T(h, v, z_0, t) + \\ + \overline{AH^2(w, t)} T(h, v, z_0, t),$$

$$U(w, v, z_0) = \frac{wv(v - z_0)}{(w - v)(w - z_0)}, \quad H(w, t) = \frac{wh'_w(w, t)}{h(w, t)},$$

$$T(h, v, z_0, t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{h_3}{h'_3} \cdot \frac{h + h_3}{h - h_3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{h_0}{h'_0} \cdot \frac{v}{z_0} \cdot \frac{h + h_0}{h - h_0}$$

et

$$h_3 = h(v, t), \quad h_0 = h(z_0, t), \quad h'_3 = h'_w(v, t), \quad h'_0 = h'_w(z_0, t).$$

La formule variationnelle (5.3) se réduit pour $t = 0$ à la formule (3.5), puisque

$$g(z, 0) = F^*(z), \quad g'_z(z, 0) = F^{**}(z), \quad h'_w[F^*(z), 0] = [F^{**}(z)]^{-1}, \\ h'_w(z_0, 0) = [F^{**}(z_0)]^{-1}, \quad h(z_0, 0) = z_0, \quad h[F^*(z), 0] = z.$$

3. La propriété extrémale (3.4) des points frontières, rapprochée de la formule variationnelle (5.3) que nous venons d'obtenir permet de trouver l'équation différentielle de la fonction $h(w, t)$ inverse de $g(z, t)$, où $g(z, 0) = F^*(z)$.

En procédant de même qu'au paragraphe 3, on obtient le théorème suivant:

THÉOREME 6. La fonction $h = h(w, t)$, inverse de $g(z, t)$, où $g(z, 0) = F^*(z)$ est une fonction frontière par rapport à la fonctionnelle (3.2), satisfait à l'équation

$$(5.4) \quad M(w) = \left(\frac{wh'}{h} \right)^2 N(h, t),$$

où

$$N(h, t) = \sum_{k=0}^n [\alpha_k T^{(k)}_t(h, v, z_0, t) + \bar{\alpha}_k \overline{T^{(k)}_t(t, 1/\bar{h}, v, z_0)}], \\ M(w) = \sum_{k=0}^n \alpha_k U^{(k)}(w, v, z_0), \quad U(w, v, z_0) = \frac{wv(v-z_0)}{(w-v)^2(w-z_0)}, \\ T(h, v, z_0, t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{h_3}{h'_3} \cdot \frac{h+h_3}{h-h_3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{h_0}{h'_0} \cdot \frac{v}{z_0} \cdot \frac{h+h_0}{h-h_0}, \\ h = h(w, t), \quad h_3 = h(v, t), \quad h_0 = h[F^*(z_0), t], \\ h'_3 = h'_w(v, t), \quad h'_0 = h'_w[F^*(z_0), t], \quad h' = h'_w(w, t),$$

$\beta, |\beta| = 1$ étant un paramètre.

Les fonctions $M(w)$ et $N(h, t)$ sont des fonctions rationnelles de leurs arguments. C'est pourquoi l'analyse de l'équation (5.4) mène à des conclusions analogues à celles qu'on a obtenues en étudiant l'équation (3.15).

1° En particulier, en désignant par $\hat{w}$ l'origine de l'arc L_t , c'est-à-dire $\hat{w} = w(t)$, où L_t est défini par l'équation (5.1), on constate qu'au point $\kappa(t) = h[w(t), t]$ la dérivée

$$g'_z[\kappa(t), t] = 0.$$

Si l'on écrit maintenant l'équation (5.4) sous la forme

$$M(w)(h/wh')^2 = N(h, t),$$

on voit, en tenant compte de $h[w(t), t] = 0$, $w(t) \neq 0$, $h'_w[w(t), \infty] = \infty$, que la fonction $N(h, t)$ admet au point $\kappa = \kappa(t)$ une racine double. On a donc la décomposition

$$N(h, t) = (h - \kappa)^2 N_1(h, t),$$

où $N_1(h, t)$ est un polynôme de la variable h .

2° De (5.5) il résulte immédiatement que

$$N(h, t) = \overline{N(1/\bar{h}, t)}.$$

3° Si $n = 1$, l'équation (5.4) prend la forme

$$(5.6) \quad \frac{w(kw - l)}{(w - v)^2(w - z_0)} = \left(\frac{wh'}{h}\right)^2 \cdot \frac{h(h - \kappa)^2 L_2(h, t)}{(h - h_3)^2(h - h_4)^2(h - h_5)(h - h_6)},$$

où

$$h_3 = h[F^*(\zeta), t], \quad h_4 = \frac{1}{h_3}, \quad h_5 = h[F^*(z_0), t], \quad h_6 = \frac{1}{h_5},$$

$L_2(h, t)$ est un polynôme de la variable h , de degré 2 au plus.

Suivant les valeurs de k, l et celles des racines h_1 et h_2 de la fonction $N(h, t)$, cette équation prend respectivement des formes analogues à (4.15) ($k \neq 0, l = 0$), (4.17) ($k = 0, l \neq 0$), (I), (II), (III), (IV) ($k \neq 0, l \neq 0$) et (4.18) ($\alpha_1 = 0$). On les déduit de ces équations en remplaçant $z, \hat{z}, z_k, w', p, q, r$ respectivement par $h, \kappa, h_k, h_w'^{-1}, p(t), q(t), r(t)$ ($k = 1, 2, \dots, 6$), $p(t), q(t), r(t)$ étant des fonctions de la variable t .

Suivant la forme de l'équation (5.6), la fonction $z = h(w, t)$ représente le plan (w) entaillé par un arc analytique ou par un arc analytique par intervalles (composé de deux ou de trois arcs analytiques) sur le cercle $|z| > 1$.

§ 6

Les paramètres qui interviennent dans l'équation (5.6) sont liés par des relations qui serviront à déterminer les valeurs v et v' dont on aura besoin pour établir l'équation de la frontière du domaine des valeurs admises par la fonctionnelle (4.1). Ces relations résulteront de l'étude de l'équation (5.6) dans le voisinage des points $w = \infty$, $w = v$ et $w = z_0$, en tenant compte du fait que les fonctions $g(z, t)$, $h(w, t)$ et $h'_w(w, t)$ se

développent en séries de puissances dans les voisinages des points $z = \infty$ et $w = \infty$:

$$g(z, t) = e^{-t} \left[c(t)z + c_0(t) + \frac{c_1(t)}{z} + \dots \right], \quad c(t) \neq 0,$$

$$h(w, t) = \left[e^t \frac{1}{c(t)} w + a_0(t) + \frac{a_1(t)}{w} + \dots \right],$$

$$h'_w(w, t) = \frac{e^t}{c(t)} \left[1 + \frac{a_1(t)}{w^2} + \dots \right].$$

Si $k \neq 0$ et $\alpha_1 \neq 0$, les équations (I)-(IV) peuvent être mises sous la forme commune:

$$(6.1) \quad \frac{w(kw-l)}{(w-v)^2(w-z_0)} = \left(\frac{wh'}{h} \right)^2 \cdot \frac{ph(h-\kappa)^2(h-h_1)(h-h_2)}{(h-h_3)^2(h-h_4)^2(h-h_5)(h-h_6)}.$$

Dans ce cas on a les relations suivantes entre les paramètres:

$$(6.2) \quad \operatorname{im} \left[k\bar{q}\bar{h}_5 - e^{-t} \frac{c(p^2-1)}{r} \cdot \frac{A}{E} \bar{s} \right] = 0,$$

et

$$(6.3) \quad \operatorname{im} \bar{q}^2 \left[ks\bar{h}_5 - e^{-t} \cdot \frac{c}{p^2} \cdot \frac{A_1}{E_1} \cdot \frac{h_5}{h'_5} \bar{s} \right] = 0,$$

où

$$(6.4) \quad \varrho = \varrho(t) = |h_3|, \quad q = q(t) = \frac{h_3\bar{\kappa}}{\varrho},$$

$$(6.5) \quad r = r(t) = |h_5|, \quad s = s(t) = h_5\bar{\kappa}/r,$$

$$A = \frac{kv-l}{v(v-z_0)}, \quad E = \frac{(\varrho q-1)^2}{(\varrho q-rs)(\varrho qv-s)},$$

$$A_1 = \frac{kz_0-l}{z_0(z_0-v)^2}, \quad E_1 = \frac{(rs-1)^2}{(\varrho q-rs)^2(\varrho rs-q)^2}.$$

Si $k = 0$ et $\alpha_1 \neq 0$ l'étude de l'équation correspondante, c'est-à-dire de l'équation

$$\frac{-lw}{(w-v)^2(w-z_0)} = \left(\frac{wh'}{h} \right)^2 \cdot \frac{qh^2(h-\kappa)^2}{(h-h_3)^2(h-h_4)^2(h-h_5)(h-h_6)}$$

mène aux relations suivantes entre les paramètres:

$$\operatorname{im} \left(\frac{A'}{E} \cdot \frac{h_5}{\bar{h}_5} q^2 \bar{s}^2 \right) = 0, \quad \operatorname{im} \left(\frac{A'}{E_1} \cdot \frac{h_5}{h'_5} \cdot \frac{h_5}{\bar{h}_5} \bar{s}^2 \right) = 0,$$

où

$$A' = Al^{-1}, \quad A'_1 = A_1 l^{-1}.$$

Enfin, si $\alpha_1 = 0$, on obtient le système d'équations:

$$\operatorname{im}(k\bar{q}\bar{h}_5) = 0, \quad \operatorname{im}\left(\frac{A_1}{E_1} \cdot \frac{h_5^2}{h_5'} \bar{k}\bar{q}^4\right) = 0.$$

§ 7

1. Désignons par $\tilde{\Sigma}$ la famille de toutes les fonctions $w = F(z)$, $F(z) \neq 0$, $F(\infty) = \infty$, $F'(\infty) > 0$, univalentes dans le cercle $|z| > 1$ et holomorphes dans ce cercle sauf au point $z = \infty$, qui représentent ce cercle sur des domaines que l'on obtient du plan (w) en l'entailleant par un nombre fini d'arcs de Jordan passant par le point zéro et ne passant pas le point ∞ . Comme auparavant, B_0 et L_0 désigneront respectivement le domaine transformé du cercle $|z| > 1$ par la fonction $F(z) \in \tilde{\Sigma}$ et la frontière de ce domaine, $g(z, t)$, $g(z, t) \neq 0$, $g(\infty, t) = \infty$, $g'_z(\infty, t) = ce^{-t}$ la fonction qui représente le cercle $|z| > 1$ sur le domaine $B_t \supset B_0$ (v. p. 204) et $h(w, t)$ la fonction inverse de $g(z, t)$. En posant

$$(7.1) \quad F(z, t) = h[F(z), t]$$

on obtient pour $t = 0$ l'égalité $F(z, 0) = z$.

En utilisant un résultat de la théorie de Löwner relatif à la famille de fonctions $\tilde{\Sigma}$ (v. [5]) on a le

THÉOREME DE LÖWNER. *Pour toute fonction $F(z)$ de la famille $\tilde{\Sigma}$ il existe une fonction $k(t)$, $|k(t)| = 1$, continue dans l'intervalle $0 \leq t \leq \infty$ sauf en un nombre fini de points de discontinuité de première espèce et telle que la fonction $\tilde{F}(z)$ peut être représentée par la formule*

$$(7.2) \quad F(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} ce^{-t} \cdot F(z, t), \quad F(z, \infty) = \infty.$$

La fonction $F(z, t)$ satisfait à l'équation

$$(7.3) \quad \frac{\partial F(z, t)}{\partial t} = F(z, t) \cdot \frac{F(z, t) + k(t)}{F(z, t) - k(t)}, \quad 0 \leq t \leq \infty,$$

et, de plus, on a

$$k(t) = h(\hat{w}, t),$$

où $\hat{w}$ est le point origine de la frontière L_t du domaine B_t .

De ce théorème nous déduirons quelques conséquences que nous utiliserons dans la suite.

Divisons l'équation (7.3) par $F(z, t) = F$ et séparons ensuite les parties réelle et imaginaire. Nous aurons:

$$(7.4) \quad \frac{\partial |F|}{\partial t} = |F| \cdot \frac{|F|^2 - 1}{|F - k(t)|^2}.$$

De la définition de la fonction $h(w, t)$ et des relations (7.1) et (7.4) il résulte que le module de la fonction $F(z, t)$ est une fonction strictement croissante de la variable t (lorsque z est fixé). En outre $|F(z, 0)| = |z|$, $F(z, \infty) = \infty$. C'est pourquoi on peut prendre, au lieu de t , $|F(z, t)|$ pour nouvelle variable indépendante. Par conséquent t , $k(t)$ et $F(z, t)$ sont des fonctions de l'argument $|F|$: $t = t(|F|)$, $k(t) = k[t(|F|)] = \xi(|F|)$, $F(z, t) = F[z, t(|F|)] = \mu(z, |F|)$.

Le théorème de Löwner s'applique aussi aux fonctions frontières $F^*(z)$ qui satisfont à la condition $F'(\infty) > 0$. Pour simplifier l'écriture nous désignerons dans la suite par $F(z)$ et $F(z, t)$ et $k(t)$ respectivement la fonction frontière et les fonctions correspondantes du théorème de Löwner. Si l'on prend maintenant pour variable indépendante $|F(\zeta, t)|$ ou $|F(z_0, t)|$ alors, en vertu de (7.1) q et s définis par les formules (6.4) et (6.5) seront des fonctions des variables ϱ et r respectivement: $q = q(\varrho)$, $s = s(r)$. De plus $k(t) = \kappa(t)$. D'après (6.4) et (6.5) l'équation (7.4) peut donc s'écrire sous la forme

$$(7.5) \quad dt = \frac{(\varrho q - 1)(\varrho - q)}{\varrho q(\varrho^2 - 1)} d\varrho, \quad \text{si } z = \zeta$$

ou

$$(7.6) \quad dt = \frac{(sr - 1)(r - s)}{sr(r^2 - 1)} dr, \quad \text{si } z = z_0.$$

Des formules (7.5) et (7.6) on tire l'égalité

$$(7.7) \quad t = \int_{|z|}^{\varrho} \frac{(\varrho q - 1)(\varrho - q)}{\varrho q(\varrho^2 - 1)} d\varrho = \int_{|z_0|}^r \frac{(sr - 1)(r - s)}{sr(r^2 - 1)} dr.$$

Divisant (7.3) par $F(z, t)$ et soustrayant 1 de chacun des membres, on aura immédiatement

$$(7.8) \quad \frac{d \log[ce^{-t}F(z, t)]}{dt} = 2 \frac{k(t)}{F(z, t) - k(t)}.$$

En intégrant l'équation (7.8) dans l'intervalle $[t, \infty]$, on trouve que

$$(7.9) \quad \log F(z) - \log ce^{-t}F(z, t) = 2 \int_t^{\infty} \frac{k(t)}{F(z, t) - k(t)} dt.$$

Dans l'intégrale de la formule (7.9) nous remplacerons la variable t par la variable $|F(\zeta, t)|$. Dans ce but posons dans (7.9) $z = \zeta$ et ensuite profitons des relations (7.5) et (6.4). Alors

$$(7.10) \quad \log v - \log ce^{-t} h_s = 2 \int_{\varrho}^{\infty} \frac{\varrho - q}{\varrho q (\varrho^2 - 1)} d\varrho .$$

De même, en posant dans (7.9) $z = z_0$ et en prenant pour nouvelle variable $|F(z_0, t)|$, on obtient

$$(7.11) \quad \log z_0 - \log ce^{-t} h_s = 2 \int_r^{\infty} \frac{r - s}{sr (r^2 - 1)} dr .$$

Utilisant les formules (7.10) et (7.11) nous déterminerons c , v et h_s moyennant les intégrales correspondantes des fonctions $q(\varrho)$ et $s(r)$. Pour cela posons dans ces formules $t = 0$ et ensuite ajoutons — les membre à membre. Nous aurons respectivement:

$$(7.12) \quad \log v - \log c \zeta = 2 \int_{|\zeta|}^{\infty} \frac{\varrho - q}{\varrho q (\varrho^2 - 1)} d\varrho ,$$

$$(7.13) \quad \log c = -2 \int_{|z_0|}^{\infty} \frac{r - s}{sr (r^2 - 1)} dr ,$$

$$(7.14) \quad \log \frac{v}{\zeta} = 2 \int_{|\zeta|}^{\infty} \frac{\varrho - q}{\varrho q (\varrho^2 - 1)} d\varrho - \int_{|z_0|}^{\infty} \frac{r - s}{sr (r^2 - 1)} dr .$$

Posons

$$(7.15) \quad I = I(\varrho) = \int_{\varrho}^{\infty} \frac{\varrho - q}{\varrho q (\varrho^2 - 1)} d\varrho , \quad J = J(r) = 2 \int_r^{\infty} \frac{r - s}{sr (r^2 - 1)} dr ,$$

$$I_0 = I(|\zeta|) , \quad J_0 = J(|z_0|) ,$$

$$L = \int_{|z_0|}^{\zeta} \frac{(\varrho q - 1)(\varrho - q)}{\varrho q (\varrho^2 - 1)} d\varrho = \int_{|\zeta|}^{\varrho} \frac{(sr - 1)(r - s)}{sr (r^2 - 1)} dr .$$

Les relations (7.7), (7.11), (7.13) et (7.14) prendront alors la forme:

$$(I) \quad t = L ,$$

$$(II) \quad \log z_0 - \log ce^{-t} h_s = J ,$$

$$(III) \quad \log c = -J_0 ,$$

$$(IV) \quad \log v/\zeta = I_0 - J_0 .$$

En tenant compte de (I) et (III) on tire de (II)

$$(II') \quad h_5 = z_0 \exp(J_0 + L - J) .$$

Enfin les relations (III) et (IV) donnent

$$(III') \quad c = \exp(-J_0) ,$$

$$(IV') \quad v = \zeta \exp(I_0 - J_0) .$$

2. Pour déterminer h'_5 et v' dérivons l'équation (7.3) par rapport à la variable z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial F(z, t)}{\partial t} \right] &= F'_z(z, t) \cdot \frac{F(z, t) + k(t)}{F(z, t) - k(t)} + \\ &+ F(z, t) F'_z(z, t) \cdot \frac{F(z, t) - k(t) - F(z, t) - k(t)}{[F(z, t) - k(t)]^2} , \end{aligned}$$

d'où

$$(7.16) \quad \frac{\partial}{\partial t} F'_z(z, t) = F'_z(z, t) \cdot \frac{F^2(z, t) - k^2(t) - 2k(t)F(z, t)}{[F(z, t) - k(t)]^2} .$$

Comme

$$\frac{\partial [\log ce^{-t} F'_z(z, t)]}{\partial t} = -1 + \frac{\partial \log F'_z(z, t)}{\partial t} ,$$

on obtient, en tenant compte de (7.16),

$$(7.17) \quad \frac{\partial [\log ce^{-t} F'_z(z, t)]}{\partial t} = -2 \frac{k^2(t)}{[F(z, t) - k(t)]^2} .$$

En vertu de (7.2) on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} ce^{-t} F'_z(z, t) = F'(z) .$$

En intégrant la relation (7.17) dans l'intervalle $[t, \infty]$ on trouve

$$(7.18) \quad \log F'(z) - \log ce^{-t} F'_z(z, t) = -2 \int_t^\infty \frac{k^2(t)}{[F(z, t) - k(t)]^2} dt .$$

Posons

$$(7.19) \quad P = P(r) = 2 \int_r^\infty \frac{r-s}{sr(sr-1)(r^2-1)} dr .$$

En mettant dans (7.18) au lieu de t la variable r , on obtient, en tenant compte de (7.6), (7.19) et en posant $F'(z_0) = v'_0$

$$(7.20) \quad \log v'_0 - \log ce^{-t} F'_z(z_0, t) = -P .$$

Comme

$$F'_z(z, t) = h'_w[F(z), t]F'(z),$$

on a

$$F'_z(z_0, t) = h'_5 v'_0.$$

La formule (7.20), rapprochée de (I) et (III), donne

$$(7.21) \quad h'_5 = \exp[P + J_0 + L].$$

3. Posons

$$Q = Q(\varrho) = 2 \int_{\varrho}^{\infty} \frac{\varrho - q}{\varrho q(q-1)(\varrho^2-1)} d\varrho,$$

$$Q_0 = 2 \int_{|z|}^{\infty} \frac{\varrho - q}{\varrho q(\varrho q-1)(\varrho^2-1)} d\varrho.$$

En remplaçant dans (7.18) la variable t par $\varrho = |F(\zeta, t)|$ on aura, d'après (7.5) et (7.20), la formule intégrale

$$\log v' - \log c e^{-t} F'_z(\zeta, t) = -Q,$$

d'où il vient pour $t = 0$

$$\log v' - \log c = -Q_0$$

et en tenant compte de (III)

$$v' = \exp(-J_0 - Q_0).$$

4. Récapitulant tous les résultats que nous avons obtenus nous pouvons énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 7. *La frontière du domaine des valeurs de la fonctionnelle*

$$K(F) = K[F(\zeta), \overline{F(\zeta)}, F'(\zeta), \overline{F'(\zeta)}]$$

lorsque $F(z) \in \Sigma(z_0)$, $z_0 \neq \infty$, est déterminée par l'équation

$$\Omega = K(v, \bar{v}, v', \bar{v}'),$$

où

$$v = \zeta \exp(I_0 - J_0), \quad v' = \exp(-J_0 - Q_0)$$

et

$$(7.22) \quad I_0 = 2 \int_{|z|}^{\infty} \frac{\varrho - q}{\varrho q(\varrho^2-1)} d\varrho, \quad J_0 = 2 \int_{|z_0|}^{\infty} \frac{r-s}{sr(r^2-1)} dr,$$

$$Q_0 = 2 \int_{|z|}^{\infty} \frac{\varrho - q}{\varrho q(\varrho q-1)(\varrho^2-1)} d\varrho.$$

Les fonctions $q = q(\varrho)$, $s = s(r)$, $|q| = 1$, $|s| = 1$ qui figurent sous le signe intégrale dans (7.22) sont les solutions du système d'équations intégrales

$$\operatorname{im} \left[q \bar{k} \bar{h}_5 - e^{-t} \frac{c(\varrho^2 - 1)}{r} \cdot \frac{A}{E} \cdot \bar{s} \right] = 0 ,$$

$$\operatorname{im} \bar{q}^2 \left[k s \bar{h}_5 - e^{-t} \frac{c}{\varrho^2} \cdot \frac{A_1}{E_1} \cdot \frac{h_5}{h'_5} \cdot \bar{s} \right] = 0$$

si $k \neq 0$ et $\alpha_1 \neq 0$,

$$\operatorname{im} \left(\frac{A'}{E} \cdot \frac{h_5}{\bar{h}_5} \cdot q^2 \bar{s}^2 \right) = 0 , \quad \operatorname{im} \left(\frac{A'_1}{E_1} \cdot \frac{h_5}{h'_5} \cdot \frac{h_5}{\bar{h}_5} \cdot \bar{s} \right) = 0$$

si $k = 0$ et $\alpha_1 \neq 0$,

$$\operatorname{im}(k \bar{q} \bar{h}_5) = 0 , \quad \operatorname{im} \left(\frac{A_1}{E_1} \cdot \frac{h_5^2}{h'_5} \cdot \bar{k} \bar{q}^4 \right) = 0$$

si $\alpha_1 = 0$,

$$k = (\alpha_0 v + \alpha_1 v')(v - z_0) + \alpha_1 v v' , \quad l = v^2(\alpha_0 v + \alpha_1 v') - \alpha_0 v^2 z_0 ,$$

$$A = \alpha_1 v' , \quad A_1 = -(\alpha_0 v + \alpha_1 v') z_0^{-1} , \quad A' = A l^{-1} , \quad A'_1 = A_1 l^{-1} ,$$

$$E = \frac{(\varrho q - 1)^2}{(\varrho q - rs)(\varrho q - s)} , \quad E_1 = \frac{(rs - 1)^2}{(\varrho q - rs)^2(\varrho rs - q)^2} ,$$

$$t = L , \quad c = \exp(-J_0) , \quad h_5 = z_0 \exp(J_0 + L - J) ,$$

$$h'_5 = \exp(P + J_0 + L) ,$$

où

$$L = \int_{|z_0|}^r \frac{(\varrho q - 1)(\varrho - q)}{\varrho q(\varrho^2 - 1)} d\varrho , \quad J = 2 \int_r^\infty \frac{r - s}{sr(r^2 - 1)} dr ,$$

$$P = 2 \int_r^\infty \frac{r - s}{sr(sr - 1)(r^2 - 1)} dr .$$

Enfin,

$$\alpha_0 = p_0 \beta + \bar{q}_0 \bar{\beta} , \quad \alpha_1 = p_1 \beta + \bar{q}_1 \bar{\beta} ,$$

où

$$p_j = \frac{\partial K}{\partial F^{(j)}} , \quad q_j = \frac{\partial K}{\partial \bar{F}^{(j)}}$$

pour $F = F^*$, $j = 0, 1$, $F^{(0)} = F$, β étant un paramètre tel que $|\beta| = 1$.

Travaux cités

- [1] Z. Charzyński et W. Janowski, *Domaine de variation des valeurs d'une fonction univalente bornée*, Bull. Soc. Sci. et Lettres de Łódź, Classe III, 10 (1959), pp. 1-11.
- [2] В. В. Голубев, *Декции по аналитической теории дифференциальных уравнений*, Москва 1950, гл. 1, § 3, 4.
- [3] Г. М. Голузин, *Метод вариаций в конформном отображении*, Мат. сб. 19 (61), № 2 (1946), pp. 203-236.
- [4] W. Janowski, *Sur une certaine famille de fonctions univalentes*, Ann. Polon. Math. 18 (1966), pp. 171-203.
- [5] K. Löwner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises*, Math. Ann. 89 (1923), pp. 103-121.

Reçu par la Rédaction le 5. 1. 1968